

Introduction à la mécanique et la thermodynamique des milieux continus

Charles Mareau

Février 2025

Table des Matières

1	Introduction	1
I	Principes fondamentaux	3
2	Transformations des milieux continus	5
2.1	Cinématique des milieux continus	5
2.1.1	Milieu continu	5
2.1.2	Référentiel	6
2.1.3	Configurations	8
2.1.4	Transformation	9
2.1.5	Descriptions lagrangienne et eulérienne	10
2.1.6	Déplacement, vitesse et accélération	12
2.2	Gradient de la transformation	12
2.2.1	Définition	12
2.2.2	Relations de transport	13
2.2.3	Compatibilité du gradient de la transformation	16

2.2.4	Décomposition polaire	19
2.2.5	Transformations homogènes particulières	22
3	Déformations et taux de déformation	25
3.1	Déformations	25
3.1.1	Mesures lagrangiennes de l'état de déformation	26
3.1.2	Mesures eulériennes de l'état de déformation	29
3.1.3	Tenseur des déformations infinitésimales	29
3.1.4	Interprétation des mesures de déformation	31
3.1.5	Déformations principales	34
3.1.6	Déformations volumétriques et isochores	37
3.1.7	Etats de déformation particuliers	38
3.2	Taux de déformation	41
3.2.1	Mesures lagrangiennes du taux de déformation	41
3.2.2	Mesures eulériennes du taux de déformation	42
3.2.3	Tenseur des taux de déformation infinitésimale	45
4	Équations de conservation	47
4.1	Forme générale des équations de conservation	47
4.1.1	Quantité globale, volumique et spécifique	47
4.1.2	Forme matérielle des équations de conservation	50
4.1.3	Forme spatiale des équations de conservation	54
4.2	Conservation de la masse	56
4.2.1	Cas des systèmes ouverts	56

4.2.2	Cas des systèmes fermés ou isolés	57
4.2.3	Forme spécifique des équations de conservation	58
5	Forces et contraintes	61
5.1	Forces de contact et forces de volume	61
5.2	Vecteur contrainte	63
5.3	Conservation de la quantité de mouvement	65
5.3.1	Quantité de mouvement d'un système	65
5.3.2	Conservation de la quantité de mouvement linéaire	66
5.3.3	Conservation de la quantité de mouvement angulaire	66
5.3.4	Principe d'action réciproque	67
5.4	Tenseur des contraintes	68
5.4.1	Tenseur des contraintes de Cauchy	68
5.4.2	Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchoff	71
5.5	Conditions locales d'équilibre	72
5.5.1	Cas des systèmes ouverts	72
5.5.2	Cas des systèmes fermés ou isolés	75
5.6	Interprétation des mesures de contrainte	75
5.6.1	Contraintes normales	75
5.6.2	Contraintes tangentielles	77
5.6.3	Contraintes principales	78
5.6.4	Contraintes sphériques et déviatoriques	80
5.6.5	Coordonnées de Lode	81
5.7	Etats de contrainte particuliers	85

5.7.1	Traction (ou compression) uniaxiale	85
5.7.2	Cisaillement	85
5.7.3	Contraintes planes	85
5.7.4	Compression (ou traction) hydrostatique	86
6	Concepts de thermodynamique	87
6.1	Approche macroscopique	87
6.2	Équilibre thermodynamique	88
6.3	Variables d'états	88
6.4	Energie interne et énergie cinétique	90
6.5	Entropie	91
6.6	Température, tenseur des contraintes et potentiel chimique	95
6.7	Energie libre, enthalpie et enthalpie libre	97
7	Puissance des efforts internes et externes	101
7.1	Théorème de l'énergie cinétique	102
7.2	Taux de variation de l'énergie cinétique	103
7.2.1	Cas des systèmes ouverts	104
7.2.2	Cas des systèmes fermés	106
7.3	Puissance des efforts externes	107
7.4	Puissance des efforts internes	109
7.4.1	Cas des systèmes ouverts	109
7.4.2	Cas des systèmes fermés	110

7.4.3	Conjugaison entre mesures de contrainte et de taux de déformation	110
8	Premier principe	115
8.1	Forme globale du premier principe	115
8.2	Forme locale du premier principe	116
8.2.1	Cas des systèmes ouverts	117
8.2.2	Cas des systèmes fermés	119
9	Second principe	123
9.1	Forme globale du second principe	123
9.2	Forme locale du second principe	124
9.2.1	Cas des systèmes ouverts	125
9.2.2	Cas des systèmes fermés	127
9.3	Puissance dissipée	129
9.3.1	Cas des systèmes ouverts	130
9.3.2	Cas des systèmes fermés	132
10	Troisième principe	135
10.1	Propriétés thermodynamiques	136
10.1.1	Tenseur de dilatation thermique	136
10.1.2	Tenseurs de rigidité et de souplesse	137
10.1.3	Capacité thermique spécifique	139
10.2	Troisième principe de la thermodynamique	141
10.2.1	Énoncé	141

10.2.2	Conséquences	142
10.3	Stabilité thermodynamique	144
10.3.1	Entropie spécifique	144
10.3.2	Énergie interne spécifique	148
10.3.3	Énergie libre spécifique	152
10.3.4	Enthalpie spécifique	154
10.3.5	Enthalpie libre spécifique	156
11	Objectivité	159
11.1	Définitions	160
11.2	Cas des grandeurs cinématiques	162
11.3	Cas des grandeurs thermodynamiques	165
11.4	Dérivation objective	170
II	Description du comportement	173
12	Lois de comportement	175
12.1	Nécessité des lois de comportement	175
12.2	Restrictions	178
12.3	Symétries matérielles	183
12.3.1	Groupes ponctuels de symétrie	183
12.3.2	Restrictions sur les propriétés	185
12.4	Construction des lois de comportement	189
12.4.1	Choix des variables d'état	189

12.4.2	Contrainte élastique et contrainte visqueuse	189
12.4.3	Relations d'état	191
12.4.4	Relations d'évolution	192
12.4.5	Cas des systèmes ouverts	199
12.4.6	Cas des systèmes fermés	204
13	Transferts thermiques	209
13.1	Équation de diffusion de la chaleur	209
13.1.1	Cas des systèmes ouverts	209
13.1.2	Cas des systèmes fermés	212
13.2	Conditions aux limites	214
13.2.1	Réservoir de température	214
13.2.2	Convection et rayonnement	215
13.2.3	Sources volumiques de chaleur	217
13.3	Loi de Fourier	218
14	Thermoélasticité	223
14.1	Hypothèses de modélisation	224
14.2	Relations de comportement	225
14.3	Propriétés thermodynamiques	228
14.4	Propriétés du tenseur de rigidité	230
14.5	Propriétés du tenseur de dilatation thermique	231
14.6	Effet de la température sur les propriétés	232
15	Viscoélasticité linéaire	239

15.1	Aspects expérimentaux	240
15.1.1	Essais de fluage	240
15.1.2	Essais de relaxation	241
15.1.3	Analyse mécanique dynamique	242
15.2	Equivalence temps-température	245
15.3	Principe de superposition de Boltzmann	247
15.4	Approche rhéologique	252
15.4.1	Éléments rhéologiques	252
15.4.2	Hypothèses de modélisation	254
15.4.3	Modèle de Kelvin-Voigt	254
15.4.4	Modèle de Maxwell	258
15.4.5	Modèle de Maxwell généralisé	261
16	Plasticité	267
16.1	Aspects expérimentaux	268
16.1.1	Limite d'élasticité	268
16.1.2	Dépendance à la vitesse de déformation	271
16.2	Hypothèses de modélisation	271
16.3	Critère de plasticité	274
16.3.1	Définition	274
16.3.2	Critère de Tresca	276
16.3.3	Critère de von Mises	278
16.3.4	Critère de Drucker-Prager	279
16.3.5	Critère quadratique de Hill	280

16.4	Ecroûissage	281
16.4.1	Modes d'écroûissage	281
16.4.2	Variables d'écroûissage	285
16.5	Multiplicateur plastique et direction d'écoulement	286
16.6	Formulation thermodynamique	290
16.6.1	Relations d'état	290
16.6.2	Relations d'évolution	292
16.6.3	Coefficient de Taylor-Quinney	300
16.7	Exemples de modèles de comportement	301
16.7.1	Viscoplasticité standard avec écroûissage mixte	301
16.7.2	Viscoplasticité non-standard avec écroûissage isotrope	307
16.7.3	Plasticité standard avec écroûissage isotrope	311
16.7.4	Plasticité non-standard avec écroûissage cinématique	316
17	Rupture et endommagement	321
17.1	Critères de rupture	322
17.1.1	Modes d'endommagement	322
17.1.2	Critères de rupture fragile	323
17.1.3	Critères de rupture ductile	326
17.1.4	Critères de rupture en fatigue	333
17.1.5	Critères de rupture en fluage	343
17.2	Modèles d'endommagement	344
17.2.1	Variables d'endommagement	344
17.2.2	Effets de fermeture	348

17.2.3	Exemples de lois de comportement	352
III	Annexes	371
A	Vecteurs et tenseurs	373
A.1	Position, coordonnées et bases	374
A.1.1	Espace euclidien	374
A.1.2	Coordonnées cartésiennes et curvilignes	374
A.1.3	Changement de base	377
A.1.4	Systèmes de coordonnées particuliers	378
A.2	Algèbre vectorielle et tensorielle	383
A.2.1	Vecteurs	383
A.2.2	Tenseurs	387
A.3	Analyse vectorielle et tensorielle	401
A.3.1	Gradient	401
A.3.2	Divergence	405
A.3.3	Laplacien	407
A.3.4	Rotationnel	408
A.3.5	Éléments différentiels et intégration	409
A.3.6	Théorème de Green-Ostrogradski	413
A.3.7	Théorème de Stokes	414
B	Représentation de Mohr	417
B.1	État de contraintes biaxial	417

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	xiii
B.2 État de contraintes triaxial	421
C Fonctions isotropes	425
C.1 Définition	425
C.2 Evaluation	426
C.3 Dérivation	428
D Notations de Voigt et de Mandel	433
D.1 Notation de Voigt	433
D.2 Notation de Mandel	438

Chapitre 1

Introduction

Ce document constitue une introduction aux concepts fondamentaux permettant de modéliser les milieux continus dans un contexte particulier, celui de la thermomécanique. Il est à destination des chercheurs et enseignants qui, pour aborder des problèmes tels que ceux rencontrés en mise en forme ou en dimensionnement, souhaitent découvrir ou approfondir les notions théoriques essentielles à la mise en place d'une démarche de modélisation¹. Le point de départ de ce document est une formation destinée aux étudiants de troisième cycle de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers sur le sujet des lois de comportement. Ce document a ensuite été enrichi pour aboutir à un exposé de l'ensemble des équations nécessaires à la modélisation des milieux continus. Il peut ainsi être scindé en deux parties :

- La première partie (du Chapitre 2 au Chapitre 11) se concentre sur les concepts nécessaires à l'établissement des équations de conservation, i.e. l'ensemble des équations qui résultent de l'application de principes physiques fondamentaux. Comme l'indique leur nom, ces équations traduisent le fait que certaines quantités (e.g. masse, énergie) doivent être conservées quelle que soit la nature des matériaux qui composent un système.
- La seconde partie (du Chapitre 12 au Chapitre 17) est dédiée à la construction des équations de comportement. Quand bien même certaines

¹Si certains aspects particuliers peuvent être abordés dans le cadre de la formation des ingénieurs, nombreuses sont les notions qui, au regard des prérequis nécessaires, ne peuvent être traitées dans une telle formation sans un fort accompagnement des enseignants.

restrictions existent, le processus d'écriture de ces équations, qui permettent de représenter le comportement des matériaux qui composent un système, se voit accorder plus de liberté que pour les équations de conservation. Le prix de cette liberté est la simplicité. Les équations de comportement doivent en effet être établies en cherchant un compromis entre complexité et acuité de la description, l'un étant souvent l'antagoniste de l'autre. Les outils utiles à la modélisation du comportement, ainsi des exemples de lois de comportement qui illustrent cette recherche de compromis, sont détaillés dans la seconde partie.

Outre les chapitres évoqués ci-dessus, ce document contient quelques annexes que le lecteur, s'il le juge nécessaire ou pertinent, pourra aborder. En particulier, la manipulation des vecteurs et des tenseurs constitue un élément indispensable à l'étude des milieux continus. Si les outils mathématiques associés ne sont pas détaillés dans le corps du document, une brève présentation de ces outils est donnée en Annexe A. Le lecteur qui ne maîtrise pas ces outils peut donc aborder ce document par cette annexe ou s'y référer ponctuellement si besoin.

Certains aspects (pourtant intéressants) ont été volontairement exclus du document². En premier lieu, les méthodes numériques permettant de résoudre les équations de conservation et de comportement ne sont pas abordées. Le lecteur est renvoyé vers les ouvrages spécifiques qui traitent de sujet. Aussi, les techniques expérimentales, en particulier celles permettant d'étudier le comportement des matériaux (e.g. essais mécaniques, analyse calorimétrique), ne sont que peu évoquées dans ce document. Enfin, le choix a été fait de ne pas présenter les développements récents³ concernant les approches non-locales (e.g. approches à gradient, approches intégrales), qui constituent une extension de la démarche de modélisation exposée dans ce qui suit.

²Il n'est pas exclu de traiter ces aspects dans une prochaine version.

³Le terme "récent" est subjectif, certains des développements évoqués ici datent de la fin du XXème siècle.

Partie I

Principes fondamentaux

Chapitre 2

Transformations des milieux continus

La description du comportement d'un milieu continu requiert de pouvoir disposer d'outils permettant de décrire comment, sous l'effet d'une transformation, celui-ci évolue au cours du temps. À cette fin, on présente dans ce chapitre quelques notions élémentaires de cinématique des milieux continus. L'intérêt du gradient de la transformation, qui permet d'étudier localement l'effet d'une transformation, est ensuite discuté. À titre d'exemple, quelques transformations particulières sont décrites en fin de chapitre.

2.1 Cinématique des milieux continus

2.1.1 Milieu continu

La mécanique des milieux continus doit permettre de décrire les transformations subies par la matière au cours d'un processus. Dans ce qui suit, l'ensemble de matière dont on souhaite décrire l'évolution est appelé un système. Le nombre de particules au sein d'un système \mathcal{B} étant généralement très élevé, il est illusoire d'espérer pouvoir décrire l'état individuel de chacune de ces particules. La mécanique des milieux continus s'affranchit de cette difficulté en considérant que la matière est continûment distribuée au sein du système. Le système observé \mathcal{B} est ainsi formé d'une infinité de points

matériels qui voient leurs positions évoluer au cours du temps. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, le point matériel a une nature ambivalente. Au sens géométrique, il s'agit en effet d'un élément de dimension zéro qui ne possède ni longueur, ni surface, ni volume. Les grandeurs qui caractérisent un point matériel \mathcal{P} sont pourtant représentatives du comportement d'un ensemble de particules contenues au sein d'un volume élémentaire fini centré sur la position du point \mathcal{P} (voir Figure 2.1). Le cadre de la mécanique des milieux continus repose donc sur l'hypothèse qu'il est possible de définir un volume élémentaire qui satisfait deux conditions :

- Il doit être suffisamment grand par rapport aux particules pour qu'il soit possible de décrire le comportement du volume élémentaire sans connaître avec précision l'état des particules qu'il contient.
- Il doit être suffisamment petit par rapport au système considéré afin de pouvoir définir des grandeurs de contrainte et de déformation qui soient continues (au moins par morceaux).

L'approche adoptée par la suite est donc prise en défaut dès lors que la taille du système devient trop proche de celles des particules. Il devient alors nécessaire d'utiliser un cadre qui n'est plus celui de la mécanique des milieux continus (e.g. mécanique quantique, mécanique discrète).

2.1.2 Référentiel

La description du mouvement d'un objet nécessite de pouvoir définir à chaque instant la position occupée par l'ensemble des points matériels qui le constituent. Il est toutefois impossible de préciser la position d'un point matériel à un certain instant sans avoir préalablement choisi un référentiel. Un référentiel \mathbf{R} est constitué d'une chronologie, qui place les événements sur une échelle de temps, et d'un groupe d'objets, qui sont choisis pour former un trièdre rigide depuis lequel le mouvement du corps est observé (e.g. un groupe d'étoiles). On peut ainsi assimiler un référentiel à un observateur qui, muni d'une horloge, prend des photographies instantanées du système \mathcal{B} et y associe l'instant t correspondant. Les référentiels pour lesquels la première loi de Newton est satisfaite sont dits galiléens; la vitesse d'un point matériel libre de toute force y est constante aussi bien en direction qu'en norme.

Comme le montre la Figure 2.2, le référentiel \mathbf{R} permet d'associer à chaque

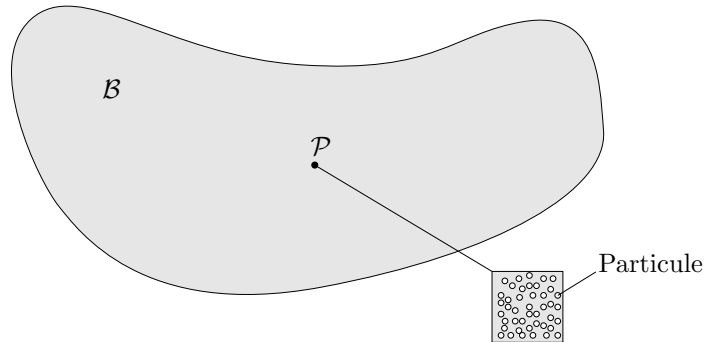


Figure 2.1: Représentation schématique d'un point matériel au sein d'un système. Le point matériel \mathcal{P} est représentatif de l'état macroscopique d'un volume élémentaire qui contient un grand nombre de particules bien qu'ayant une taille qui soit largement inférieure à la dimension caractéristique du système \mathcal{B} .

événement physique une position \boldsymbol{x} et un instant t . En mécanique classique, l'espace-temps à quatre dimensions qui contient la totalité des événements est assimilable à un produit cartésien $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ où le temps t est localisé sur l'axe des réels \mathbb{R} tandis que l'espace physique, sur lequel est définie la position \boldsymbol{x} , est un espace euclidien \mathbb{E} .

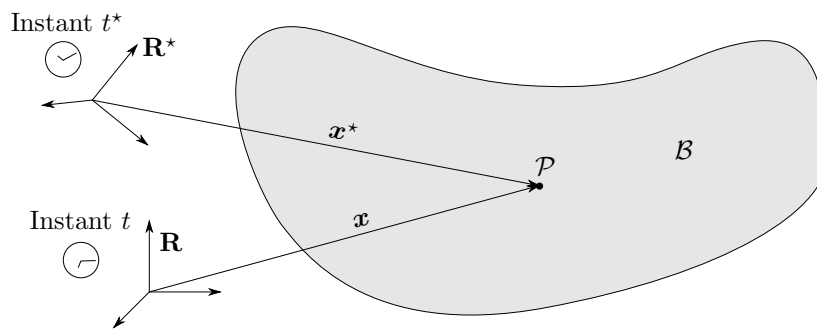


Figure 2.2: La position d'un point matériel \mathcal{P} du système \mathcal{B} dépend du référentiel choisi. Elle est égale à \boldsymbol{x} dans le référentiel \mathbf{R} et à \boldsymbol{x}^* dans le référentiel \mathbf{R}^* .

Lors d'un changement de référentiel (de \mathbf{R} à \mathbf{R}^*), l'image d'un évènement physique (\mathbf{x}, t) vu dans le référentiel \mathbf{R} est donnée par (\mathbf{x}^*, t^*) dans le nouveau référentiel \mathbf{R}^* . Pour que les distances et les intervalles de temps soient identiques dans chaque référentiel, les évènements (\mathbf{x}, t) et (\mathbf{x}^*, t^*) doivent être reliés par :

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}(t) \quad (2.1)$$

$$t^* = t + a \quad (2.2)$$

où \mathbf{c} , \mathbf{Q} et a représentent respectivement la translation, la rotation et la différence de temps relatives de \mathbf{R}^* par rapport à \mathbf{R} . Les grandeurs \mathbf{c} et \mathbf{Q} sont des fonctions continues du temps. Le tenseur \mathbf{Q} est orthogonal direct ($\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^t$ et $\det(\mathbf{Q}) = 1$). Le nombre réel a est indépendant du temps.

2.1.3 Configurations

Le terme de configuration désigne l'état des points matériels qui composent un système. Dans ce qui suit, la configuration actuelle (i.e. à l'instant courant t) d'un système \mathcal{B} est notée κ_t . Comme l'illustre la Figure 2.3, la connaissance de la configuration permet d'associer à chaque point \mathcal{P} du système sa position actuelle \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \kappa_t(\mathcal{P}) \quad (2.3)$$

Les positions qu'occupent les points matériels du système \mathcal{B} dans la configuration actuelle définissent un volume \mathcal{V} dont la frontière externe correspond à une surface \mathcal{S} .

Afin de décrire les éventuelles transformations du système, il est commode de considérer un instant t_0 particulier qu'on associe à l'état initial du système \mathcal{B} . La configuration qui correspond à cet instant initial t_0 est notée κ_0 . Dans la configuration initiale κ_0 , la position occupée par un point matériel \mathcal{P} dans le référentiel \mathbf{R} est donnée par le vecteur position \mathbf{X} , de sorte que :

$$\mathbf{X} = \kappa_0(\mathcal{P}) \quad (2.4)$$

Par analogie avec la configuration actuelle, le domaine occupé par les points matériels au sein de la configuration initiale κ_0 est désigné par \mathcal{V}_0 . La frontière extérieure de ce domaine est représentée par la surface \mathcal{S}_0 .

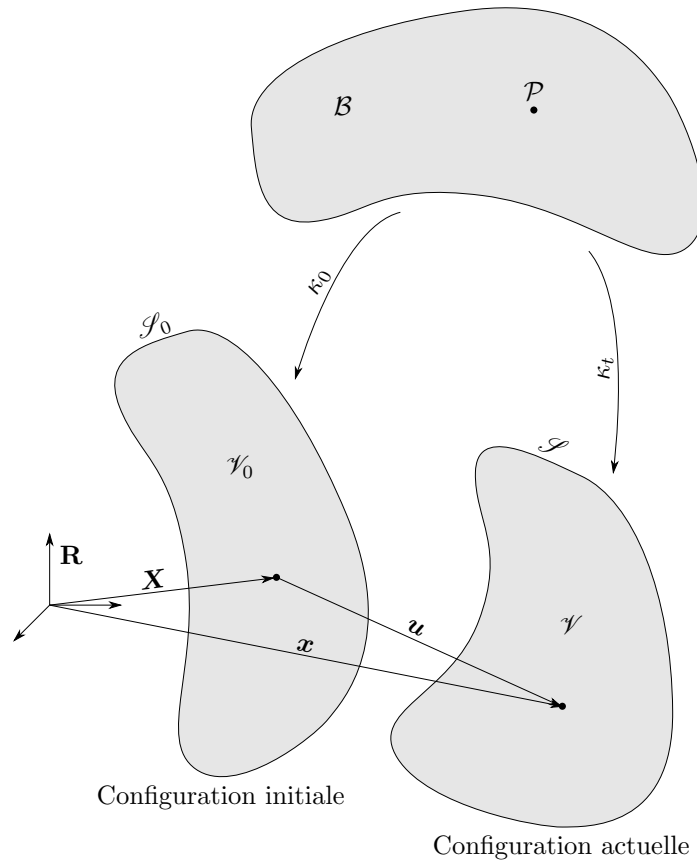


Figure 2.3: Évolution de la position d'un point matériel \mathcal{P} entre la configuration initiale κ_0 et la configuration actuelle κ_t . Le déplacement \mathbf{u} du point \mathcal{P} est donné par la différence entre les positions initiale \mathbf{X} et actuelle \mathbf{x} .

2.1.4 Transformation

La distinction entre configurations actuelle et initiale permet de décrire le mouvement du système \mathcal{B} par une transformation χ qui donne à chaque instant t la position \mathbf{x} d'un point matériel dans la configuration actuelle en fonction de la position \mathbf{X} qu'il occupait dans la configuration initiale. On peut donc écrire :

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.5)$$

La transformation χ décrit le mouvement de chacun des points matériels qui composent le système. Pour ce faire, elle utilise leur position initiale pour les repérer. Les composantes X_1 , X_2 et X_3 de la position initiale \mathbf{X} d'un point matériel sont ainsi qualifiées de coordonnées matérielles. Par opposition, on appelle coordonnées spatiales les composantes x_1 , x_2 et x_3 de la position actuelle \mathbf{x} d'un point matériel.

La transformation χ est une application bijective. À chaque position de la configuration actuelle κ_t est associée une et une seule position dans la configuration initiale κ_0 . Il existe donc une application inverse χ^{-1} également bijective telle que :

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

Les conditions de bijectivité traduisent le fait qu'aucun point matériel ne peut apparaître, disparaître, occuper plusieurs positions simultanément ou partager une même position avec un autre point matériel. Aussi, on requiert que les applications χ et χ^{-1} dépendent continûment du temps t et des variables de position \mathbf{X} ou \mathbf{x} . Elles doivent également être dérivable par rapport au temps t ainsi qu'aux variables de positions \mathbf{X} ou \mathbf{x} , ce qui garantit que la matière est continûment distribuée au sein de \mathcal{B} ¹.

2.1.5 Descriptions lagrangienne et eulérienne

La description d'un système nécessite de se doter d'un ensemble de variables (e.g. température, pression) qui définissent l'état de chaque point matériel. Pour ce faire, deux descriptions sont communément utilisées. Dans le cadre d'une description lagrangienne, on utilise la position initiale \mathbf{X} et le temps t pour exprimer les grandeurs physiques nécessaires à la description du système \mathcal{B} . La description lagrangienne est particulièrement adaptée au cas des matériaux solides puisqu'elle permet de suivre un point matériel M à partir de l'information de sa position initiale \mathbf{X} .

Pour une description eulérienne, les différentes grandeurs physiques choisies pour décrire l'évolution du système \mathcal{B} sont exprimées en fonction de la position actuelle \mathbf{x} et du temps t . La description eulérienne est naturelle pour l'étude des fluides; on décrit les transformations en chaque position \mathbf{x} du domaine \mathcal{V} sans chercher à savoir quel point matériel s'y trouve.

¹Pour traiter d'éventuelles singularités (e.g. interfaces), on peut demander à la fonction χ de n'être dérivable que par morceaux.

Pour une grandeur physique a , les descriptions lagrangienne et eulérienne sont liées l'une à l'autre par la transformation χ au sens où² :

$$a(\mathbf{x}, t) = a(\chi(\mathbf{X}, t), t) = a(\mathbf{X}, t) = a(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.7)$$

Le calcul de la vitesse d'évolution d'une grandeur qui dépend d'une variable de position nécessite de prendre quelques précautions. Lors d'une opération de dérivation par rapport au temps, il est notamment nécessaire de se poser la question de travailler avec une position initiale \mathbf{X} fixe ou une position actuelle \mathbf{x} fixe. Dans le premier cas, on caractérise la vitesse d'évolution d'une grandeur caractéristique de l'état d'un point matériel \mathcal{P} qui occupait initialement une position \mathbf{X} . Dans le second cas, on cherche à connaître la vitesse d'évolution d'une grandeur physique en une position de l'espace physique, sans se préoccuper de savoir quel point matériel s'y trouve. On est ainsi amené à distinguer deux modes de dérivation par rapport au temps. La dérivée temporelle matérielle (à position initiale \mathbf{X} fixée) d'une grandeur a est notée \dot{a} ou da/dt . Par opposition, la dérivée temporelle spatiale de la grandeur a (à position actuelle \mathbf{x} fixée) d'une grandeur a est notée $\partial a/\partial t$.

Même lorsque la description eulérienne est utilisée, il est possible de suivre l'évolution d'une quantité a pour un point matériel en utilisant la dérivée particulière :

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} \quad (2.8)$$

$$= \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \quad (2.9)$$

$$= \frac{\partial a}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{x}} a) \cdot \mathbf{v} \quad (2.10)$$

où \mathbf{v} désigne la vitesse d'un point matériel qui occupe la position \mathbf{x} à l'instant t (voir paragraphe suivant). La relation précédente fait apparaître un terme convectif qui permet d'exprimer la dérivée temporelle matérielle d'une grandeur physique en fonction sa dérivée temporelle spatiale.

²Cette écriture, bien que couramment utilisée en mécanique des milieux continus, est abusive au sens où $a(\mathbf{x}, t)$ et $a(\mathbf{X}, t)$ sont deux fonctions différentes. Elle est néanmoins utilisée dans un souci de concision.

2.1.6 Déplacement, vitesse et accélération

La transformation χ permet de déterminer différentes grandeurs cinématiques utiles à la description du système \mathcal{B} . Le déplacement \mathbf{u} s'exprime simplement à partir de la différence entre les positions occupées par un point matériel dans les configurations actuelle κ_t et initiale κ_0 :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.11)$$

Le vecteur vitesse \mathbf{v} d'un point matériel est donné par la dérivée première de la transformation par rapport au temps (en fixant la position initiale \mathbf{X}) :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

Le vecteur accélération $\boldsymbol{\gamma}$ d'un point matériel est obtenu à partir de la dérivée seconde de la transformation, soit :

$$\boldsymbol{\gamma} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (2.14)$$

Cette dernière relation exploite la dérivée particulière (2.10).

2.2 Gradient de la transformation

2.2.1 Définition

Afin de pouvoir construire des quantités représentatives de l'état de déformation local, il est nécessaire d'observer comment une transformation χ affecte le voisinage d'un point matériel \mathcal{P} dont les positions initiale et actuelle sont données respectivement par \mathbf{X} et \mathbf{x} . À cette fin, on considère un second point matériel \mathcal{P}' situé au voisinage immédiat de \mathcal{P} . La position de \mathcal{P}' dans la configuration initiale est $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$, où $d\mathbf{X}$ représente une infinitésimale variation de position. Dans la configuration actuelle, le point matériel \mathcal{P}' occupe une position $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ telle que :

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \quad (2.15)$$

$$= \chi(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.16)$$

$$= \mathbf{x} + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.17)$$

Le tenseur d'ordre deux $\mathbf{F} = \partial\boldsymbol{\chi}/\partial\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}$ est appelé gradient de la transformation. Il caractérise l'effet de la transformation sur le voisinage immédiat d'un point matériel dont la position dans la configuration initiale est donnée par \mathbf{X} . Le déterminant du gradient est strictement positif (voir 2.2.2), le tenseur \mathbf{F} est donc inversible.

À l'instant initial t_0 , la position occupée par un point matériel est $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X}$. On en déduit que, pour n'importe quelle position \mathbf{X} , le gradient de la transformation \mathbf{F} doit satisfaire la condition :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{1} \quad (2.18)$$

Aussi, à partir de la définition du champ de déplacement (2.11), il est possible d'exprimer le gradient de la transformation \mathbf{F} en fonction du gradient matériel du champ de déplacement $\mathbf{H} = \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}$ comme suit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{H} \quad (2.19)$$

De manière semblable, on déduit de l'égalité (2.11) que :

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{h} \quad (2.20)$$

où $\mathbf{h} = \partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x} = \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}$ est le gradient spatial du champ de déplacement.

2.2.2 Relations de transport

La relation (2.17) indique que, sous l'effet de la transformation $\boldsymbol{\chi}$, un élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{X}$ passant initialement par \mathbf{X} évolue en un élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{x}$ passant par $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ dans la configuration actuelle (voir Figure 2.4a) :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.21)$$

Le tenseur \mathbf{F} met donc en relation des grandeurs physiques associées à des configurations différentes. L'élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{X}$ est associé à la configuration initiale tandis que l'élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{x}$ appartient à la configuration actuelle.

Dans la configuration initiale κ_0 , un élément de surface orientée infinitésimal $d\mathbf{S}$ est défini à partir de deux éléments de ligne infinitésimaux $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{Y}$ par la relation :

$$d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS = d\mathbf{X} \times d\mathbf{Y} \quad (2.22)$$

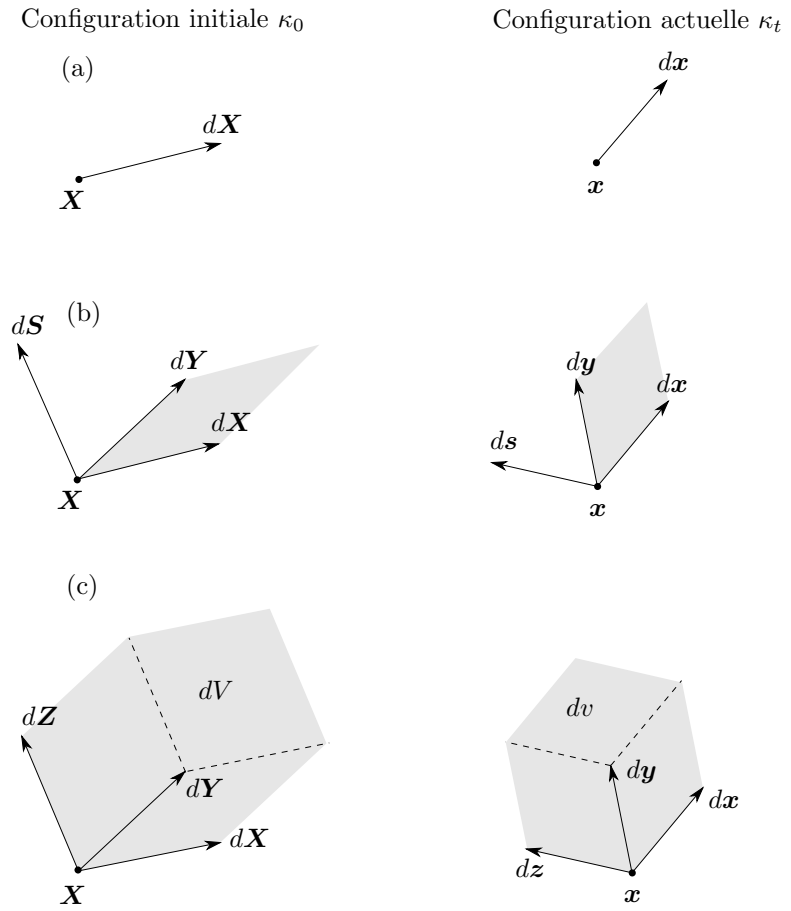


Figure 2.4: Transport d'un élément infinitésimal de ligne (a), de surface (b) ou de volume (c).

où \mathbf{N} représente un vecteur unitaire qui est normal à l'élément de surface et dS est égal à $\|d\mathbf{S}\|$. L'utilisation de l'égalité précédente permet d'obtenir la relation entre un élément de surface infinitésimal $d\mathbf{S}$ dans la configuration initiale et son équivalent $d\mathbf{s}$ dans la configuration actuelle (voir Figure 2.4b) :

$$d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds \quad (2.23)$$

$$= d\mathbf{x} \times d\mathbf{y} \quad (2.24)$$

$$= (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \times (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{Y}) \quad (2.25)$$

$$= J \mathbf{F}^{-t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.26)$$

$$= J \mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{N} dS \quad (2.27)$$

où $J = \det(\mathbf{F})$ est le jacobien de la transformation χ . La relation (2.26) qui décrit le transport d'un élément de surface est connue sous le nom de relation de Nanson.

Un élément de volume infinitésimal dV du domaine \mathcal{V}_0 est défini à partir de trois éléments de lignes $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{Y}$ et $d\mathbf{Z}$ par :

$$dV = (d\mathbf{X} \times d\mathbf{Y}) \cdot d\mathbf{Z} \quad (2.28)$$

Le gradient de la transformation \mathbf{F} permet de déterminer comment l'élément de volume dV devient, sous l'action de la transformation χ , un élément de volume infinitésimal dv dans la configuration actuelle (voir Figure 2.4c). La relation précédente conduit en effet à :

$$dv = (d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{z} \quad (2.29)$$

$$= ((\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \times (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{Y})) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{Z}) \quad (2.30)$$

$$= \det(\mathbf{F}) dV = J dV \quad (2.31)$$

La relation précédente indique que la variation de volume relative d'un point matériel est caractérisée à partir du jacobien de la transformation³. Puisqu'un élément de volume ne peut pas disparaître suite à une transformation, le jacobien de la transformation J doit vérifier :

$$J = \det(\mathbf{F}) > 0 \quad (2.32)$$

Les relations de transport (2.21), (2.26) et (2.31) jouent un rôle essentiel en mécanique des milieux continus. Elles permettent en effet de déterminer, pour chaque point matériel, les transformations subies entre les instants t_0 et t par des éléments de ligne, de surface ou de volume infinitésimaux.

³Le cas particulier d'une transformation isochore correspond à $J = 1$.

2.2.3 Compatibilité du gradient de la transformation

Le gradient de la transformation \mathbf{F} est un champ tensoriel qualifié de compatible s'il est engendré par un champ de déplacement \mathbf{u} continu. Comme le montre la Figure 2.5, lorsque le gradient de la transformation n'est pas compatible, des éléments de volume sont susceptibles de se chevaucher ou de se dissocier. Pour discuter des conditions que doit satisfaire le gradient de la transformation lorsqu'il est compatible, il convient de distinguer les points réguliers des points singuliers. Un point matériel est qualifié de régulier si la transformation χ est dérivable par rapport à la variable de position initiale. Par opposition, un système est susceptible de contenir des surfaces singulières. Ces surfaces peuvent par exemple correspondre à des interfaces séparant différents constituants (e.g. matrice et renfort dans un matériau composite, phases métallurgiques dans un alliage) d'une microstructure ou différents matériaux d'une structure. Les points matériels qui forment ces surfaces particulières sont alors qualifiés de singulier.

Comme le montre la Figure 2.6, les points singuliers forment une surface \mathcal{Z}_0 (respectivement \mathcal{Z}) dans la configuration initiale (respectivement actuelle). Aussi, au cours d'une transformation, la surface singulière est susceptible de se déplacer. La vitesse normale de déplacement de la surface singulière est notée Z quand elle est associée à la configuration initiale ou ζ si elle est associée à la configuration actuelle.

Pour les points matériels qui appartiennent à une surface singulière, une grandeur physique a (e.g. énergie, masse) peut subir un saut au sens où elle prend des valeurs différentes notées a^+ et a^- de part et d'autre de la surface singulière :

$$a^+(\mathbf{X}, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} a(\mathbf{X} + \delta \mathbf{M}, t) \quad (2.33)$$

$$a^-(\mathbf{X}, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} a(\mathbf{X} - \delta \mathbf{M}, t) \quad (2.34)$$

où \mathbf{M} désigne la normale unitaire à la surface singulière dans la configuration actuelle. Dans la suite, le saut d'une grandeur physique telle que a est défini par :

$$[a(\mathbf{X}, t)] = a^+(\mathbf{X}, t) - a^-(\mathbf{X}, t) \quad (2.35)$$

Aussi, dans un souci de concision, on utilise parfois utile la notation suivante :

$$\langle a(\mathbf{X}, t) \rangle = \frac{1}{2} (a^+(\mathbf{X}, t) + a^-(\mathbf{X}, t)) \quad (2.36)$$

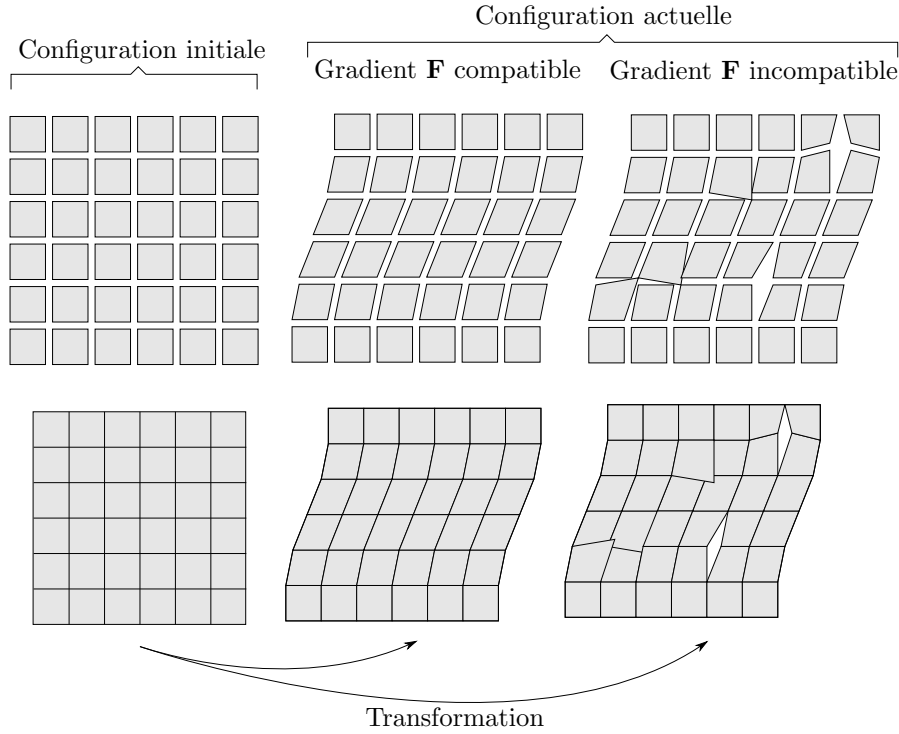


Figure 2.5: Représentation schématique de l'effet d'un gradient de transformation compatible (gauche) ou incompatible (droite). Lorsque le gradient de la transformation n'est pas compatible, l'assemblage des éléments de volume obtenus par transformation de la grille initiale ne permet pas d'obtenir un milieu continu.

Points réguliers Pour un point régulier, pour lequel la transformation χ est au moins deux fois dérivable, la condition nécessaire et suffisante pour la compatibilité de \mathbf{F} s'écrit :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (2.37)$$

La condition précédente, lorsqu'elle est vérifiée, assure que le gradient de la transformation \mathbf{F} préserve la continuité au sein du système étudié.

Démonstration La condition de compatibilité pour le gradient de la transformation s'obtient en remarquant que le gradient de la transformation \mathbf{F} dérive d'un champ vectoriel (i.e. le champ de position

\boldsymbol{x}). Le rotationnel du gradient de la transformation est donc un champ tensoriel (de rang deux) qui, en chaque point régulier, s'annule.

Points singuliers Pour les points matériels qui appartiennent à une surface singulière, le gradient de la transformation est compatible si le saut $[\mathbf{F}] = \mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-$ satisfait la condition suivante :

$$[\mathbf{F}] = \boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{M}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{L}_0 \quad (2.38)$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est un vecteur définissant l'amplitude du saut du gradient de la transformation. Aussi, lorsque la transformation est une fonction continue de la variable de position initiale, le saut du vecteur vitesse $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$ est tel que :

$$[\mathbf{v}] = -Z \boldsymbol{\beta}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{L}_0 \quad (2.39)$$

L'utilisation de la relation de transport (2.26) permet d'écrire que la normale unitaire \mathbf{m} en un point de la surface singulière dans la configuration actuelle

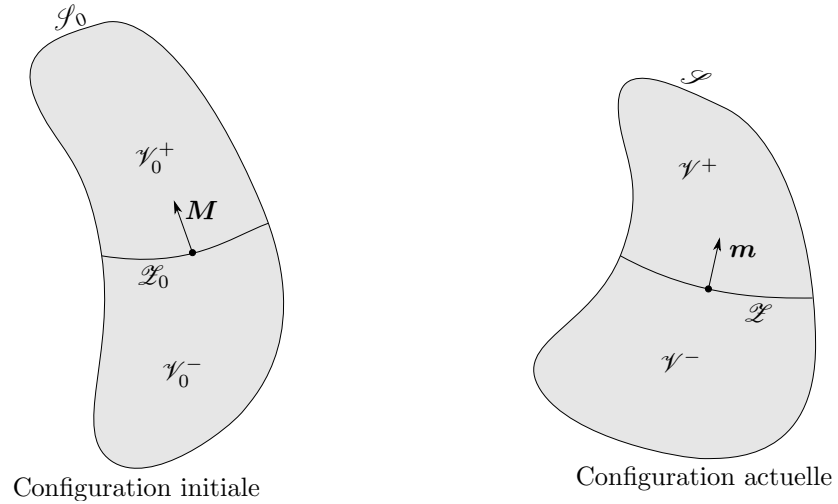


Figure 2.6: Représentation schématique d'un système comportant une surface singulière notée \mathcal{L}_0 (respectivement \mathcal{L}) dans la configuration initiale (respectivement actuelle).

est donnée par :

$$\mathbf{m} = \frac{(\mathbf{F}^+)^{-t} \cdot \mathbf{M}}{\|(\mathbf{F}^+)^{-t} \cdot \mathbf{M}\|} = \frac{(\mathbf{F}^-)^{-t} \cdot \mathbf{M}}{\|(\mathbf{F}^-)^{-t} \cdot \mathbf{M}\|} \quad (2.40)$$

Puisque la normale est identique de part et d'autre de la surface singulière, on en déduit que :

$$[\mathbf{F}^{-t}] \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

Aussi, la vitesse normale de déplacement de la surface singulière dans la configuration actuelle ζ est reliée à son homologue de la configuration initiale Z par :

$$\zeta = Z \|(\mathbf{F}^+)^t \cdot \mathbf{m}\| + \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}^+ = Z \|(\mathbf{F}^-)^t \cdot \mathbf{m}\| + \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}^- \quad (2.42)$$

La relation précédente indique que la vitesse normale de déplacement de la surface singulière dans la configuration actuelle ζ est la résultante de deux effets. Spécifiquement, la surface singulière peut se déplacer *via* le transfert de points matériels d'un constituant vers un autre (e.g. lors d'une transformation de phases) ainsi que par l'écoulement de matière.

2.2.4 Décomposition polaire

Au cours d'une transformation, un système peut se mouvoir sans nécessairement se déformer. Par exemple, dans le cas d'une rotation ou d'une translation homogène, le système est transformé tout en restant indéformé⁴. Si le gradient de la transformation est insensible à une contribution de translation, il ne permet en revanche pas en l'état actuel de distinguer les rotations des déformations. La décomposition polaire du gradient de la transformation permet justement de séparer les contributions de rotation et de déformation. Elle consiste à décomposer le gradient de la transformation sous la forme de l'un ou l'autre des deux produits suivants :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2.43)$$

$$= \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.44)$$

où \mathbf{R} est un tenseur orthogonal direct qui représente la contribution d'une rotation au gradient de la transformation tandis que \mathbf{U} et \mathbf{V} représentent

⁴Une telle transformation, abordée au paragraphe Figure 2.2.5, correspond à un mouvement de corps rigide.

les contributions d'une dilatation. La propriété d'orthogonalité de \mathbf{R} (i.e. $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1}$) permet de déterminer de manière unique les tenseurs \mathbf{R} , \mathbf{U} et \mathbf{V} à partir du gradient de la transformation \mathbf{F} :

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (2.47)$$

Les tenseurs de dilatation \mathbf{U} et \mathbf{V} ont des valeurs propres identiques mais des directions propres différentes. Par construction, ils sont symétriques et définis positifs.

Remarque Une alternative à la décomposition polaire du gradient de la transformation consiste à écrire ce dernier comme le produit d'un tenseur orthogonal \mathbf{Q} (avec $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$) et d'un tenseur triangulaire supérieur \mathbf{Z} de sorte que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z}$$

Comme discuté par [Srinivasa \(2012\)](#), cette décomposition est plus simple à réaliser que la décomposition polaire car elle ne requiert pas l'évaluation des valeurs propres et des directions propres des tenseurs de Cauchy-Green. En particulier, les différentes composantes du tenseur \mathbf{Z} s'obtiennent par :

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} \sqrt{C_{11}} & C_{12}/Z_{11} & C_{13}/Z_{11} \\ 0 & \sqrt{C_{22} - Z_{12}^2} & (C_{23} - Z_{12}Z_{13})/Z_{22} \\ 0 & 0 & \sqrt{C_{33} - Z_{13}^2 - Z_{23}^2} \end{bmatrix}$$

Ce tenseur peut ensuite être utilisé pour construire des mesures de l'état de déformation d'un point matériel.

Aussi, les tenseurs de dilatation \mathbf{U} et \mathbf{V} , bien qu'ils fournissent tous les deux une information sur l'état de déformation au voisinage d'un point matériel, ont des significations différentes (voir Figure 2.7). Dans un cas, il faut imaginer une séquence où chaque point matériel est dilaté par \mathbf{U} avant d'être tourné par \mathbf{R} pour arriver à la configuration actuelle. Dans l'autre cas, la séquence consiste à appliquer à chaque élément de volume d'abord une rotation \mathbf{R} puis une dilatation \mathbf{V} .

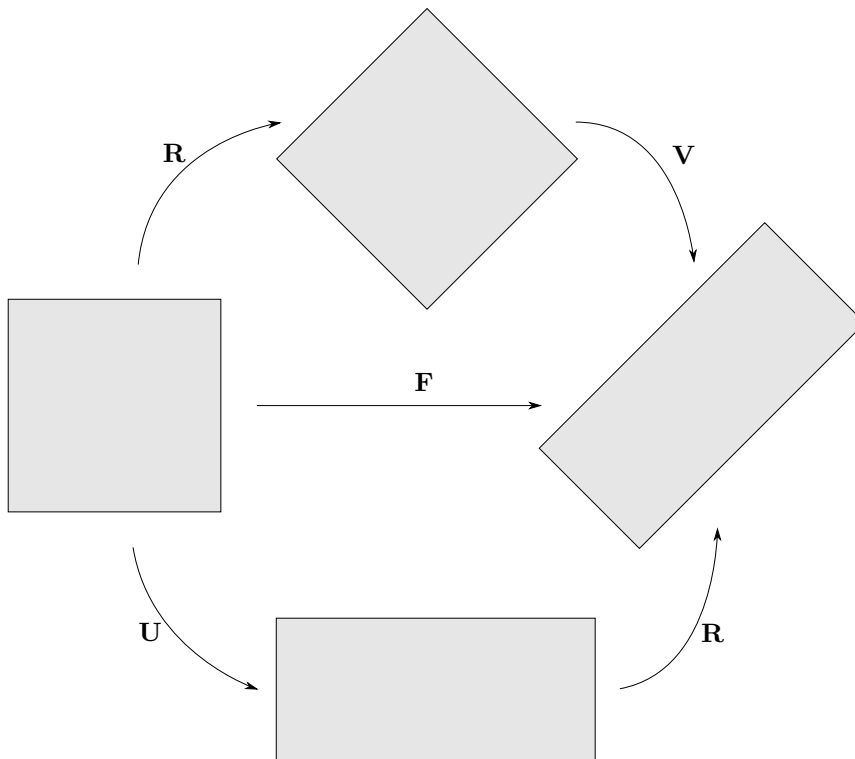


Figure 2.7: Décomposition polaire du gradient de la transformation \mathbf{F} en rotation \mathbf{R} et en dilatation \mathbf{U} ou \mathbf{V} .

2.2.5 Transformations homogènes particulières

Il existe une classe particulière de transformations dites homogènes pour lesquelles le gradient de la transformation \mathbf{F} ne dépend que du temps t . Par intégration de la relation (2.21), on en déduit que, pour une transformation homogène, l'application χ prend une forme affine :

$$\chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{a}(t) \quad (2.48)$$

où \mathbf{a} est une translation. Comme le montre la Figure 2.8, une transformation homogène correspond au cas particulier où le voisinage de chaque point matériel est affecté de manière identique par la transformation. À titre illustratif, on décrit dans ce qui suit quelques transformations homogènes particulières.

Mouvement de corps rigide Un système subit un mouvement corps rigide (voir Figure 2.8) si, pour n'importe quel couple de points matériels, la distance qui les sépare est préservée lors d'une transformation. Cela correspond au cas où le système étudié n'est pas déformé par la transformation considérée. Pour deux points matériels \mathcal{M} et \mathcal{N} , dont les positions au sein des configurations initiale et actuelle sont données respectivement par \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{x} et \mathbf{y} , la distance entre \mathcal{M} et \mathcal{N} est conservée si :

$$(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.49)$$

$$= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}) \quad (2.50)$$

$$= (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (2.51)$$

On en déduit que, pour qu'il y ait un mouvement de corps rigide, le gradient de la transformation \mathbf{F} doit vérifier :

$$\mathbf{F}^t(t) \cdot \mathbf{F}(t) = \mathbf{1} \quad (2.52)$$

L'égalité précédente est systématiquement satisfaite dès lors que le gradient de la transformation \mathbf{F} est égal à un tenseur orthogonal \mathbf{R} :

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^{-t}(t) \quad (2.53)$$

Ainsi, tout mouvement de corps rigide est décrit par une transformation homogène χ qui prend la forme :

$$\chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{a}(t) \quad (2.54)$$

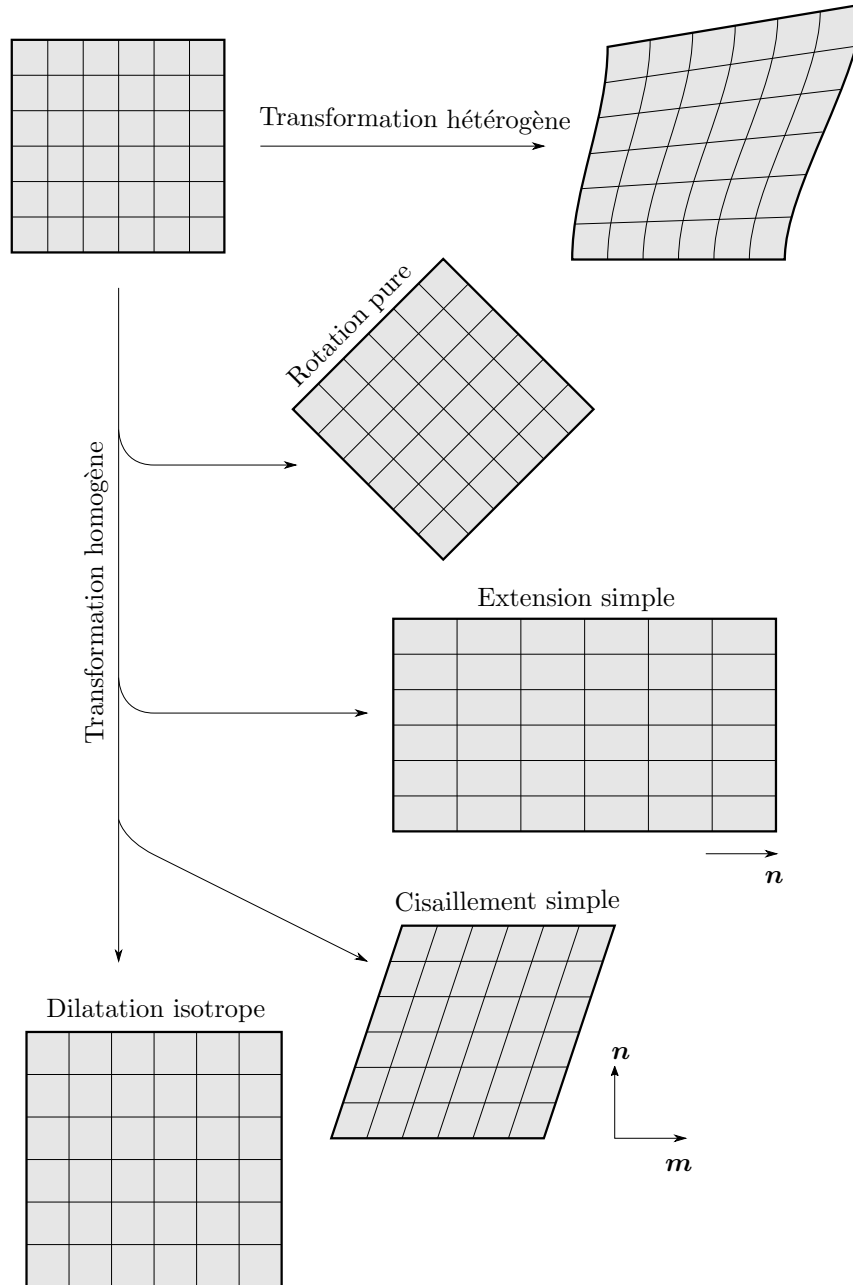


Figure 2.8: Représentation schématique de quelques transformations particulières. Une grille régulière est représentée sur la configuration initiale, elle est éventuellement déformée sous l'effet d'une transformation.

Extension simple La transformation homogène correspond à une extension simple (voir Figure 2.8) s'il est possible d'identifier un vecteur unitaire \mathbf{n} qui permet d'exprimer le gradient de la transformation \mathbf{F} comme suit :

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{1} + \epsilon(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (2.55)$$

où le paramètre ϵ représente l'amplitude de l'extension. Dans le cas de l'extension simple, les lignes parallèles à \mathbf{n} voient leur longueur augmenter d'un facteur $1 + \epsilon$ tandis que la longueur des lignes orthogonales à \mathbf{n} reste inchangée. La variation relative de volume J , donnée par le déterminant de \mathbf{F} , est égale à :

$$J(t) = \det(\mathbf{F}(t)) = 1 + \epsilon(t) \quad (2.56)$$

Cisaillement simple Le cisaillement simple (voir Figure 2.8) est une transformation homogène pour laquelle le gradient de la transformation \mathbf{F} s'exprime à partir d'un couple de directions \mathbf{m} et \mathbf{n} qui sont mutuellement orthogonales :

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{1} + \gamma(t) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \quad (2.57)$$

où le paramètre γ représente l'amplitude du cisaillement. Le cisaillement simple correspond à un déplacement des plans de normale \mathbf{n} dans la direction définie par \mathbf{m} . Le cisaillement simple est une transformation isochore puisque le jacobien de la transformation J est donné par :

$$J(t) = \det(\mathbf{F}(t)) = 1 \quad (2.58)$$

Dilatation isotrope La dilatation isotrope (voir Figure 2.8) est une transformation homogène à laquelle on associe la forme suivante du gradient de la transformation \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}(t) = (1 + \delta(t)) \mathbf{1} \quad (2.59)$$

où le paramètre δ représente l'amplitude de la dilatation. Dans le cas de la dilatation isotrope, le gradient de la transformation est un tenseur isotrope dont le déterminant, qui caractérise la variation de volume, est donné par :

$$J(t) = \det(\mathbf{F}(t)) = (1 + \delta(t))^3 \quad (2.60)$$

Chapitre 3

Déformations et taux de déformation

Afin de décrire l'évolution d'un système au cours d'une transformation, il est nécessaire de pouvoir disposer de grandeurs permettant de déterminer l'état de déformation au voisinage de chaque point matériel. Dans la première partie de ce chapitre, on s'appuie sur le gradient de la transformation, introduit au Chapitre 2, pour proposer différentes mesures tensorielles de l'état de déformation. Aussi, pour certains matériaux qui présentent une forme de viscosité, le comportement dépend également de la vitesse à laquelle les déformations changent. Les mesures tensorielles de taux de déformation, utiles à la description des comportements visqueux, sont présentées dans la seconde partie.

3.1 Déformations

Une mesure de déformation est une grandeur tensorielle qui permet de décrire comment le voisinage d'un point matériel voit sa forme changer lors d'une transformation. S'il existe différentes mesures de déformation, elles ont toutes en commun le fait de ne pas posséder de dimension, d'être nulles lorsque le gradient de la transformation n'implique qu'une rotation (i.e. $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ et $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{1}$) et d'être représentées à partir de tenseurs du second ordre symétriques.

3.1.1 Mesures lagrangiennes de l'état de déformation

Tenseur de Cauchy-Green droit Afin de déterminer l'état de déformation local autour d'un point matériel, il est nécessaire d'observer si les longueurs ou les angles ont été modifiés sous l'action d'une transformation. Pour ce faire, on observe un point matériel pour lequel deux éléments de ligne infinitésimaux $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{Y}$ évoluent en $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$ sous l'action d'une transformation (voir Figure 3.1). Le gradient de la transformation \mathbf{F} permet de calculer les variations d'angle ou de longueur :

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{Y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} \quad (3.1)$$

$$= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot d\mathbf{Y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} \quad (3.2)$$

$$= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{Y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} \quad (3.3)$$

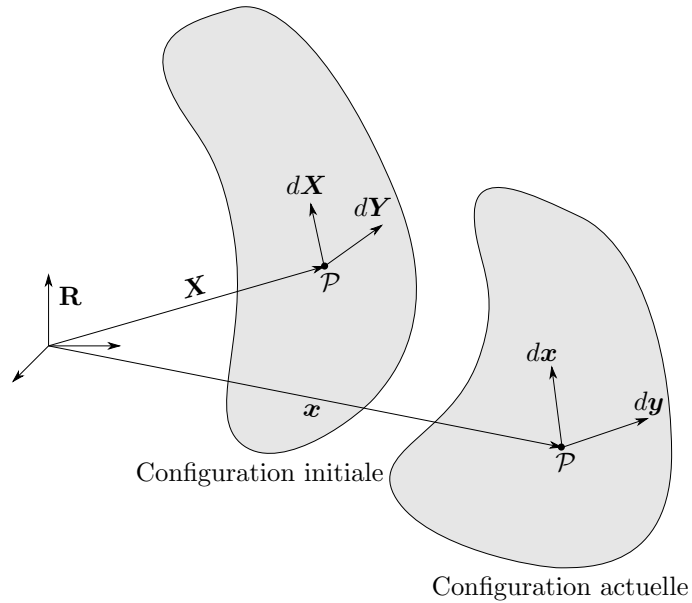


Figure 3.1: Transport de deux éléments de lignes infinitésimales passant par la position occupée par un point matériel P depuis la configuration initiale vers la configuration actuelle.

Le tenseur symétrique du second ordre $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$ est appelé tenseur de Cauchy-Green droit. Il s'agit d'une grandeur importante en cela qu'elle

permet de déterminer si un élément de ligne infinitésimal voit sa longueur changer (en prenant $d\mathbf{X} = d\mathbf{Y}$) ou si l'angle séparant deux éléments de ligne évolue (en prenant $d\mathbf{X} \neq d\mathbf{Y}$). Le tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} est formé en prenant comme référence la configuration initiale. La définition (3.3) ne fait en effet intervenir que des éléments de ligne infinitésimaux qui sont définis sur la configuration initiale. Le tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} ne constitue toutefois pas une mesure de déformation car il ne s'annule pas en l'absence de déformation.

Tenseurs des déformations de Green-Lagrange, Biot et Hencky Il est néanmoins possible de construire une infinité de mesures de l'état de déformation à partir du tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} . En particulier, il existe une famille de mesures de déformation dite de Seth-Hill (Seth, 1962; Hill, 1968), qui repose sur la définition suivante :

$$\mathbf{E}_{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{C}^{m/2} - \mathbf{1}) = \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{1}) & \text{si } m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \ln(\mathbf{C}) = \ln(\mathbf{U}) & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où m est un nombre réel.

Dans la pratique, on utilise régulièrement le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E}_g , qui correspond au cas particulier $m = 2$, soit :

$$\mathbf{E}_g = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (3.6)$$

Une autre mesure lagrangienne couramment utilisée est le tenseur des déformations de Biot \mathbf{E}_b , qui s'obtient également à partir du tenseur de Cauchy-Green droit. Le tenseur des déformations de Biot correspond au cas particulier où m est égal à l'unité. Le tenseur des déformations de Biot est donc évalué comme suit :

$$\mathbf{E}_b = \sqrt{\mathbf{C}} - \mathbf{1} = \mathbf{U} - \mathbf{1} \quad (3.7)$$

$$= \sqrt{\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}} - \mathbf{1} \quad (3.8)$$

Enfin, lorsque m est nul, on peut construire une mesure de l'état de

déformation nommée tenseur des déformations de Hencky¹. Cette mesure de l'état de déformation, représentée par le tenseur \mathbf{E}_t , s'obtient à partir des relations suivantes :

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{C}) = \ln(\mathbf{U}) \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}) \quad (3.10)$$

Remarque Les tenseurs de déformation de Green-Lagrange, Biot et Hencky possèdent des directions propres qui sont identiques à celles du tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} (donc du tenseur de dilatation \mathbf{U}). Cette propriété est souvent utilisée pour le calcul des tenseurs des déformations de Biot ou de Hencky :

$$\mathbf{E}_b = \sum_{\alpha} \left(\sqrt{C_{\alpha}} - 1 \right) \mathbf{c}_{\alpha} \otimes \mathbf{c}_{\alpha}$$

$$\mathbf{E}_t = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \ln(C_{\alpha}) \mathbf{c}_{\alpha} \otimes \mathbf{c}_{\alpha}$$

où C_1 , C_2 et C_3 sont les valeurs propres du tenseur de Cauchy-Green droit et \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 et \mathbf{c}_3 les vecteurs propres de ce même tenseur.

Les mesures de déformation issues de la famille de Seth-Hill ne constituent pas la seule option lorsqu'il s'agit de construire une mesure lagrangienne de l'état de déformation. Par exemple, il est possible de mesurer l'état de déformation à partir des tenseurs $\mathbf{A}_{(m)}$ tels que (Bazant, 1998) :

$$\mathbf{A}_{(m)} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{C}^{m/2} - \mathbf{C}^{-m/2} \right) = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{U}^{-m}) \quad (3.11)$$

où m est un nombre réel non-nul.

Il convient de remarquer que, lorsque les déformations sont petites, toutes les mesures de déformation lagrangiennes précédentes fournissent des résultats équivalents.

¹Le tenseur des déformations de Hencky est également connu sous les noms de tenseur des déformations vraies (*True strain tensor*, d'où l'indice t utilisé) ou tenseur des déformations logarithmiques.

3.1.2 Mesures eulériennes de l'état de déformation

Tenseur de Cauchy-Green gauche La construction d'une mesure de déformation eulérienne, qui prenne comme point de comparaison la configuration actuelle, ne pose pas de difficulté particulière. Il suffit d'utiliser la relation (3.1) pour écrire :

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{y} \quad (3.12)$$

$$= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{V}^{-2} \cdot d\mathbf{y} \quad (3.13)$$

$$= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\mathbf{y} \quad (3.14)$$

La relation précédente permet de définir le tenseur de Cauchy-Green gauche $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{V}^2$. Il s'agit d'un tenseur du second ordre symétrique qui mesure les variations de longueur et d'angle en adoptant un point de vue eulérien. Les éléments de lignes infinitésimaux qui apparaissent dans la relation (3.14) sont en effet définis sur la configuration actuelle.

Tenseur des déformations d'Euler-Almansi De manière semblable aux mesures lagrangiennes, la famille des mesures de déformations de Seth-Hill comprend les tenseurs eulériens de déformation tels que:

$$\mathbf{e}_{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-m/2}) = \frac{1}{m} (\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-m}) & \text{si } m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \ln(\mathbf{B}) = \ln(\mathbf{V}) & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

où m est un nombre réel.

Le cas particulier $m = 2$ conduit au tenseur des déformations d'Euler-Almansi \mathbf{e}_a qui s'exprime :

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-2}) \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \quad (3.17)$$

3.1.3 Tenseur des déformations infinitésimales

Il est courant de rencontrer des problèmes pour lesquels les configurations initiale et actuelle sont proches. Dans de telles situations, pour

lesquelles les transformations sont qualifiées d'infinitésimales², il est utile de décomposer le gradient du champ de déplacement en parties symétrique et anti-symétrique comme suit :

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \quad (3.18)$$

avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^t) \quad (3.19)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \text{skw}(\mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^t) \quad (3.20)$$

On peut alors exprimer le gradient de la transformation \mathbf{F} en fonction de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\omega}$ en utilisant la relation (2.19) sous la forme suivante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \quad (3.21)$$

Lorsque l'effet d'une transformation sur le système étudié est modéré, le gradient du champ de déplacement \mathbf{H} est petit en comparaison de l'identité. Une transformation infinitésimale correspond donc à une situation où la norme du gradient du champ de déplacement vérifie la condition :

$$\|\mathbf{H}\| = \|\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}\| = \|\boldsymbol{\varepsilon}\| + \|\boldsymbol{\omega}\| \ll 1 \quad (3.22)$$

Lorsque la condition précédente est satisfaite, l'inverse du gradient de la transformation \mathbf{F}^{-1} est approché au premier ordre par :

$$\mathbf{F}^{-1} \approx \mathbf{1} - \mathbf{H} \quad (3.23)$$

Ainsi, en négligeant les termes du second ordre (i.e. $\mathbf{H}^t \cdot \mathbf{H} \approx \mathbf{0}$), on peut établir les approximations suivantes :

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{1} + \mathbf{H}^t + \mathbf{H} = \mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.24)$$

$$\sqrt{\mathbf{C}} \approx \mathbf{1} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^t + \mathbf{H}) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.25)$$

$$\ln(\mathbf{C}) \approx \mathbf{H}^t + \mathbf{H} = 2\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{B}^{-1} \approx \mathbf{1} - \mathbf{H}^t - \mathbf{H} = \mathbf{1} - 2\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.27)$$

²L'hypothèse des transformations infinitésimales est parfois appelée hypothèse des petites déformations. Ce terme n'est toutefois pas adapté car l'hypothèse des transformations infinitésimales n'est valable que lorsque les déformations et les rotations sont petites.

Les mesures de déformations précédemment introduites (Green-Lagrange, Biot, Hencky ou Euler-Almansi) sont alors équivalentes puisque, sous réserve de la validité de la condition (3.22), on obtient que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{E}_g \approx \mathbf{E}_b \approx \mathbf{E}_t \approx \mathbf{e}_a \quad (3.28)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un tenseur du second ordre symétrique qui constitue une mesure de déformation acceptable sous réserve que les transformations soient infinitésimales. Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ est donc usuellement appelé tenseur des déformations infinitésimales.

Aussi, dans le cadre des transformations infinitésimales, la contribution de rotation \mathbf{R} au gradient de la transformation s'exprime :

$$\boldsymbol{\omega} \approx \mathbf{R} - \mathbf{1} \quad (3.29)$$

Ainsi, le tenseur $\boldsymbol{\omega}$, parce qu'il permet de quantifier les rotations locales au voisinage d'un point matériel, est appelé tenseur des rotations infinitésimales.

Il est essentiel de remarquer que l'utilisation des tenseurs des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et des rotations $\boldsymbol{\omega}$ n'est légitime que dans le contexte des transformations infinitésimales, i.e. quand $\|\mathbf{H}\|$ est petit.

Comme pour le gradient de la transformation, il est possible de définir des conditions de compatibilité pour le champ de déformation infinitésimale $\boldsymbol{\varepsilon}$. Celles-ci s'écrivent :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

Le respect des conditions de compatibilité garantit qu'il est possible d'intégrer le champ de déformation infinitésimale pour déterminer le champ de déplacement correspondant.

3.1.4 Interprétation des mesures de déformation

Les mesures de déformation introduites précédemment sont des grandeurs tensorielles qui caractérisent le changement de forme induit localement par une transformation. Afin de pouvoir correctement les interpréter, il convient de s'attarder sur la signification des différentes composantes d'une mesure de déformation.

À cette fin, on considère un couple d'éléments de ligne infinitésimaux $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{Y}$ qui, sous l'action d'une transformation, deviennent des éléments de ligne $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$ (voir Figure 3.1). Pour la suite, il est commode d'exprimer les éléments de ligne sous la forme suivante :

$$d\mathbf{X} = dX \mathbf{N} \quad (3.31)$$

$$d\mathbf{Y} = dY \mathbf{M} \quad (3.32)$$

$$d\mathbf{x} = dx \mathbf{n} \quad (3.33)$$

$$d\mathbf{y} = dy \mathbf{m} \quad (3.34)$$

où les vecteurs unitaires \mathbf{N} , \mathbf{M} , \mathbf{n} et \mathbf{m} représentent les directions respectives des éléments de lignes tandis que leurs longueurs sont données par dX , dY , dx et dy . Les différentes mesures de déformations permettent de comparer $d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y}$ à $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}$ en notant que :

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{Y} \quad (3.35)$$

$$= d\mathbf{X} \cdot (2\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_b^2) \cdot d\mathbf{Y} \quad (3.36)$$

$$= d\mathbf{X} \cdot (\exp(2\mathbf{E}_t) - \mathbf{1}) \cdot d\mathbf{Y} \quad (3.37)$$

$$= 2dx \cdot \mathbf{e}_a \cdot dy \quad (3.38)$$

Lorsque l'hypothèse des transformations infinitésimales est valable, les relations précédentes sont raisonnablement approximées par :

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} \approx 2dx \cdot \varepsilon \cdot dy \quad (3.39)$$

Variations de longueur Les longueurs dX et dx des éléments de ligne $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{x}$ sont données par les produits scalaires :

$$dX^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (3.40)$$

$$dx^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.41)$$

Les relations (3.35) à (3.37) permettent de déterminer la variation de longueur d'un élément de ligne suite à une transformation. Il suffit en effet d'appliquer ces relations au cas particulier $d\mathbf{X} = d\mathbf{Y}$ (donc $d\mathbf{x} = d\mathbf{y}$), cela conduit à :

$$dx = dX \sqrt{2\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_g \cdot \mathbf{N} + 1} \quad (3.42)$$

$$= dX \sqrt{\mathbf{N} \cdot (2\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_b^2) \cdot \mathbf{N} + 1} \quad (3.43)$$

$$= dX \sqrt{\mathbf{N} \cdot \exp(2\mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{N}} \quad (3.44)$$

$$= dX / \sqrt{1 - 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}} \quad (3.45)$$

La projection d'une mesure de déformation selon une direction permet donc de calculer la variation de longueur locale selon cette direction. Dans le cas, d'une mesure eulérienne, on caractérise la variation de longueur selon une direction définie sur la configuration actuelle alors qu'une mesure de déformation lagrangienne permet d'appréhender la variation de longueur selon une direction définie sur la configuration initiale. Dans le cas de transformations infinitésimales, la variation de longueur selon une direction \mathbf{n} est donnée par :

$$dx \approx dX (1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.46)$$

Les résultats précédents donnent une signification particulière aux composantes diagonales d'une mesure de déformation, en particulier lorsqu'elles sont exprimées dans un système de coordonnées cartésiennes. En effet, dans un tel système, ces composantes permettent de calculer l'évolution de la longueur d'un élément de ligne selon les directions définies par les vecteurs de base du système de coordonnées choisi. Dans la suite, les composantes diagonales d'une mesure de déformation, parce qu'elles représentent les variations de longueur, sont appelées déformations d'allongement³.

Variations d'angle Il est possible d'utiliser les mesures de déformation pour observer comment l'angle φ qui sépare deux éléments de ligne $d\mathbf{X}$ et $d\mathbf{Y}$ évolue sous l'action d'une transformation en un angle ϕ mesurant la séparation entre les éléments $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$. Les angles φ et ϕ sont définis par leurs cosinus :

$$\cos \varphi = \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \quad (3.47)$$

$$\cos \phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \quad (3.48)$$

³Cela n'exclut pas la possibilité d'observer une contraction de longueur, ce qui correspond à un allongement négatif.

L'évolution de l'angle φ en un angle ϕ peut être déterminée à partir des différentes mesures de déformation en remarquant que :

$$\cos \phi = \frac{2\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_g \cdot \mathbf{M} + \cos \varphi}{\sqrt{(2\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_g \cdot \mathbf{N} + 1)(2\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_g \cdot \mathbf{M} + 1)}} \quad (3.49)$$

$$= \frac{\mathbf{N} \cdot (2\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_b^2) \cdot \mathbf{M} + \cos \varphi}{\sqrt{(\mathbf{N} \cdot (2\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_b^2) \cdot \mathbf{N} + 1)(2\mathbf{M} \cdot (\mathbf{E}_b + \mathbf{E}_b^2) \cdot \mathbf{M} + 1)}} \quad (3.50)$$

$$= \frac{\mathbf{N} \cdot \exp(2\mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{M} + \cos \varphi}{\sqrt{(\mathbf{N} \cdot \exp(2\mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{N})(\mathbf{M} \cdot \exp(2\mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{M})}} \quad (3.51)$$

$$= \cos \varphi \sqrt{(1 - 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n})(1 - 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{m})} + 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{m} \quad (3.52)$$

La projection d'une mesure de déformation selon un couple de directions permet de déterminer comment l'angle qui sépare ces deux directions évolue sous l'action d'une transformation. Comme pour les variations de longueurs, une mesure de déformation eulérienne fait appel à un couple de directions définies sur la configuration actuelle tandis qu'une mesure de déformation lagrangienne utilise un couple de directions définies sur la configuration initiale. Pour des transformations infinitésimales, les relations précédentes sont équivalentes. La variation d'un angle est alors correctement approchée par :

$$\cos \phi \approx 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} + \cos \varphi \quad (3.53)$$

Les relations précédentes donnent un sens géométrique aux composantes non-diagonales d'une mesure de déformation. Ces dernières interviennent en effet lorsqu'il s'agit de calculer la variation de l'angle qui sépare deux vecteurs de base du système de coordonnées cartésiennes utilisé. Les composantes non-diagonales d'une mesure de déformation lagrangienne fournissent une information quant à la variation d'un angle initialement égal à $\pm\pi/2$. À l'opposé, une composante non-diagonale d'une mesure eulérienne donne une indication relative à la variation d'un angle actuellement égal à $\pm\pi/2$. Dans la suite, les composantes non-diagonales d'une mesure de déformation, parce qu'elles caractérisent les variations d'angle, sont appelées déformations de cisaillement.

3.1.5 Déformations principales

Les mesures de déformation présentées précédemment ont en commun d'être représentées par des tenseurs du second ordre symétriques. Ainsi, quelle que

soit la mesure de déformation utilisée, il est possible de la décomposer en éléments propres. La décomposition en éléments propres consiste à écrire que ⁴:

$$\mathbf{E} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{e} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (3.55)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (3.56)$$

Les vecteurs propres \mathbf{N}_{α} ou \mathbf{n}_{α} (avec $\alpha = 1, 2$ ou 3) définissent les directions principales de déformation. Ces vecteurs sont mutuellement orthogonaux et de norme égale à l'unité. Il est important de remarquer que les vecteurs \mathbf{N}_{α} sont associés à la configuration initiale tandis que les vecteurs \mathbf{n}_{α} correspondent à la configuration actuelle⁵. Aussi, les directions propres des mesures de déformations lagrangiennes sont celles du tenseur de dilatation droit \mathbf{U} . Pour les mesures de déformation eulériennes, les directions propres sont équivalentes à celles du tenseur de dilatation gauche \mathbf{V} . Enfin, les valeurs propres E_{α} , e_{α} ou ε_{α} sont appelées déformations principales. Elles représentent les allongements selon les directions principales au voisinage d'un point matériel. À titre d'illustration, les directions principales de déformation obtenues dans le cas particulier du cisaillement simple sont représentées sur la Figure 3.2. Il est utile remarquer que, pour un point matériel, l'allongement maximal (respectivement minimal) est donné par la déformation principale maximale (respectivement minimale).

Pour analyser des résultats expérimentaux ou pour construire des lois de comportement, il est parfois utile de calculer les parties positive et négative d'une mesure de déformation. Une telle décomposition permet par exemple de considérer les éventuelles asymétries de comportement, i.e. les différences de comportement en traction et en compression. La partie positive d'une mesure de déformation s'obtient aisément à partir des valeurs et vecteurs

⁴Dans un soucis de concision, on note \mathbf{E} une quelconque mesure lagrangienne de l'état de déformation. De manière semblable, une mesure eulérienne de l'état de déformation est simplement notée \mathbf{e} .

⁵Dans le cas de transformations infinitésimales, les configurations initiale et actuelle sont très semblables. Les directions propres du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ ne sont donc rattachées à aucune configuration particulière.

propres avec :

$$\mathbf{E}_+ = \sum_{\alpha} \langle E_{\alpha} \rangle_+ \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{e}_+ = \sum_{\alpha} \langle e_{\alpha} \rangle_+ \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (3.58)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_+ = \sum_{\alpha} \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle_+ \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (3.59)$$

Les relations pour obtenir les parties négatives d'un tenseur de déformation sont identiques aux précédentes, à ceci près qu'il faut prendre les parties négatives des déformations principales en lieu et place des parties positives :

$$\mathbf{E}_- = \sum_{\alpha} \langle E_{\alpha} \rangle_- \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{e}_- = \sum_{\alpha} \langle e_{\alpha} \rangle_- \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (3.61)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_- = \sum_{\alpha} \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle_- \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (3.62)$$

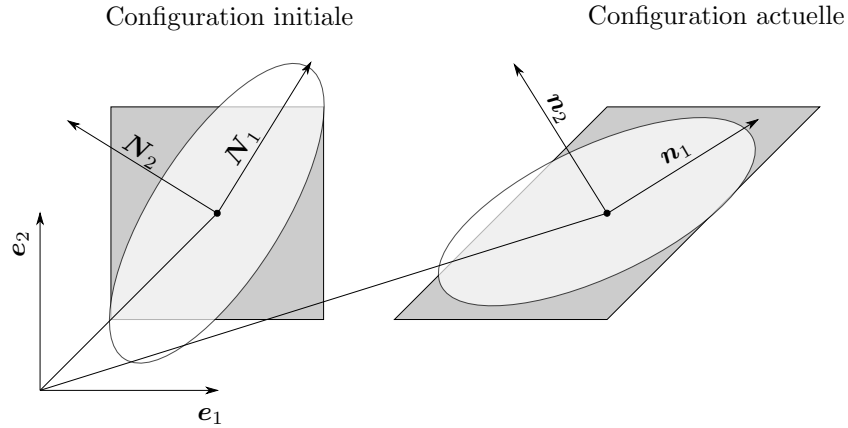


Figure 3.2: Représentation des directions principales de déformation pour une transformation de cisaillement simple d'un plan de normale \mathbf{e}_2 selon une direction \mathbf{e}_1 . Les directions principales de déformation sont représentées sur les configurations initiale (\mathbf{N}_1 et \mathbf{N}_2) et actuelle (\mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2). Comme indiqué par l'ellipse, les directions \mathbf{N}_1 et \mathbf{n}_1 sont celles où la déformation principale est maximale tandis que les directions \mathbf{N}_2 et \mathbf{n}_2 sont celles où la déformation principale est minimale.

Il est intéressant de remarquer que, quelle que soit la mesure de déformation utilisée, la décomposition précédente est additive au sens où un tenseur des déformations est la somme de ses parties positive et négative. Aussi, les parties positive et négative d'un tenseur de déformation sont orthogonales l'une à l'autre.

3.1.6 Déformations volumétriques et isochores

Il est parfois utile de déterminer à partir d'une mesure de déformation si une transformation provoque localement un changement de volume. Pour ce faire, il est possible de décomposer de manière unique une mesure de déformation en parties volumétrique (exposant vol) et isochores (exposant iso). La partie volumétrique représente la contribution d'une variation de volume à l'état de déformation tandis que l'information relative aux déformations préservant le volume est donnée par la partie isochores. Pour les tenseurs de déformations lagrangiens issus de la famille de Seth-Hill $\mathbf{E}_{(m)}$, les parties volumétrique et isochores sont données par :

$$\mathbf{E}_{(m)}^{\text{vol}} = \begin{cases} \frac{1}{m} (J^{m/3} - 1) \mathbf{1} & \text{si } m \neq 0 \\ \frac{1}{3} \ln J \mathbf{1} & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{E}_{(m)}^{\text{iso}} = \begin{cases} \frac{1}{m} (J^{-m/3} \mathbf{C} - \mathbf{1}) & \text{si } m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \ln (J^{-2/3} \mathbf{C}) & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

De manière semblable, une mesure eulérienne $\mathbf{e}_{(m)}$ de l'état de déformation issue de la famille de Seth-Hill se décompose en parties volumétrique et isochores comme suit :

$$\mathbf{e}_{(m)}^{\text{vol}} = \begin{cases} \frac{1}{m} (1 - J^{-m/3}) \mathbf{1} & \text{si } m \neq 0 \\ \frac{1}{3} \ln J \mathbf{1} & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{e}_{(m)}^{\text{iso}} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{1} - J^{m/3} \mathbf{B}) & \text{si } m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \ln (J^{2/3} \mathbf{B}) & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

Les décompositions précédentes garantissent que les contributions volumétriques sont nulles quand aucun changement de volume n'est observé (i.e. $J = 1$). Aussi, en règle générale, une mesure de déformation ne peut être additivement décomposée en la somme de ses parties volumétrique et isochores. Le cas des mesures de déformations logarithmiques, qui correspondent au cas $m = 0$, constitue une exception notable. Ces

mesures de déformations disposent en effet d'une propriété d'additivité. La décomposition du tenseur des déformations de Hencky en parties volumétrique et isochore vérifie en effet :

$$\mathbf{E}_t = \underbrace{\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{E}_t) \mathbf{1}}_{\mathbf{E}_t^{\text{vol}}} + \underbrace{\mathbf{E}_t - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{E}_t) \mathbf{1}}_{\mathbf{E}_t^{\text{iso}}} \quad (3.67)$$

On remarque que les contributions volumétrique et isochore correspondent aux parties sphérique et déviatorique du tenseur des déformations de Hencky. Ainsi, lorsqu'aucun changement de volume n'est observé, le tenseur des déformations de Hencky est purement déviatorique, donc de trace nulle.

Pour le tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon}$, la décomposition en parties volumétrique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vol}}$ et isochore $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{iso}}$ est semblable à celle utilisée pour le tenseur de Hencky, à savoir :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vol}}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{iso}}} \quad (3.68)$$

Pour une transformation infinitésimale qui est isochore au voisinage du point matériel étudié, on trouve que le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vol}}$ est nul. De manière semblable au tenseur des déformations de Hencky, le tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être décomposé additivement en parties déviatorique et sphérique.

3.1.7 Etats de déformation particuliers

Lorsqu'un système subit une transformation homogène, le gradient de la transformation est un champ tensoriel uniforme. Il en résulte que l'état de déformation est identique au voisinage de chaque point matériel. Les transformations homogènes constituent donc un cas d'étude idéal lorsqu'il s'agit de comprendre la signification des différentes mesures de déformation. À titre illustratif, on détermine dans ce qui suit les états de déformations correspondant aux différentes transformations homogènes décrites au 2.2.5.

Mouvement de corps rigide Pour un mouvement de corps rigide, le gradient de la transformation \mathbf{F} est égal à un tenseur orthogonal \mathbf{R} . Les

propriétés d'orthogonalité de \mathbf{R} permettent de montrer que :

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{0} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{E}_b = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{0} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\mathbf{R}) - \mathbf{1} \quad (3.73)$$

On retrouve ici les limites du tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui, malgré le fait que les longueurs et les angles restent inchangés, n'est pas nul. Il est toutefois presque nul lorsque les rotations sont petites (i.e. $\mathbf{R} \approx \mathbf{1}$).

Extension simple Lorsque la transformation homogène correspond à une extension simple d'amplitude ϵ , le calcul des mesures de déformation conduit à :

$$\mathbf{E}_g = \frac{1}{2}\epsilon(2 + \epsilon) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{E}_b = \epsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{E}_t = \ln(1 + \epsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (3.76)$$

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{2} \frac{\epsilon(2 + \epsilon)}{(1 + \epsilon)^2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.77)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \epsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.78)$$

Toutes les mesures de déformation partagent le fait d'être colinéaires à la direction d'extension \mathbf{n} . Aussi, comme le montre la Figure 3.3, les composantes de déformation selon la direction $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ sont équivalentes pour de faibles extensions (i.e. $\epsilon \leq 10\%$). Les différences deviennent toutefois significatives dès lors que les extensions sont élevées. Cela montre l'importance de préciser la mesure de déformation utilisée lorsque les transformations sont grandes.

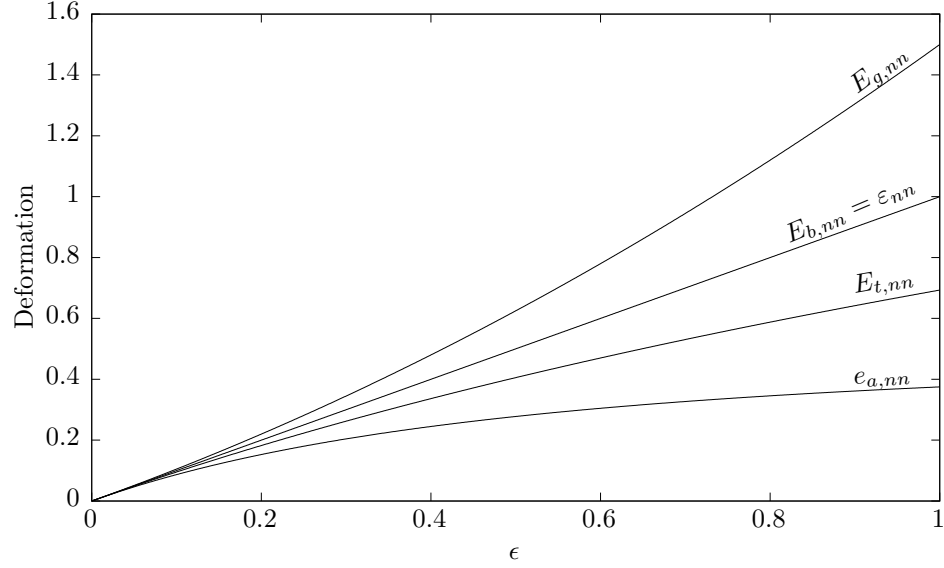


Figure 3.3: Evolution des déformations selon la direction d'extension simple \mathbf{n} en fonction de l'amplitude ϵ de l'extension.

Glissement simple Les états de déformation correspondant à une transformation homogène de glissement simple d'amplitude γ sont donnés par :

$$\mathbf{E}_g = \frac{\gamma}{2}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) + \frac{\gamma^2}{2}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_b &= \frac{\gamma'}{2}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) + \left(\frac{\gamma' - \gamma}{\gamma}\right)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \\ &+ \left(\frac{\gamma' - \gamma}{\gamma} + \frac{\gamma'\gamma}{2}\right)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{\gamma''}{2}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) - \frac{\gamma''\gamma}{4}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{\gamma''\gamma}{4}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{e}_a = \frac{\gamma}{2}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.82)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\gamma}{2}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \quad (3.83)$$

avec :

$$\gamma' = \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 4}} \text{ et } \gamma'' = \frac{4 \ln(\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 + 1})}{\sqrt{\gamma^2 + 4}} \quad (3.84)$$

Contrairement au cas de l'extension simple, les composantes non-nulles du tenseur des déformations dépendent de la mesure retenue.

Dilatation isotrope Pour une dilatation isotrope, dont l'amplitude est contrôlée par δ , les expressions des mesures de déformation sont :

$$\mathbf{E}_g = \frac{1}{2} \delta (2 + \delta) \mathbf{1} \quad (3.85)$$

$$\mathbf{E}_b = (\delta - 1) \mathbf{1} \quad (3.86)$$

$$\mathbf{E}_t = \ln(1 + \delta) \mathbf{1} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{2} \frac{\delta (2 + \delta)}{(1 + \delta)^2} \mathbf{1} \quad (3.88)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \delta \mathbf{1} \quad (3.89)$$

Dans ce cas particulier, les différentes mesures de déformation sont toutes données par des tenseurs sphériques (i.e. multiples du tenseur identité du second ordre). Les valeurs de déformation dépendent toutefois de la mesure de déformation choisie.

3.2 Taux de déformation

La description du comportement de certains matériaux requiert de définir, non seulement l'état de déformation, mais également la vitesse à laquelle évolue cet état de déformation. Dans ce qui suit, différentes mesures du taux de déformation⁶ sont proposées.

3.2.1 Mesures lagrangiennes du taux de déformation

Les mesures lagrangiennes de l'état de déformation étant construites à partir du tenseur de Cauchy-Green droit, les taux de déformations associés font intervenir sa dérivée par rapport au temps $\dot{\mathbf{C}}$ telle que:

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{F}}^t \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^t \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad (3.90)$$

Tenseurs des taux de déformation de Green-Lagrange, Biot et Hencky La dérivation par rapport au temps de la relation (3.5) indique

⁶Le terme de vitesse de déformation est parfois utilisé en lieu et place du taux de déformation.

que le tenseur des taux de déformation de Green-Lagrange $\dot{\mathbf{E}}_g$ s'exprime simplement :

$$\dot{\mathbf{E}}_g = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \quad (3.91)$$

La dérivation du tenseur des déformations de Biot, donné par la relation (3.7), par rapport au temps permet d'établir l'expression d'une autre mesure lagrangienne de la vitesse de déformation :

$$\dot{\mathbf{E}}_b = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} \quad (3.92)$$

Enfin, en utilisant l'expression (3.9), on obtient que le tenseur des taux de déformation de Hencky $\dot{\mathbf{E}}_t$ est donné par :

$$\dot{\mathbf{E}}_t = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} \quad (3.93)$$

Le calcul des tenseurs d'ordre quatre $\partial \sqrt{\mathbf{C}} / \partial \mathbf{C}$ et $\partial \ln \mathbf{C} / \partial \mathbf{C}$ n'est généralement pas trivial. Une méthode de calcul de ces tenseurs est exposée en Annexe C.

3.2.2 Mesures eulériennes du taux de déformation

Par analogie avec les mesures lagrangiennes, la dérivée par rapport au temps d'une mesure de déformation eulérienne fait intervenir la dérivée par rapport au temps du tenseur de Cauchy-Green gauche $\dot{\mathbf{B}}$ qui s'exprime :

$$\dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t \quad (3.94)$$

Tenseur des taux de déformation d'Euler-Almansi La dérivation par rapport au temps de la relation (3.16) permet d'obtenir le tenseur des taux de déformation d'Euler-Almansi $\dot{\mathbf{e}}_a$:

$$\dot{\mathbf{e}}_a = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad (3.95)$$

Comme ses homologues lagrangiens, le taux de déformation d'Euler-Almansi $\dot{\mathbf{e}}_a$ est un tenseur du second ordre symétrique.

Tenseur eulérien des taux de déformation Il est possible de construire des mesures du taux de déformation qui ne dérivent pas d'une mesure de déformation. En particulier, sur un intervalle de temps infinitésimal, un élément de ligne $d\mathbf{x}$ voit possiblement sa direction et sa norme changer. La vitesse d'évolution de $d\mathbf{x}$, notée $\dot{d}\mathbf{x}$, est donnée par :

$$\dot{d}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \quad (3.96)$$

$$= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.97)$$

$$= \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.98)$$

Le tenseur du second ordre $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ est un tenseur eulérien qui est appelé gradient spatial du champ de vitesse. On montre en effet que :

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (3.99)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.100)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} \quad (3.101)$$

La décomposition du gradient spatial du champ de vitesse en parties symétrique et antisymétrique permet d'introduire les tenseurs du second ordre \mathbf{d} et \mathbf{w} :

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^t) \quad (3.102)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^t) \quad (3.103)$$

Le tenseur symétrique \mathbf{d} est appelé taux de déformation eulérien. La pertinence de \mathbf{d} comme mesure du taux de déformation est évidente quand on considère l'évolution du produit $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}$, où $d\mathbf{x}$ et $d\mathbf{y}$ représentent deux éléments de lignes infinitésimaux dans la configuration actuelle. La vitesse d'évolution du produit $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}$ est en effet donnée par :

$$\frac{d}{dt} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}^t \cdot d\mathbf{y} + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{l} \cdot d\mathbf{y} \quad (3.104)$$

$$= 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{d} \cdot d\mathbf{y} \quad (3.105)$$

La relation précédente souligne le caractère eulérien de \mathbf{d} qui prend comme arguments des grandeurs associées à la configuration actuelle.

L'application de la relation précédente à un élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{x} = \mathbf{n} dx$ permet de calculer la vitesse à laquelle la longueur dx change en fonction de son orientation \mathbf{n} à partir de :

$$\frac{d}{dt}(dx) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} \quad (3.106)$$

Cette dernière relation montre l'intérêt du tenseur \mathbf{d} lorsqu'il s'agit de décrire la vitesse à laquelle un point matériel se déforme. Ce tenseur est donc parfois utilisé lorsqu'il s'agit de construire des modèles de comportement dans le cadre d'une description eulérienne.

À ce stade, il est essentiel de comprendre que les tenseurs \mathbf{d} et $\dot{\mathbf{e}}_a$ sont deux mesures eulériennes différentes de la vitesse de déformation. On peut en effet montrer que :

$$\dot{\mathbf{e}}_a = \mathbf{d} - \mathbf{l}^t \cdot \mathbf{e}_a - \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{l} \neq \mathbf{d} \quad (3.107)$$

Aussi, le taux de déformation eulérien \mathbf{d} peut être perçu comme étant le résultat du transport du taux de déformation de Green-Lagrange $\dot{\mathbf{E}}_g$ vers la configuration actuelle au sens où :

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-t} \cdot \dot{\mathbf{E}}_g \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (3.108)$$

Enfin, le taux de déformation eulérien \mathbf{d} est également intéressant en cela qu'il permet de calculer la vitesse à laquelle le volume change. La dérivée par rapport au temps de la relation de transport (2.31) conduit ainsi à :

$$\dot{d}v = \dot{J} dV \quad (3.109)$$

$$= J \operatorname{tr}(\mathbf{l}) dV = J \operatorname{tr}(\mathbf{d}) dV = J \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} dV \quad (3.110)$$

Remarque Si le tenseur eulérien \mathbf{d} correspond bien à une mesure du taux de déformation, son intégrale par rapport au temps ne constitue pas une mesure de déformation valable. En effet, l'intégrale du taux de déformation eulérien \mathbf{d} au cours d'un trajet de déformation dépend du chemin suivi. Il est ainsi possible d'imaginer deux trajets de déformation différents pour lesquels, même s'ils génèrent un même état final de déformation, les intégrales du taux de déformation \mathbf{d} par rapport au temps ne sont pas identiques.

Le tenseur antisymétrique \mathbf{w} est appelé taux de rotation eulérien. Cette dénomination est justifiée par le fait qu'il donne une information relative à l'évolution d'un élément de ligne qui peut voir sa direction changer sans pour autant qu'il n'y ait de déformation au voisinage du point matériel concerné. En particulier, la vitesse à laquelle l'orientation \mathbf{n} d'un élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{x} = \mathbf{n} dx$ change est donnée par :

$$\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (3.111)$$

Cette dernière relation montre que dans le cas d'un mouvement de corps rigide (i.e. $\mathbf{d} = \mathbf{0}$), la vitesse à laquelle l'orientation d'une fibre change dépend uniquement du taux de rotation eulérien.

Remarque Le caractère antisymétrique du taux de rotation eulérien permet d'identifier un unique vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\theta}$ qui, pour n'importe quel vecteur \mathbf{k} , vérifie :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{k} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}$$

La direction de $\boldsymbol{\theta}$ indique l'axe de rotation instantané d'un point matériel tandis que sa norme représente la vitesse angulaire. Dans un système de coordonnées cartésiennes, les composantes du vecteur vitesse angulaire sont déduites de celles du taux de rotation eulérien par :

$$\theta_1 = w_{32}, \theta_2 = w_{13} \text{ et } \theta_3 = w_{21}$$

3.2.3 Tenseur des taux de déformation infinitésimale

Lorsque les transformations sont infinitésimales, il est possible de définir des mesures du taux de déformation et du taux de rotation qui exploitent le fait que les positions des points matériels évoluent peu au cours d'une transformation. Les taux de déformation infinitésimale $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et de rotation infinitésimale $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ s'expriment comme suit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{sym}(\dot{\mathbf{H}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}^t) \quad (3.112)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \text{skw}(\dot{\mathbf{H}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^t) \quad (3.113)$$

où $\dot{\mathbf{H}}$ est le gradient matériel du champ de vitesse :

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) \quad (3.114)$$

$$= \mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} \quad (3.115)$$

L'utilisation des taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et de rotation $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ n'est justifiable que dans le cadre des transformations infinitésimales. C'est en effet dans ce contexte, pour lequel les configurations initiale et actuelle se confondent presque, que le taux de déformation infinitésimale $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ donne des résultats équivalents aux autres mesures du taux de déformation.

Chapitre 4

Équations de conservation : Application à la masse

La description des transformations qui s'appliquent à un système nécessite de préciser comment des quantités physiques, représentant l'état du système, évoluent au cours du temps. Cette évolution n'est néanmoins pas arbitraire car des principes physiques imposent que certaines quantités (e.g. énergie, masse) soient conservées. Il devient alors nécessaire de formuler mathématiquement les équations de conservation associées à ces quantités.

Dans ce chapitre, on présente la forme générale des équations de conservation. Cette forme est particulièrement utile lorsqu'il s'agit de préciser les équations qui gouvernent l'évolution d'un système. L'application de ces mêmes équations à la masse est présentée dans la dernière partie de ce chapitre.

4.1 Forme générale des équations de conservation

4.1.1 Quantité globale, volumique et spécifique

Afin d'établir la forme générale des équations de conservations, on considère un système \mathcal{B} pour lequel on s'intéresse à une quantité globale \mathcal{A} qui est

extensive au sens où elle dépend de la taille du système considéré¹. Plus précisément, si on décompose le système \mathcal{B} en deux sous-systèmes disjoints \mathcal{B}^+ et \mathcal{B}^- , comme décrit par la Figure 4.1, la grandeur \mathcal{A} obéit à :

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}^+(t) + \mathcal{A}^-(t) \quad (4.1)$$

Puisque la grandeur globale \mathcal{A} est extensive, sa valeur à instant t est donnée en additionnant les contributions de chacun des points matériels qui composent le système. Pour ce faire, il est commode d'utiliser soit une densité volumique A , qui représente une quantité physique par unité de volume, soit une grandeur spécifique a , qui représente une quantité physique par unité de masse. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces grandeurs permet d'écrire :

$$\mathcal{A}(t) = \int_{\mathcal{V}} A(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{V}} \varrho(\mathbf{x}, t) a(\mathbf{x}, t) dv \quad (4.2)$$

La relation précédente fait intervenir la masse volumique ϱ d'un point matériel dans la configuration actuelle.

Il est possible d'établir une relation similaire à la précédente en travaillant sur la configuration initiale plutôt que sur la configuration actuelle. À cette fin, on introduit la densité volumique A_0 telle que :

$$\mathcal{A}(t) = \int_{\mathcal{V}_0} A_0(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0(\mathbf{X}, t) a(\mathbf{X}, t) dV \quad (4.3)$$

où ϱ_0 désigne la masse volumique dans la configuration initiale². Si la grandeur spécifique a est indépendante de la configuration retenue, il est important de remarquer que les densités volumiques actuelle A et initiale A_0 sont chacune associée à une configuration différente du fait des variations de volume susceptibles d'intervenir lors d'une transformation.

Remarque La masse volumique dans la configuration initiale $\varrho_0(\mathbf{X}, t)$ n'est pas la masse volumique initiale $\varrho(\mathbf{x}, t_0)$, mais la quantité de masse par unité de volume occupé dans la configuration initiale. Si

¹On s'intéresse ici à une quantité \mathcal{A} qu'on suppose de nature scalaire. La généralisation à une grandeur tensorielle se fait sans difficulté particulière.

²La relation entre les masses volumiques actuelle et initiale est obtenue en remarquant qu'un élément de masse infinitésimal dm est donné de manière équivalente par $\varrho_0 dV$ et ϱdv . La relation de transport d'un élément volume (i.e. $dv = JdV$) permet alors d'écrire que $\varrho_0 = J\varrho$.

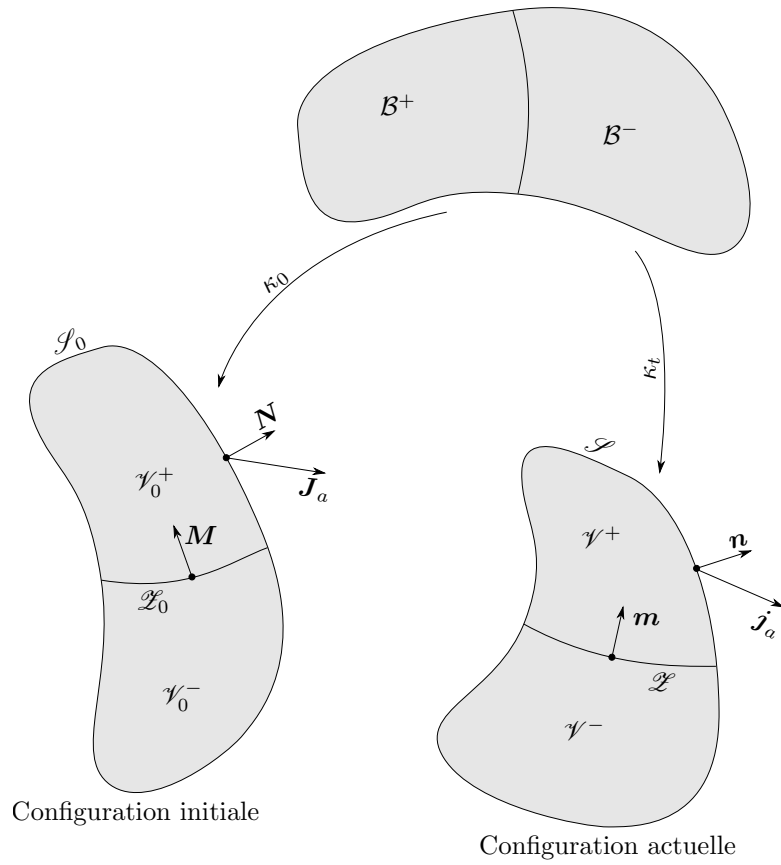


Figure 4.1: Représentation schématique d'un système \mathcal{B} formé par la réunion de deux sous-systèmes \mathcal{B}^+ et \mathcal{B}^- séparés par une surface singulière. Les configurations initiale et actuelle de ce système sont également représentées.

ces deux grandeurs sont équivalentes pour un système fermé ou isolé, elles diffèrent l'une de l'autre dans le cas d'un système ouvert.

Puisque les relations précédentes sont équivalentes au sens où elles aboutissent à la même quantité globale, on en déduit que les grandeurs locales A , A_0 et a sont liées les unes aux autres par :

$$A_0 = \varrho_0 a = J A \quad (4.4)$$

$$A = \varrho a = A_0/J \quad (4.5)$$

4.1.2 Forme matérielle des équations de conservation

Si on souhaite que la quantité extensive \mathcal{A} soit conservée, il est nécessaire de s'intéresser à sa dérivée temporelle $\dot{\mathcal{A}}$, qui mesure la vitesse à laquelle la quantité \mathcal{A} évolue au cours du temps. Lorsqu'on dérive l'expression (4.3) par rapport au temps, on est amené à considérer deux contributions. En effet, on peut imaginer que la quantité globale \mathcal{A} change parce que la densité volumique correspondante évolue en différentes positions du système. Aussi, si des surfaces internes de singularité (e.g. interfaces séparant deux phases) se déplacent, la quantité globale \mathcal{A} est également susceptible d'évoluer. Lorsqu'on considère ces deux aspects, on obtient que :

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}_0} A_0 dv \right) = \int_{\mathcal{V}_0} \dot{A}_0 dV - \int_{\mathcal{Z}_0} [A_0] Z dS \quad (4.6)$$

Dans la relation précédente, la région occupée par le système dans sa configuration initiale définit un volume \mathcal{V}_0 (avec $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0^+ \cup \mathcal{V}_0^-$, voir Figure 4.1). Pour les points matériels réguliers, la densité volumique locale A_0 est une fonction continue de la variable de position initiale \mathbf{X} . Par opposition, les points matériels singuliers correspondant aux interfaces définissent une surface \mathcal{Z}_0 au travers de laquelle la grandeur A_0 n'est pas nécessairement continue. La vitesse de déplacement normal en chaque point de la surface singulière est notée Z . Aussi, le saut de la densité volumique A_0 à travers la surface de singularité est donné par :

$$[A_0] = A_0^+ - A_0^- \quad (4.7)$$

Démonstration Pour établir la relation (4.6), il convient de séparer le volume \mathcal{V}_0 occupé par le système dans la configuration initiale en deux sous-volumes \mathcal{V}_0^+ et \mathcal{V}_0^- connectés l'un à l'autre par une surface singulière \mathcal{Z}_0 . Le caractère extensif de la grandeur \mathcal{A} permet d'écrire que :

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathcal{A}}^+(t) + \dot{\mathcal{A}}^-(t)$$

Pour le terme $\dot{\mathcal{A}}^+(t)$ de la relation précédente, la dérivation par rapport au temps conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}}^+(t) &= \lim_{\tau \rightarrow t} \left(\frac{1}{\tau - t} \left(\int_{\mathcal{V}_0^+(\tau)} A_0(\tau) dV - \int_{\mathcal{V}_0^+(t)} A_0(t) dV \right) \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t} \left(\frac{1}{\tau - t} \left(\int_{\mathcal{V}_0^+(\tau) - \mathcal{V}_0^+(t)} A_0(\tau) dV + \int_{\mathcal{V}_0^+(t)} (A_0(\tau) - A_0(t)) dV \right) \right) \end{aligned}$$

La relation précédente fait intervenir la différence de volume $\mathcal{V}_0^+(\tau) - \mathcal{V}_0^+(t)$ qui correspond en fait au volume balayé par la surface de singularité \mathcal{Z}_0 entre les instants t et τ . Comme le montre la Figure 4.2, cette différence de volume est donnée par l'intégrale sur la surface de singularité du produit entre la vitesse normale de déplacement de l'interface Z à l'instant t , la durée séparant les instants t et τ et l'élément de surface infinitésimal dS . On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow t} \left(\frac{1}{\tau - t} \left(\int_{\mathcal{V}_0^+(\tau) - \mathcal{V}_0^+(t)} A_0(\tau) dV \right) \right) &= - \lim_{\tau \rightarrow t} \left(\int_{\mathcal{Z}_0(\tau)} A_0^+(\tau) Z(t) dS \right) \\ &= - \int_{\mathcal{Z}_0(t)} A_0^+(t) Z(t) dS \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\dot{\mathcal{A}}^+(t) = \int_{\mathcal{V}_0^+(t)} \dot{A}_0(t) dV - \int_{\mathcal{Z}_0(t)} A_0^+(t) Z(t) dS$$

Par un raisonnement analogue, on trouve que :

$$\dot{\mathcal{A}}^-(t) = \int_{\mathcal{V}_0^-(t)} \dot{A}_0(t) dV + \int_{\mathcal{Z}_0(t)} A_0^-(t) Z(t) dS$$

L'addition de ces deux dernières relations permet d'établir que :

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = \int_{\mathcal{V}_0(t)} \dot{A}_0(t) dV - \int_{\mathcal{Z}_0(t)} [A_0(t)] Z(t) dS$$

Cette relation correspond à l'Équation (4.6) utilisée pour établir les équations de conservation.

Pour établir les équations de conservation d'une grandeur physique, il faut remarquer que la quantité \mathcal{A} ne peut évoluer que si on réalise un transfert vers ou depuis le système. En particulier, l'évolution de la quantité \mathcal{A} (e.g. énergie, masse) est la résultante de deux contributions différentes :

- La production de la quantité considérée à l'intérieur de la région occupée par le système. On décrit cet échange par le champ scalaire r_a qui représente une source spécifique, i.e. un apport (ou une perte) de quantité \mathcal{A} par unité de masse et de temps.
- Le transfert de la quantité considérée au travers de la frontière externe du système considéré. On associe à cette seconde forme le champ vectoriel \mathbf{J}_a . Celui-ci représente une densité surfacique de flux, i.e. un apport (ou une perte) de quantité \mathcal{A} par unité de surface et de temps dans une certaine direction.

Lorsqu'on additionne ces contributions, la vitesse d'évolution $\dot{\mathcal{A}}$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\dot{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 r_a dV - \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{N} dS \quad (4.8)$$

où \mathbf{N} représente la normale unitaire en chaque point de la frontière externe \mathcal{S}_0 dans la configuration initiale.

Exemple Dans le cas d'un problème de thermique, la source spécifique r_a peut traduire un apport de chaleur par effet Joule. La densité surfacique de flux \mathbf{J}_a peut par exemple représenter un transfert de chaleur par convection avec l'environnement immédiat du système considéré.

La combinaison des Équations (4.6) et (4.8) permet d'obtenir la forme

matérielle globale d'une équation de conservation :

$$\int_{\mathcal{V}_0} \dot{A}_0 dV - \int_{\mathcal{Z}_0} [A_0] Z dS = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 r_a dV - \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{N} dS \quad (4.9)$$

La notion de globalité utilisée pour qualifier l'équation précédente fait référence à son application à l'ensemble du système considéré. Cette équation peut être ré-écrite en utilisant le théorème de la divergence pour aboutir à :

$$\int_{\mathcal{V}_0} \left(\dot{A}_0 + \mathbf{J}_a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho_0 r_a \right) dV = \int_{\mathcal{Z}_0} ([A_0] Z - [\mathbf{J}_a] \cdot \mathbf{M}) dS \quad (4.10)$$

où \mathbf{M} représente la normale unitaire en chaque point de la surface singulière \mathcal{Z}_0 dans la configuration initiale.

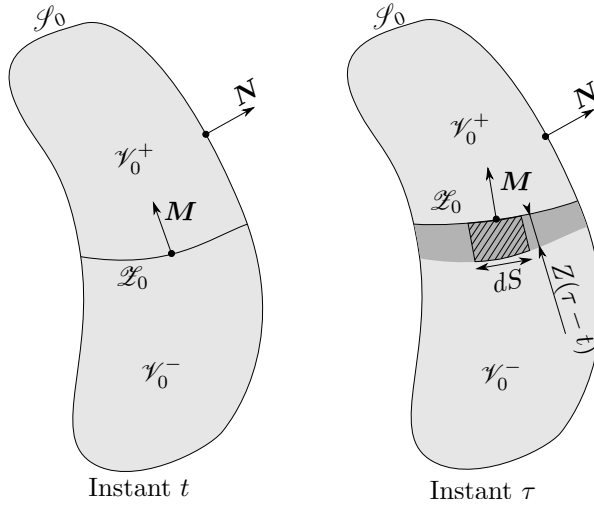


Figure 4.2: Déplacement d'une surface singulière \mathcal{Z}_0 entre les instants t et τ sur la configuration initiale. Le volume infinitésimal balayé par un point singulier entre ces deux instants est indiqué par des hachures.

La forme locale d'une équation de conservation est obtenue en appliquant l'équation de conservation précédente à une sous-partie du système. En particulier, on peut considérer une sous-partie centrée sur un des points réguliers. Si la sous-partie est suffisamment petite afin d'en exclure les points singuliers, l'intégrale de surface de l'équation précédente disparaît. Aussi, puisque l'intégrale de volume doit s'annuler quelle que soit la sous-partie

régulière considérée, on en déduit alors que n'importe quel point matériel régulier doit satisfaire :

$$\dot{A}_0 + \mathbf{J}_a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho_0 r_a = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (4.11)$$

De manière semblable, on peut considérer une sous-partie uniquement constituée de points singuliers, de sorte que l'intégrale de volume disparaisse de l'équation de conservation globale (4.10). L'intégrale de surface qui subsiste doit alors s'annuler pour n'importe quelle sous-partie singulière du système considéré. Chaque point matériel singulier vérifie donc :

$$[A_0] Z - [\mathbf{J}_a] \cdot \mathbf{M} = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (4.12)$$

Les Équations (4.11) et (4.12) constituent la forme locale d'une équation de conservation.

4.1.3 Forme spatiale des équations de conservation

La forme matérielle des équations de conservation est utile dans le cadre d'une description lagrangienne. L'adoption d'une description eulérienne nécessite d'établir la forme spatiale des équations de conservation. Pour ce faire, il faut transporter l'équation (4.6) sur la configuration actuelle, ce qui aboutit à :

$$\dot{A} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (A\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dv - \int_{\mathcal{Z}} ([A] \zeta - [A\mathbf{v}] \cdot \mathbf{m}) ds \quad (4.13)$$

La relation précédente fait intervenir le volume \mathcal{V} , tel que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \cup \mathcal{V}^-$ (voir Figure 4.1), qui correspond au volume occupé par le système étudié dans la configuration actuelle. Aussi, la surface occupée par les points matériels singuliers est notée \mathcal{Z} . L'orientation de cette surface est définie pour chaque point singulier par le vecteur unitaire \mathbf{m} . La vitesse normale de la surface singulière est désignée par ζ . Enfin, le saut de la densité volumique actuelle A à travers la surface de singularité est donné par :

$$[A] = A^+ - A^- \quad (4.14)$$

Pour établir l'équation (4.13) à partir de (4.6), il faut utiliser les relations :

$$\dot{A}_0 = J \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (A\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) \quad (4.15)$$

$$[A_0] Z = J \|\mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{M}\| ([A] \zeta - [A\mathbf{v}] \cdot \mathbf{m}) \quad (4.16)$$

De manière semblable, le transport de l'équation (4.8) vers la configuration actuelle conduit à :

$$\dot{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{V}} \varrho r_a dv - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{n} ds \quad (4.17)$$

où \mathbf{n} désigne la normale unitaire en chaque point de la surface \mathcal{S} définissant la frontière externe du système étudié. De manière analogue à l'Équation (4.8), la relation précédente fait intervenir la source spécifique r_a ainsi que la densité surfacique de flux \mathbf{j}_a . La densité surfacique de flux associée à la configuration actuelle \mathbf{j}_a est reliée à son homologue de la configuration initiale \mathbf{J}_a par la relation :

$$\mathbf{j}_a = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{J}_a \quad (4.18)$$

La relation précédente, qui découle de la relation de transport (2.26), garantit que la densité surfacique de flux produit des effets identiques sur les configurations initiale et actuelle (i.e. $\mathbf{J}_a \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j}_a \cdot ds$).

La forme spatiale globale de l'équation de conservation associée à une grandeur globale \mathcal{A} s'obtient en combinant les Équations (4.13) et (4.17), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + (\mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dv - \int_{\mathcal{S}} ([\mathcal{A}] \zeta - [\mathbf{A}\mathbf{v}] \cdot \mathbf{m}) ds \\ = \\ \int_{\mathcal{V}} \varrho r_a dv - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le théorème de la divergence, lorsqu'il est appliqué à l'intégrale sur la surface \mathcal{S} définissant la frontière externe du système, permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + (\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{j}_a) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho r_a \right) dv = \\ \int_{\mathcal{S}} ([\mathcal{A}] \zeta - [\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{j}_a] \cdot \mathbf{m}) ds \end{aligned} \quad (4.20)$$

De manière analogue à la forme matérielle, il est possible d'obtenir une forme locale de l'équation de conservation spatiale en remarquant que l'équation globale doit être satisfaite pour toute sous-partie régulière du système considéré, auquel cas le terme surfacique s'annule. Dans une telle situation,

quelle que soit la taille de la sous-partie, le terme volumique doit s'annuler. Chaque point matériel régulier de la configuration actuelle doit donc vérifier :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (A\mathbf{v} + \mathbf{j}_a) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho r_a = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L} \quad (4.21)$$

Aussi, une approche équivalente conduite pour chaque point singulier conduit à la condition locale de conservation :

$$[A]\zeta - [A\mathbf{v} + \mathbf{j}_a] \cdot \mathbf{m} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad (4.22)$$

Il est important de remarquer que les équations de conservation (4.21) et (4.22) ne sont pas des équations supplémentaires à celles déjà établies dans le cadre de la description matérielle. Elles ne sont qu'une écriture alternative, mais néanmoins équivalente, des équations de conservation locales (4.11) et (4.12).

4.2 Conservation de la masse

En mécanique classique, la masse est une grandeur extensive qui est conservée au cours d'une transformation si le système est fermé, voire isolé. Si ces deux types de systèmes ne peuvent échanger de matière, un système fermé peut néanmoins réaliser des transferts d'énergie. Un système ouvert est capable de réaliser des échanges de masse et d'énergie avec l'extérieur. Il convient de préciser que certains systèmes peuvent être globalement fermés, car ils n'autorisent pas les échanges de matière avec leur environnement, mais localement ouverts au sens où des transferts de matière à l'intérieur du système restent possibles. Dans ce qui suit, un système est qualifié d'ouvert dès lors que des transferts ou des apports de masse sont possibles, même s'ils ne sont que locaux. Par opposition, un système fermé ne permet aucun transfert et aucun apport de masse, même local. Les systèmes isolés ne sont considérés que comme un cas particulier de systèmes fermés pour lesquels les transferts et les apports d'énergie ne sont pas possibles.

4.2.1 Cas des systèmes ouverts

Les systèmes ouverts, parce qu'ils sont capables d'échanger des particules avec l'extérieur, peuvent voir leur leur masse totale varier. Si on note ϱ

(respectivement ϱ_0) la masse volumique (i.e. la densité de masse) d'un point matériel de la configuration actuelle (respectivement initiale), la masse totale \mathcal{M} du système est donnée par :

$$\mathcal{M}(t) = \int_{\mathcal{V}} \varrho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0(\mathbf{X}, t) dV \quad (4.23)$$

L'équation locale de conservation de la masse correspondante est obtenue dans sa forme matérielle à partir de (4.11) et (4.12) :

$$\dot{\varrho}_0 + \mathbf{J}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho_0 r_m = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (4.24)$$

$$[\varrho_0] \zeta - [\mathbf{J}_m] \cdot \mathbf{M} = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (4.25)$$

où \mathbf{J}_m désigne la densité surfacique de flux de masse dans la configuration initiale et r_m la source spécifique de masse. Sous sa forme spatiale, l'équation locale de conservation de la masse est le résultat de l'application des équations (4.21) et (4.22), ce qui conduit à :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\varrho \mathbf{v} + \mathbf{j}_m) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho r_m = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (4.26)$$

$$[\varrho] \zeta - [\varrho \mathbf{v} + \mathbf{j}_m] \cdot \mathbf{m} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (4.27)$$

où \mathbf{j}_m désigne la densité surfacique de flux de masse dans la configuration actuelle. L'équation locale de conservation de la masse pour un point régulier peut également s'écrire sous la forme alternative suivante, qui utilise la définition de la dérivée particulaire (2.10) :

$$\dot{\varrho} + \varrho \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{j}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho r_m = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (4.28)$$

4.2.2 Cas des systèmes fermés ou isolés

Pour les systèmes fermés ou isolés, la quantité de particules, donc la masse totale, reste constante. Cela implique donc qu'il y ait ni échange surfacique de matière entre le système considéré et le milieu extérieur, ni apport ou perte de masse à l'intérieur du système. La condition globale de conservation de la masse s'écrit donc :

$$\dot{\mathcal{M}}(t) = 0 \quad (4.29)$$

Aussi, les équations locales de conservation de la masse pour un système fermé ou isolé ne sont qu'un cas particulier des équations précédentes. Ainsi, les équations locales de conservation de la masse correspondantes sont

obtenues en annulant les densités surfaciques de flux (i.e. $\mathbf{j}_m = \mathbf{J}_m = \mathbf{0}$) ainsi que la source spécifique (i.e. $r_m = 0$). Dans leur forme matérielle, les équations locales de conservation de la masse pour un système isolé, éventuellement fermé s'écrivent donc :

$$\dot{\varrho}_0 = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (4.30)$$

$$[\varrho_0] Z = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (4.31)$$

Cette dernière condition indique que le déplacement d'une surface de singularité dans la configuration initiale (i.e. $Z \neq 0$) implique que la masse volumique correspondante soit identique de part et d'autre de la surface de singularité (i.e. $[\varrho_0] = 0$). Aussi, si les masses volumiques diffèrent de part et d'autre de la surface singulière (i.e. $[\varrho_0] \neq 0$), celle-ci ne peut pas se déplacer (i.e. $Z = 0$).

La version spatiale de la loi de conservation de la masse pour un système isolé est obtenue à partir des équations de conservation (4.27) et (4.28), ce qui conduit à :

$$\dot{\varrho} + \varrho \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (4.32)$$

$$[\varrho] \zeta - [\varrho \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (4.33)$$

4.2.3 Forme spécifique des équations de conservation

La condition locale de conservation de la masse permet d'établir des formes alternatives des équations de conservation associées une grandeur globale \mathcal{A} . En particulier, il est possible d'écrire les équations locales de conservation en utilisant la grandeur spécifique a , plutôt que les densités volumiques A ou A_0 . Une telle écriture est particulièrement utile pour les systèmes ouverts au sens où les grandeurs spécifiques ne sont affectées par un transfert de matière que si celui-ci implique de la matière pour laquelle la quantité spécifique est différente.

Si on combine la relation (4.4) et l'équation locale de conservation de la masse (4.24), on obtient une écriture alternative des équations locales de conservation (4.11) et (4.12) dans leur forme matérielle :

$$\varrho_0 \dot{a} + \tilde{\mathbf{J}}_a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho_0 \tilde{r}_a = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (4.34)$$

$$[\varrho_0 a] Z - [\mathbf{J}_a] \cdot \mathbf{M} = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (4.35)$$

La forme spatiale, équivalente à la précédente, est obtenue de manière semblable à partir de la relation (4.5), de l'équation locale de conservation de la masse (4.26) ainsi que des équations locales de conservation (4.21) et (4.22)

$$\varrho \dot{a} + \tilde{\mathbf{J}}_a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho \tilde{r}_a = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L} \quad (4.36)$$

$$[\varrho a] \zeta - [\varrho a \mathbf{v} + \mathbf{j}_a] \cdot \mathbf{m} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad (4.37)$$

Les équations précédentes sont largement utilisées en pratique lorsqu'il s'agit d'établir les équations différentielles qui traduisent des principes physiques fondamentaux tels que la conservation de l'énergie ou la conservation de la quantité de mouvement.

Il est important de remarquer que les équations de conservation précédentes utilisent des formes réduites des densités surfaciques de flux et de la source spécifique (Kuhl and Steinmann, 2003), à savoir :

$$\tilde{\mathbf{J}}_a = \mathbf{J}_a - a \mathbf{J}_m \quad (4.38)$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_a = \mathbf{j}_a - a \mathbf{j}_m \quad (4.39)$$

$$\tilde{r}_a = r_a - a r_m - (\nabla_{\mathbf{x}} a) \cdot \mathbf{J}_m / \varrho_0 = r_a - a r_m - (\nabla_{\mathbf{x}} a) \cdot \mathbf{j}_m / \varrho \quad (4.40)$$

Les définitions précédentes traduisent le fait que l'évolution de la grandeur spécifique a en un point matériel est le résultat du transfert ou de la production de la quantité physique qui lui est associée (e.g. énergie), mais également du transfert ou de la production de masse. Ainsi, les densités surfaciques de flux réduites ($\tilde{\mathbf{J}}_a$ et $\tilde{\mathbf{j}}_a$) et la source spécifique réduite (\tilde{r}_a) excluent les contributions dues au transfert et à la production de matière. Aussi, on peut remarquer que, pour un système fermé ou isolé, l'absence de transfert et de production de masse entraîne l'équivalence entre les formes réduites et conventionnelles des densités surfaciques de flux (i.e. $\tilde{\mathbf{J}}_a = \mathbf{J}_a$ et $\tilde{\mathbf{j}}_a = \mathbf{j}_a$) et des sources spécifiques $\tilde{r}_a = r_a$.

Chapitre 5

Forces et contraintes

Le passage d'un système d'un état vers un autre est dû à l'application d'un ensemble de forces, qui peuvent être aussi bien internes qu'externes. La connaissance des seules forces qui s'exercent sur un système s'avère toutefois souvent insuffisante. En effet, si la notion de force fournit une information quant aux sollicitations appliquées à une structure, elle ne permet pas d'appréhender la sévérité locale d'une sollicitation. Ce dernier aspect est pourtant essentiel pour de nombreux problèmes mécaniques, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser le comportement ou de construire des critères de dimensionnement. La notion de contrainte permet de remédier à ces difficultés. Dans ce chapitre, on s'attache donc à proposer différentes mesures de l'état de contrainte s'exerçant au voisinage d'un point matériel. Les conditions qui décrivent l'équilibre mécanique sont ensuite dérivées à partir de la conservation de la quantité de mouvement.

5.1 Forces de contact et forces de volume

Pour décrire son évolution au cours du temps, il convient de s'intéresser aux forces exercées sur un système par le milieu extérieur. À cette fin, il est commode de distinguer deux types de force :

- des forces de volume, qui s'appliquent aux points matériels situés à l'intérieur du domaine occupé par le système (e.g. gravité);

- des forces de contact, qui s'exercent sur les points matériels situés sur la frontière du système (e.g. frottement).

Pour définir ces différentes forces, il est commode d'introduire des densités volumique ou surfacique de force. Dans la configuration actuelle, la densité volumique de force est représentée par le champ vectoriel \mathbf{b} tandis que la densité surfacique des efforts de contact est considérée au travers du champ vectoriel \mathbf{t} (voir Figure 5.1). Les homologues de ces densités volumique et surfacique de force dans la configuration initiale sont respectivement notés \mathbf{B} pour la densité volumique et \mathbf{T} pour la densité surfacique.

Puisque la force appliquée sur un élément de surface infinitésimal ds est identique dans ces deux configurations (i.e. $\mathbf{t}ds = \mathbf{T}dS$), la relation de transport (2.26) permet d'établir que :

$$\mathbf{T} = J \|\mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{N}\| \mathbf{t} \quad (5.1)$$

où \mathbf{N} est la normale unitaire à l'élément de surface dans la configuration initiale. De manière semblable, la force exercée sur un élément de volume étant indépendante de la configuration retenue (i.e. $\mathbf{b}dv = \mathbf{B}dV$), la relation de transport (2.31) conduit à :

$$\mathbf{B} = J\mathbf{b} \quad (5.2)$$

La résultante \mathcal{F} de l'ensemble des forces, selon qu'elle soit évaluée sur la configuration actuelle ou sur la configuration initiale, s'exprime :

$$\mathcal{F} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} dv + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} ds \quad (5.3)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{B} dV + \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{T} dS \quad (5.4)$$

Aussi, le moment \mathcal{C} généré par les forces de volume et les forces de contact à une position de référence \mathbf{x}_r s'écrit :

$$\mathcal{C} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dv + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \times \mathbf{t} ds \quad (5.5)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{r} \times \mathbf{B} dV + \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{r} \times \mathbf{T} dS \quad (5.6)$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$ représente la distance entre position actuelle et la position de référence.

5.2 Vecteur contrainte

Afin de correctement représenter la sollicitation subie par un point matériel, il est nécessaire de préciser de quelles variables dépendent les densités volumiques (\mathbf{b} et \mathbf{B}) et surfaciques (\mathbf{t} et \mathbf{T}) de force. Il est naturel de supposer que la densité volumique de force ne dépend que des variables de temps et de position. On peut donc écrire de manière formelle :

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \text{ et } \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \quad (5.7)$$

La densité surfacique de force permet de représenter les efforts de contact dus à une action externe sur le système, mais également les efforts internes. En effet, comme l'illustre la Figure 5.2, il est possible de diviser un système en deux sous-parties qui, dans la configuration actuelle, occupent des volumes \mathcal{V}^+ et \mathcal{V}^- séparés par une surface \mathcal{S}^\pm . Il existe alors entre ces sous-parties des forces internes dues aux interactions entre les particules (e.g. atomes,

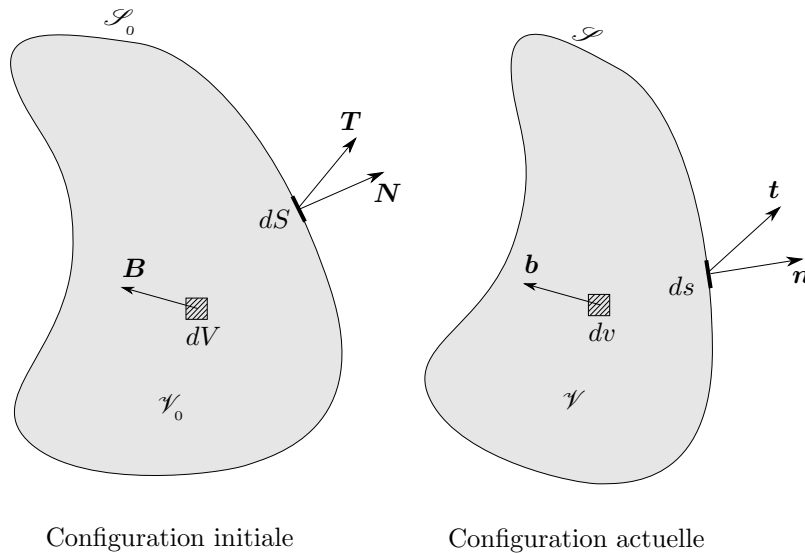


Figure 5.1: Représentation d'un système soumis à des forces de contact et de volume dans les configurations initiale et actuelle.

molécules) qui les composent. Dans le contexte de la mécanique des milieux continus, il n'est pas possible de représenter explicitement les interactions à l'origine des forces internes. On préfère une description simplifiée dans laquelle les forces qui s'appliquent à une frontière intérieure sont modélisées par une densité surfacique de force. On remarque alors que, du point de vue du volume \mathcal{V}^+ , le volume \mathcal{V}^- exerce sur lui des forces de contact au travers de la surface interne \mathcal{S}^\pm . De ce fait, si on considère l'intégralité du volume \mathcal{V} occupé par le système, les forces internes qui s'appliquent à une frontière intérieure sont de même nature que les forces externes de contact. Il est donc commode de les représenter par une densité surfacique de force. Le vecteur \mathbf{t} (ou son homologue \mathbf{T} sur la configuration initiale), usuellement appelé vecteur contrainte, permet donc de modéliser les efforts internes résultant des interactions entre les différents points matériels d'un système.

Pour le vecteur contrainte, qui caractérise la densité surfacique de force, les seules variables de temps et de position ne suffisent pas à complètement représenter la sollicitation appliquée à un point matériel. En effet, comme le suggère la Figure 5.2, pour une même position et un même instant, le vecteur contrainte dépend également de l'élément de surface infinitésimal observé. Au premier ordre, il est possible de considérer que le vecteur contrainte ne dépend que de l'orientation de l'élément de surface étudié¹. Ainsi, si on note \mathbf{n} la normale unitaire à l'élément de surface dans la configuration actuelle et \mathbf{N} son équivalent dans la configuration initiale, on peut écrire de manière formelle que :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \text{ et } \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) \quad (5.8)$$

Il est important de remarquer que le sens des normales unitaires \mathbf{n} et \mathbf{N} est fixé de telle sorte à pointer vers l'extérieur du domaine occupé par le système considéré. L'hypothèse précédente, dont le rôle en mécanique des milieux continus est fondamental, est connue sous le nom de postulat de Cauchy.

¹On pourrait construire une approche plus élaborée en imaginant une dépendance du vecteur contrainte \mathbf{t} par rapport à l'orientation mais également par rapport à la courbure.

5.3 Conservation de la quantité de mouvement

5.3.1 Quantité de mouvement d'un système

On appelle quantité de mouvement le produit de la masse par la vitesse. La définition de la quantité de mouvement portée par un système \mathcal{B} requiert de distinguer la quantité de mouvement linéaire, qui est associée à une translation, de la quantité de mouvement angulaire, qui est associée à une rotation. À un instant t , la quantité de mouvement linéaire totale \mathcal{P} est donnée par :

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{V}} \varrho \mathbf{v} dv = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 \mathbf{v} dV \quad (5.9)$$

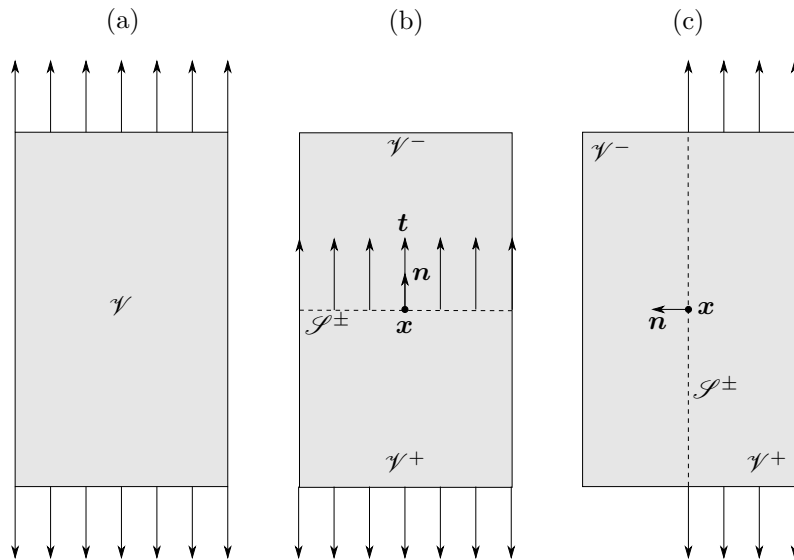


Figure 5.2: Illustration de la dépendance du vecteur contrainte vis-à-vis de l'orientation de l'élément de surface considéré en une position \mathbf{x} . Dans cet exemple, lorsque la normale \mathbf{n} est verticale, le vecteur contrainte \mathbf{t} en \mathbf{x} est identique à celui imposé sur le bord supérieur. Lorsque la normale \mathbf{n} est horizontale, le vecteur contrainte \mathbf{t} en \mathbf{x} est nul.

où ρ est la masse volumique. La quantité de mouvement angulaire totale est représentée par le vecteur \mathcal{L} , elle s'exprime:

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dv = \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV \quad (5.10)$$

5.3.2 Conservation de la quantité de mouvement linéaire

La conservation de la quantité de mouvement est une loi fondamentale de la physique. L'équation de conservation de la quantité de mouvement linéaire traduit le fait que, dans un référentiel galiléen \mathbf{R} , la vitesse à laquelle la quantité de mouvement linéaire change, donnée par $\dot{\mathcal{P}}$, doit être égale à la résultante \mathcal{F} des forces externes. On écrit ainsi que:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} dv + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} ds = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} dv \right) \quad (5.11)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement linéaire peut être réécrite sous la forme matérielle :

$$\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{B} dV + \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{T} dS = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}} \rho_0 \mathbf{v} dV \right) \quad (5.12)$$

5.3.3 Conservation de la quantité de mouvement angulaire

Aussi, la quantité de mouvement angulaire doit être conservée. L'équation de conservation correspondante est obtenue en demandant que, dans un référentiel galiléen \mathbf{R} , la vitesse d'évolution de la quantité de mouvement angulaire $\dot{\mathcal{L}}$ soit égale au moment \mathcal{C} généré par les forces externes. L'équation de conservation globale, dans sa forme spatiale, est donc donnée par :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dv + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \times \mathbf{t} ds = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dv \right) \quad (5.13)$$

Dans le cadre d'une description matérielle, l'équation précédente devient :

$$\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{r} \times \mathbf{B} dV + \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{r} \times \mathbf{T} dS = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV \right) \quad (5.14)$$

5.3.4 Principe d'action réciproque

Les conditions de conservation de la quantité de mouvement permettent de démontrer une propriété particulière du vecteur contrainte \mathbf{t} . Pour ce faire, il suffit de considérer un système \mathcal{B} et de le décomposer en deux sous-systèmes \mathcal{B}^+ et \mathcal{B}^- (voir Figure 5.3). Dans la configuration actuelle, le système \mathcal{B} occupe un domaine \mathcal{V} , sa frontière externe correspond à une surface \mathcal{S} . Le domaine occupé par le sous-système \mathcal{B}^+ est noté \mathcal{V}^+ , sa frontière externe est obtenue par la réunion de \mathcal{S}^+ et \mathcal{S}^\pm . Enfin, par analogie, le sous-système \mathcal{B}^- occupe un domaine \mathcal{V}^- dont la frontière externe est formée par la réunion de \mathcal{S}^- et \mathcal{S}^\pm . On peut remarquer que :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \cup \mathcal{V}^- \quad (5.15)$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^- \quad (5.16)$$

Aussi, si on appelle \mathbf{n} la normale au domaine \mathcal{V}^+ sur la surface \mathcal{S}^\pm alors la normale au domaine \mathcal{V}^- sur cette même surface est $-\mathbf{n}$. De ce fait, l'application de l'équation de conservation de la quantité de mouvement linéaire (5.11) au système \mathcal{B} ainsi qu'aux sous-systèmes \mathcal{B}^+ et \mathcal{B}^- conduit à :

$$\int_{\mathcal{S}^\pm} \mathbf{t}(\mathbf{n}) ds + \int_{\mathcal{S}^\pm} \mathbf{t}(-\mathbf{n}) ds = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Puisque l'égalité précédente doit être vérifiée pour n'importe quelle décomposition d'un système, on en déduit que le vecteur contrainte vérifie nécessairement la condition suivante :

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}) \quad (5.18)$$

La propriété précédente traduit un principe d'action réciproque, i.e. les forces de contact générées par \mathcal{B}^- sur \mathcal{B}^+ sont opposées à celles produites par \mathcal{B}^+ sur \mathcal{B}^- . Le même raisonnement appliqué sur la configuration initiale permet d'établir que :

$$\mathbf{T}(-\mathbf{N}) = -\mathbf{T}(\mathbf{N}) \quad (5.19)$$

5.4 Tenseur des contraintes

5.4.1 Tenseur des contraintes de Cauchy

La définition de l'état de contrainte qui s'applique au voisinage d'un point matériel occupant une position \boldsymbol{x} à un instant t requiert de pouvoir déterminer le vecteur contrainte \boldsymbol{t} quelle que soit l'orientation de l'élément de surface infinitésimale considéré. Il devient ainsi nécessaire de préciser comment le vecteur contrainte \boldsymbol{t} est mis en relation avec le vecteur normal \boldsymbol{n} qui oriente l'élément de surface.

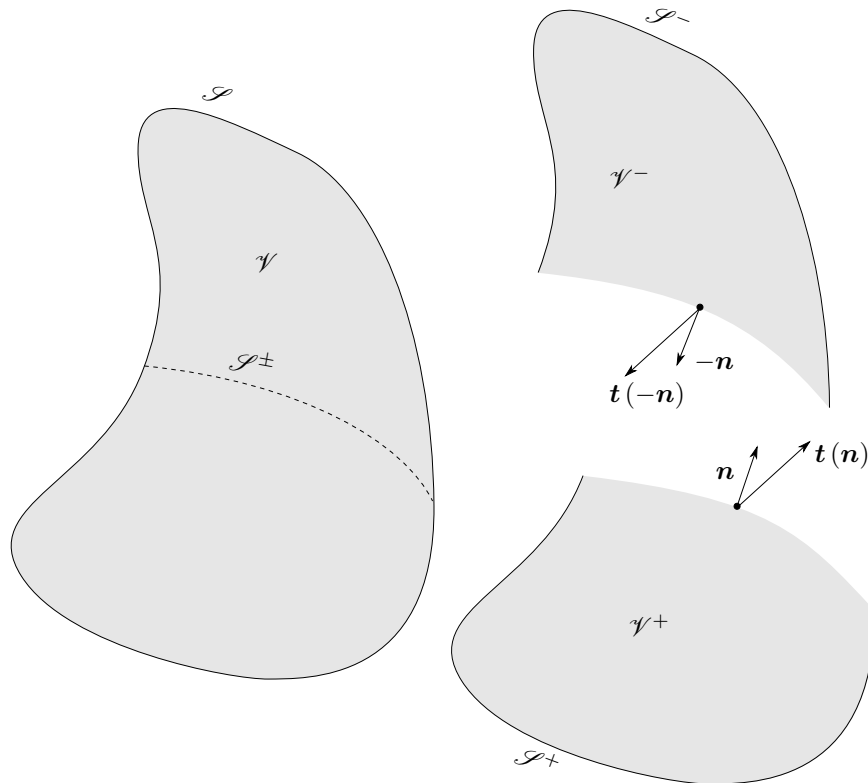


Figure 5.3: Illustration du principe d'action réciproque.

Il est possible de préciser cette relation en considérant un tétraèdre de volume infinitésimal tel que celui représenté sur la Figure 5.4. Le tétraèdre est construit de telle sorte que trois de ses faces soient orthogonales aux vecteurs unitaires \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 qui forment une base orthonormée. La quatrième face est orthogonale à un vecteur unitaire \mathbf{n} . Les aires associées aux différentes faces sont notées ds_1 , ds_2 , ds_3 et ds_n . Par une analyse géométrique, on montre que :

$$ds_1 = n_1 ds_n \quad (5.20)$$

$$ds_2 = n_2 ds_n \quad (5.21)$$

$$ds_3 = n_3 ds_n \quad (5.22)$$

Aussi, si on appelle dh la hauteur du tétraèdre, prise depuis la face de normale \mathbf{n} , le volume dv du tétraèdre est :

$$dv = \frac{1}{3} ds_n dh \quad (5.23)$$

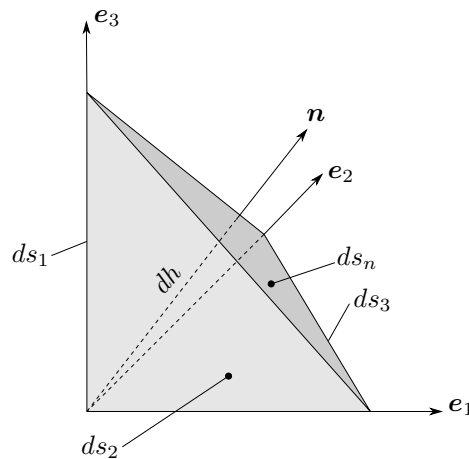


Figure 5.4: Représentation du tétraèdre de Cauchy qui permet de définir le tenseur des contraintes.

La conservation de la quantité de mouvement linéaire impose que la résultante des efforts externes appliqués au tétraèdre soit égale au produit

de sa masse par son accélération. On en déduit donc que² :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) ds_n - \mathbf{t}(\mathbf{e}_1) ds_1 - \mathbf{t}(\mathbf{e}_2) ds_2 - \mathbf{t}(\mathbf{e}_3) ds_3 = \frac{1}{3} (\varrho \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{b}) ds_n dh \quad (5.24)$$

On peut remarquer que, pour un tétraèdre infinitésimal, la hauteur dh tend vers zéro. De ce fait, les termes de volume (i.e. $ds_n dh$) sont négligeables devant les termes de surface (i.e. ds_1, ds_2, ds_3 et ds_n). Ainsi, en mettant de côté la contribution volumique et en utilisant les relations (5.20) à (5.22), la relation précédente devient :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_1) n_1 + \mathbf{t}(\mathbf{e}_2) n_2 + \mathbf{t}(\mathbf{e}_3) n_3 \quad (5.25)$$

$$= \mathbf{t}(\mathbf{e}_j) n_j \quad (5.26)$$

Cette dernière relation montre que le vecteur contrainte \mathbf{t} qui s'exerce sur une face de normale \mathbf{n} n'est pas indépendant des vecteurs contrainte associés aux éléments de surface de normales $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et \mathbf{e}_3 . En d'autres termes, il suffit de connaître les vecteurs contrainte associés à trois éléments de surface infinitésimaux indépendants pour déterminer le vecteur contrainte sur n'importe quel autre élément de surface. Seules neuf valeurs (i.e. les trois composantes des trois vecteurs contrainte) sont donc nécessaires à la définition de l'état de contrainte en un point. Il est ainsi commode de définir un tenseur d'ordre deux, noté $\boldsymbol{\sigma}$, dont les différentes composantes σ_{ij} dans un système de coordonnées cartésiennes sont données par :

$$\sigma_{ij} = \mathbf{t}(\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i \quad (5.27)$$

La relation précédente permet d'exprimer chaque composante t_i du vecteur contrainte qui s'exerce sur un élément de surface de normale \mathbf{n} comme suit :

$$t_i(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_i \quad (5.28)$$

$$= \sigma_{ij} n_j \quad (5.29)$$

Soit, de manière équivalente :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (5.30)$$

On observe donc que le vecteur contrainte \mathbf{t} qui s'exerce sur un élément de surface infinitésimal dépend linéairement de sa normale \mathbf{n} . Dans un système de coordonnées cartésiennes, la composante σ_{ij} représente donc la densité

²Dans un souci de concision, on met de côté la dépendance du vecteur contrainte \mathbf{t} vis-à-vis des variables de position \mathbf{x} et de temps t .

surfacique de force en un point qui s'applique selon la direction \mathbf{e}_i à un élément de surface de normale \mathbf{e}_j . Ce résultat est fondamental puisqu'il permet, à partir du tenseur d'ordre deux $\boldsymbol{\sigma}$, de calculer le vecteur contrainte \mathbf{t} pour n'importe quel élément de surface infinitésimal. Ainsi, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$, parce qu'il permet de définir complètement l'état de contrainte en un point, est appelé tenseur des contraintes de Cauchy.

Il est important de remarquer que le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est une mesure eulérienne représentative de l'état de contrainte dans la configuration actuelle. Il permet en effet de calculer la force infinitésimale $d\mathbf{f}$ qui s'applique sur un élément de surface infinitésimale $d\mathbf{s} = \mathbf{n}ds$ de la configuration actuelle à partir de la relation :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.31)$$

5.4.2 Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchoff

On peut construire une mesure différente de l'état de contrainte en exprimant la force infinitésimale $d\mathbf{f}$ en fonction d'un élément de surface $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS$ défini sur la configuration initiale. Il suffit alors d'exprimer la force infinitésimale en fonction du vecteur contrainte \mathbf{T} défini sur la configuration initiale, cela justifie l'introduction d'une nouvelle mesure de l'état de contrainte représentée par le tenseur du second ordre \mathbf{P} :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} dS = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dS = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.32)$$

Le tenseur du second ordre \mathbf{P} est appelé premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff. Il s'agit d'un tenseur mixte qui permet de calculer la force infinitésimale $d\mathbf{f}$ s'exerçant à l'instant t sur un élément de surface $d\mathbf{S}$ défini sur la configuration initiale. La relation de transport (2.26) permet de relier le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{P} au tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-t} \quad (5.33)$$

Aussi, en appliquant la relation de transport (2.21) à la force infinitésimale $d\mathbf{f}$, il est possible de définir une force infinitésimale $d\mathbf{F}$ qui est définie sur la configuration initiale :

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f} \quad (5.34)$$

$$= \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.35)$$

$$= \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.36)$$

Le tenseur du second ordre \mathbf{S} est appelé second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff. Il constitue une mesure lagrangienne de l'état de contrainte puisqu'il met en relation une force infinitésimale $d\mathbf{F}$ et un élément de surface $d\mathbf{S}$ qui sont tous les deux définis sur la configuration initiale. Il convient de préciser que la force infinitésimale $d\mathbf{F}$ qui conduit à la définition du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff est fictive au sens où ce n'est pas la force $d\mathbf{f}$ qui s'exerce réellement sur un élément de surface. En effet, la force infinitésimale $d\mathbf{F}$ est obtenue à partir de la relation de transport (2.21) qui s'applique à un élément de ligne infinitésimal plutôt qu'à une force infinitésimale. Aussi, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S} est relié aux autres mesures de l'état de contrainte par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad (5.37)$$

$$= J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-t} \quad (5.38)$$

Il faut remarquer que, dans le contexte des transformations infinitésimales, les différentes mesures de l'état de contrainte (i.e. Cauchy, Piola-Kirchoff) sont équivalentes puisque le gradient de la transformation \mathbf{F} reste proche de l'identité.

5.5 Conditions locales d'équilibre

Les Équations (5.11) à (5.14) sont une traduction globale de la conservation de la quantité de mouvement au sein d'un système \mathcal{B} . En pratique, on préfère souvent une version locale, applicable à chaque point matériel du système considéré.

5.5.1 Cas des systèmes ouverts

Pour établir les équations locales de conservation de la quantité de mouvement, il est commode de s'appuyer sur les équations générales présentées au Chapitre 4. Si on conserve les notations introduites dans ce même chapitre, on peut remarquer que la quantité de mouvement linéaire spécifique est donnée par le vecteur vitesse (i.e. $\mathbf{a} = \mathbf{v}$). Aussi, la source spécifique de quantité de mouvement linéaire correspond au rapport entre la densité volumique de force et la masse volumique initiale (i.e. $\mathbf{r}_a = \mathbf{b}/\rho = \mathbf{B}/\rho_0$).

Enfin la densité surfacique de flux de quantité de mouvement est, au signe près, le tenseur des contraintes de Cauchy dans la configuration actuelle (i.e. $\mathbf{j}_a = -\boldsymbol{\sigma}$) ou le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff dans la configuration initiale (i.e. $\mathbf{J}_a = -\mathbf{P}$). Les conditions locales de conservation de la quantité de mouvement linéaire dans leur forme matérielle et dans un référentiel galiléen sont ainsi obtenues par l'application des équations de conservation (4.34) et (4.35), ce qui conduit à :

$$\varrho_0 \boldsymbol{\gamma} - \tilde{\mathbf{P}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (5.39)$$

$$[\varrho_0 \mathbf{v}] Z + [\mathbf{P}] \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (5.40)$$

La forme spatiale, équivalente à la précédente, se déduit des équations générales (4.36) et (4.37), soit :

$$\varrho \boldsymbol{\gamma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (5.41)$$

$$[\varrho \mathbf{v}] \zeta + [\boldsymbol{\sigma} - \varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (5.42)$$

Dans un souci de concision, les équations de conservation précédentes, communément appelées équations d'équilibre utilisent les grandeurs suivantes:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{J}_m \quad (5.43)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \varrho_0 \mathbf{v} r_m - (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{J}_m \quad (5.44)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{j}_m \quad (5.45)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \varrho \mathbf{v} r_m - (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{j}_m \quad (5.46)$$

Pour la quantité de mouvement angulaire, l'approche est semblable à la précédente. Il faut en effet remarquer que la quantité de mouvement angulaire spécifique est le produit vectoriel de la distance par la vitesse (i.e. $\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$). La source spécifique de quantité de mouvement angulaire est donnée par le produit vectoriel de la distance avec le rapport entre la densité volumique de force et la masse volumique initiale (i.e. $\mathbf{r}_a = \mathbf{r} \times \mathbf{b}/\varrho = \mathbf{r} \times \mathbf{B}/\varrho_0$). La densité surfacique de flux dans la configuration actuelle s'exprime à partir du produit vectoriel de la distance et du tenseur des contraintes de Cauchy (i.e. $\mathbf{j}_a = -\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}$). Pour la configuration initiale, la densité surfacique de flux fait intervenir le produit vectoriel de la distance et du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff (i.e. $\mathbf{J}_a = -\mathbf{r} \times \mathbf{P}$). L'utilisation des relations (4.34) et (4.35) permet d'obtenir la condition locale de quantité de mouvement angulaire qui, dans sa forme

matérielle, s'écrit :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^t, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (5.47)$$

$$\mathbf{r} \times [\varrho_0 \mathbf{v}] Z + \mathbf{r} \times [\mathbf{P}] \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (5.48)$$

La forme spatiale de la condition locale de quantité de mouvement angulaire est une application des relations (4.36) et (4.37), ce qui aboutit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{r} \times [\varrho \mathbf{v}] \zeta + \mathbf{r} \times [\boldsymbol{\sigma} - \varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (5.50)$$

Il convient de remarquer que les conditions (5.48) et (5.50), qui s'appliquent à un point singulier, sont automatiquement vérifiées dès lors que les conditions (5.40) et (5.42) sont satisfaites. En d'autres termes, les conditions (5.48) et (5.50) ne fournissent pas d'équations d'équilibre supplémentaires pour un point singulier.

Démonstration Les équations locales de conservation de la quantité de mouvement angulaire (5.47) et (5.49) s'obtiennent en remarquant que, pour la quantité de mouvement angulaire, l'équation de conservation associée à un point régulier s'écrit :

$$\varrho \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{r} \times \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{j}_m \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

En remarquant que $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ et que $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, l'équation précédente peut être ré-écrite sous la forme :

$$\varrho (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{r} \times (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^t) - \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$$

L'utilisation de la condition locale de conservation de la quantité de mouvement linéaire (5.41) pour un point régulier permet de réduire l'équation précédente à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t$$

Aussi, de la relation (5.33), on déduit que :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^t$$

Les équations locales de conservation de la quantité de mouvement angulaire (5.47) et (5.49) associées à un point régulier prennent une forme relativement simple (voir démonstration précédente). Elles indiquent notamment que le

tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique. De la relation (5.38), on déduit que le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff est également symétrique, i.e. :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^t$$

5.5.2 Cas des systèmes fermés ou isolés

Il existe de nombreuses situations pratiques qui n'impliquent pas de transfert ou de production de masse. Dans de tels cas, les équations locales de conservation de la quantité de mouvement prennent une forme simple. En particulier, en l'absence de transfert ou de production de masse (i.e. $\mathbf{J}_m = \mathbf{0}$ et $r_m = 0$), la conservation de la quantité de mouvement nécessite que :

$$\varrho_0 \gamma - \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{B} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{L}_0 \quad (5.51)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^t, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{L}_0 \quad (5.52)$$

$$[\varrho_0 \mathbf{v}] Z + [\mathbf{P}] \cdot \mathbf{M} = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{L}_0 \quad (5.53)$$

La forme spatiale des équations locales de conservation de la quantité de mouvement est donnée par :

$$\varrho \gamma - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L} \quad (5.54)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L} \quad (5.55)$$

$$[\varrho \mathbf{v}] \zeta + [\boldsymbol{\sigma} - \varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad (5.56)$$

5.6 Interprétation des mesures de contrainte

5.6.1 Contraintes normales

Comme l'illustre la Figure 5.5, le vecteur contrainte \mathbf{t} qui s'exerce sur un élément de surface infinitésimal de normale \mathbf{n} fait intervenir une contribution normale \mathbf{t}_n qui est orthogonale à l'élément de surface. Sur la configuration actuelle, la contribution normale \mathbf{t}_n est donnée par:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{n}) = (\mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (5.57)$$

$$= (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (5.58)$$

$$= \sigma \mathbf{n} \quad (5.59)$$

où la grandeur $\sigma = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ est la contrainte normale associée à un élément de surface de normale unitaire \mathbf{n} dans la configuration actuelle.

Les calculs précédents, réalisés sur la configuration actuelle, peuvent être reconduits de manière semblable sur la configuration initiale. On est alors amené à déterminer la contribution normale \mathbf{T}_n au vecteur contrainte \mathbf{T} qui s'exerce sur un élément de surface infinitésimal de normale \mathbf{N} . La contribution \mathbf{T}_n s'exprime:

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{N}) = (\mathbf{T}(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \quad (5.60)$$

$$= (\mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \quad (5.61)$$

$$= \Sigma \mathbf{N} \quad (5.62)$$

où $\Sigma = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$ désigne la contrainte normale pour un élément de surface dont la normale unitaire est \mathbf{N} dans la configuration initiale.

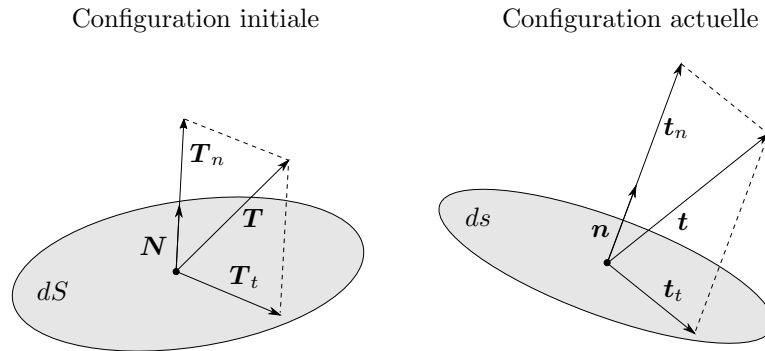


Figure 5.5: Décomposition du vecteur contrainte associé à un élément de surface infinitésimal de la configuration initiale (gauche) ou de la configuration actuelle (droite) en contributions normale et tangentielle.

La relation précédente indique que la projection d'une mesure de contrainte selon une direction représente la densité surfacique d'effort normal s'appliquant sur un élément de surface orthogonal à cette même direction. Ainsi, tel qu'illustré par la Figure 5.6, dans un système de coordonnées cartésiennes, les composantes du type σ_{ii} ou P_{ii} sont appelées contraintes normales. Elles représentent la densité surfacique de force qui s'applique dans la direction \mathbf{e}_i sur un élément de surface infinitésimal de normale \mathbf{e}_i .

Dans le cas du tenseur des contraintes de Cauchy, la composante σ_{ii} caractérise la contrainte normale associée à un élément de surface dont la normale actuelle est \mathbf{e}_i . A l'opposé, pour le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, la composante P_{ii} correspond à la contrainte normale pour un élément de surface dont la normale était initialement \mathbf{e}_i .

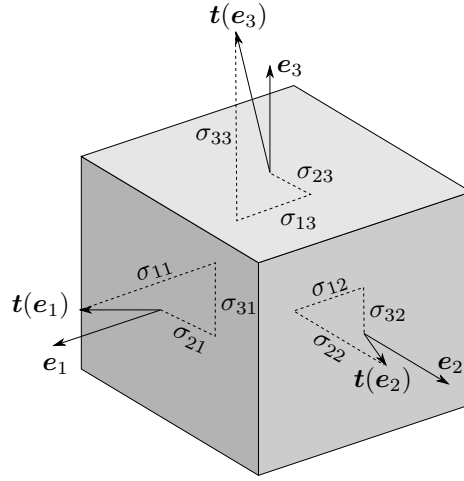


Figure 5.6: Représentation des différentes composantes du tenseur des contraintes de Cauchy pour un point matériel dans un système de coordonnées cartésiennes.

5.6.2 Contraintes tangentielles

La Figure 5.5 montre que le vecteur contrainte \mathbf{t} fait également intervenir une contribution tangentielle, notée \mathbf{t}_t , contenue dans l'élément de surface considéré. La contribution tangentielle \mathbf{t}_t est simplement obtenue à partir de la différence entre le vecteur contrainte \mathbf{t} et la contribution normale \mathbf{t}_n :

$$\mathbf{t}_t(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{n}) - \mathbf{t}_n(\mathbf{n}) \quad (5.63)$$

$$= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (5.64)$$

La contrainte tangentielle τ , i.e. la densité de surfacique de force qui s'exerce parallèlement à l'élément de surface de normale \mathbf{n} , correspond à la norme

de \mathbf{t}_t , soit :

$$\tau = \sqrt{\mathbf{t}_t \cdot \mathbf{t}_t} \quad (5.65)$$

$$= \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - \sigma^2} \quad (5.66)$$

Si on préfère la configuration initiale à la configuration actuelle, la contribution tangentielle \mathbf{T}_t au vecteur contrainte \mathbf{T} s'écrit :

$$\mathbf{T}_t(\mathbf{N}) = \mathbf{T}(\mathbf{N}) - \mathbf{T}_n(\mathbf{N}) \quad (5.67)$$

$$= \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \quad (5.68)$$

La norme du vecteur \mathbf{T}_t correspond à la contrainte tangentielle Υ qui agit sur un élément de surface dont la normale est \mathbf{N} dans la configuration initiale. La contrainte tangentielle Υ est donc donnée par :

$$\Upsilon = \sqrt{\mathbf{T}_t \cdot \mathbf{T}_t} \quad (5.69)$$

$$= \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} - \Sigma^2} \quad (5.70)$$

On peut remarquer que, par construction, la contribution tangentielle, représentée par \mathbf{t}_t ou \mathbf{T}_t , s'exerce selon une direction nécessairement orthogonale à la normale de l'élément de surface considéré.

La projection d'une mesure de contrainte sur un couple de directions mutuellement orthogonales caractérise donc la densité surfacique d'effort tangentiel s'appliquant selon la première direction sur un élément de surface dont la normale est donnée par la seconde direction. De ce fait, les composantes du type σ_{ij} ou P_{ij} (avec $i \neq j$) sont nommées contraintes tangentielles (ou contraintes de cisaillement). Comme le montre la Figure 5.6, elles mesurent la densité surfacique de force s'exerçant sur un élément de surface de normale \mathbf{e}_j selon la direction \mathbf{e}_i . Là encore, la différence entre σ_{ij} et P_{ij} est liée à la configuration à laquelle est définie la normale \mathbf{e}_j .

5.6.3 Contraintes principales

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S} ont en commun d'être représentés par des tenseurs d'ordre deux symétriques. De ce fait, de manière analogue à ce qui a été

fait pour les mesures de déformation (voir 3.1.5), il est toujours possible de décomposer ces tenseurs en éléments propres comme suit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (5.71)$$

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^3 S_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha} \quad (5.72)$$

Les vecteurs propres \mathbf{n}_{α} ou \mathbf{N}_{α} définissent les directions principales de contrainte tandis que les valeurs propres σ_{α} ou S_{α} représentent les contraintes principales. Il est important de remarquer que la décomposition précédente n'est pas systématiquement applicable au premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{P} qui, par construction, n'est pas nécessairement symétrique.

La décomposition en éléments propres est souvent utile, notamment pour la construction de critères de dimensionnement basés sur l'observation du champ de contrainte. Plus spécifiquement, pour un point matériel, il est parfois nécessaire de déterminer la contrainte normale maximale. Il est possible de montrer que la contrainte normale maximale σ_{\max} ou S_{\max} correspond à la contrainte principale maximale:

$$\sigma_{\max} = \max_{\alpha} (\sigma_{\alpha}) \quad (5.73)$$

$$S_{\max} = \max_{\alpha} (S_{\alpha}) \quad (5.74)$$

Aussi, certains critères de dimensionnement demandent de déterminer la contrainte tangentielle maximale. La contrainte tangentielle maximale τ_{\max} ou T_{\max} s'exprime en fonction des contraintes principales à partir de la relation:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \max_{\alpha, \beta} (|\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}|) \quad (5.75)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \max_{\alpha, \beta} (|S_{\alpha} - S_{\beta}|) \quad (5.76)$$

Les relations précédentes, qui permettent de déterminer soit la contrainte normale maximale, soit la contrainte tangentielle maximale sont à la base de nombreux critères en mécanique des milieux continus (e.g. critère de rupture, critère de plasticité).

Les contraintes principales, dès lors que l'état de contrainte est représenté par un tenseur symétrique, peuvent être visualisées sur la représentation

graphique de Mohr. Cette dernière, qui est présentée en Annexe B, fournit une méthode graphique pour déterminer le vecteur contrainte qui s'exerce sur un élément de surface en fonction de son orientation.

Comme pour les mesures de déformations (voir 3.1.5), il est possible de calculer les parties positives et négatives de l'état de contrainte à partir des contraintes principales et des directions principales. Ainsi, pour le tenseur des contraintes de Cauchy et pour le second tenseur de Piola-Kirchoff, les parties positives sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma}_+ = \sum_{\alpha} \langle \sigma_{\alpha} \rangle_+ \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (5.77)$$

$$\mathbf{S}_+ = \sum_{\alpha} \langle S_{\alpha} \rangle_+ \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha} \quad (5.78)$$

Les parties négatives ($\boldsymbol{\sigma}_-$ et \mathbf{S}_-) s'obtiennent de manière identique en retenant uniquement les contributions des contraintes principales négatives. La décomposition en parties négative et positive est additive au sens où :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_- \quad (5.79)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_- \quad (5.80)$$

5.6.4 Contraintes sphériques et déviatoriques

Pour décrire le comportement des matériaux solides, il est parfois utile de pouvoir décomposer une mesure de contrainte en parties déviatorique (indice dev) et sphérique (indice sph). La partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy représente sa capacité à provoquer des déformations auxquelles n'est associé aucun changement de volume, i.e. des déformations déviatoriques. À l'opposé, la partie sphérique du tenseur des contraintes de Cauchy (également appelée partie hydrostatique) définit sa capacité à engendrer des déformations qui correspondent uniquement à une variation de volume, i.e. des déformations sphériques.

Les parties sphérique $\boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}}$ et déviatorique $\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}$ du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (5.81)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (5.82)$$

On peut remarquer que la décomposition précédente garantit l'égalité $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}$. Le terme $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$ qui intervient dans les relations précédentes correspond à l'opposé de la pression hydrostatique, qui est largement utilisée pour l'étude des fluides. Aussi, les parties déviatorique et sphérique d'un tenseur du second ordre sont mutuellement orthogonales, ce qui pour le tenseur des contraintes de Cauchy signifie que :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}} : \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = 0 \quad (5.83)$$

5.6.5 Coordonnées de Lode

Pour une mesure de contrainte telle que le tenseur des contraintes de Cauchy, les contraintes principales sont des invariants. Contrairement aux composantes du tenseur des contraintes de Cauchy, les contraintes principales restent en effet inchangées si une rotation est appliquée au système de coordonnées utilisé. Pour évaluer la sévérité d'un état de contraintes, d'autres invariants du tenseur des contraintes de Cauchy sont parfois adoptés. Les coordonnées de Lode (notées z , r et θ) forment un ensemble de trois invariants parfois évalués lorsqu'il s'agit d'établir si les conditions susceptibles de conduire à l'endommagement ou la plastification d'un point matériel sont réunies.

La première coordonnée de Lode z représente la partie hydrostatique du tenseur des contraintes. Plus spécifiquement, puisque la contribution hydrostatique est colinéaire au tenseur identité, la coordonnée axiale z est donnée par la projection suivante du tenseur des contraintes :

$$z = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m}_z = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{3}} \quad (5.84)$$

où \mathbf{m}_z est un tenseur unitaire (i.e. $\|\mathbf{m}_z\| = 1$) tel que :

$$\mathbf{m}_z = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{3}} \quad (5.85)$$

Dans l'espace des contraintes principales, la direction tensorielle \mathbf{m}_z définit un axe hydrostatique (voir Figure 5.7). Tout plan perpendiculaire à cet axe est alors une isosurface de pression hydrostatique. Le plan déviatorique correspond au cas particulier $z = 0$, i.e. à l'ensemble des états de contraintes pour lesquels la partie sphérique est nulle.

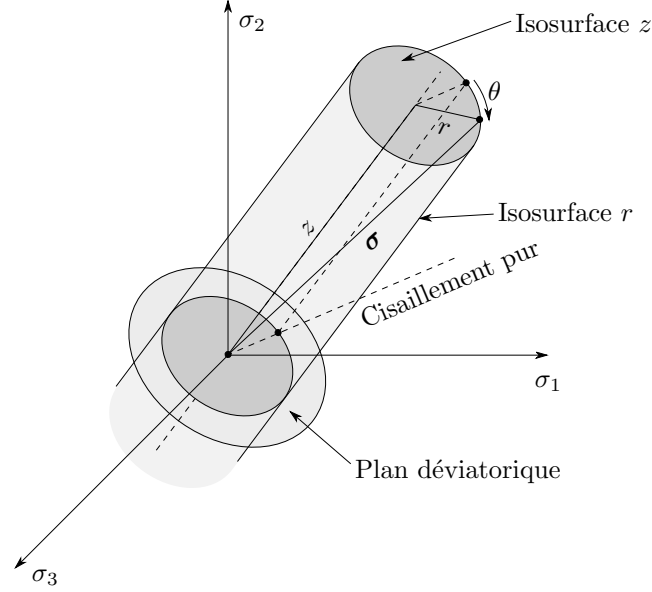


Figure 5.7: Représentation d'un état de contrainte σ dans l'espace des contraintes principales à partir des coordonnées de Lode z , r et θ .

La seconde coordonnée de Lode r est une coordonnée radiale qui mesure l'importance des contraintes déviatoriques. Elle est évaluée par :

$$r = \|\sigma_{\text{dev}}\| = \sqrt{\|\sigma\|^2 - \|\sigma_{\text{sph}}\|^2} = \sqrt{\|\sigma\|^2 - z^2} = \sigma : \mathbf{m}_r \quad (5.86)$$

où \mathbf{m}_r est le tenseur unitaire orthogonal à \mathbf{m}_z défini à partir de la partie déviatorique de l'état de contrainte par :

$$\mathbf{m}_r = \frac{\sigma_{\text{dev}}}{\|\sigma_{\text{dev}}\|} \quad (5.87)$$

Comme l'illustre la Figure 5.7, l'isosurface qui correspond à une valeur constante de la coordonnée radiale r est représentée par un cylindre d'axe \mathbf{z} dans l'espace des contraintes principales.

Il est possible d'imaginer une infinité d'états de contrainte pour lesquels les coordonnées axiale z et radiale r sont fixées, ce qui correspond à un cercle dans l'espace des contraintes principales. Afin de préciser la position d'un état de contrainte dans l'espace des contraintes principales, il est donc

nécessaire d'introduire une troisième coordonnée. Selon la proposition de Lode (1926), cette dernière coordonnée prend la forme d'un angle noté θ qui permet *in fine* de représenter un état de contrainte dans un système de coordonnées cylindriques (voir Figure 5.7). L'angle de Lode est évalué à partir de la relation :

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(3\sqrt{6} \frac{\det(\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}})}{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}\|^3} \right) \quad (5.88)$$

L'angle de Lode est nécessairement compris entre $-\pi/6$ et $\pi/6$. Le cas particulier où il est nul correspond à une situation où le tenseur des contraintes déviatoriques correspond à celui obtenu pour un état de contrainte de cisaillement pur. L'angle de Lode peut ainsi être perçu comme une mesure de l'écart entre la partie déviatorique d'un état de contrainte quelconque et celle de même norme qui correspondrait à un état de cisaillement pur. Les angles de Lode obtenus pour quelques modes de chargement particuliers sont donnés dans le Tableau 5.1.

Remarque Dans la littérature, on peut parfois rencontrer les définitions suivantes de l'angle de Lode :

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(3\sqrt{6} \frac{\det(\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}})}{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}\|^3} \right) = \frac{\pi}{6} - \theta \\ \theta'' &= \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-3\sqrt{6} \frac{\det(\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}})}{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}\|^3} \right) = -\theta \end{aligned}$$

Si ces définitions sont différentes de celle donnée par la relation (5.88), elles reposent sur une idée similaire, à savoir caractériser le mode de sollicitation appliqué à un point matériel.

Une manière alternative d'interpréter l'angle de Lode consiste à considérer que les contraintes principales sont ordonnées de sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. L'angle de Lode fournit alors une indication quant à la valeur de la contrainte principale intermédiaire σ_2 par rapport aux valeurs maximale σ_1 et minimale σ_3 . De manière générale, l'angle de Lode permet de distinguer des états de contrainte identiques du point de vue de la norme de leurs parties déviatoriques, mais néanmoins différents au sens des contraintes principales. À titre illustratif, l'évolution de l'angle de Lode en fonction de la valeur relative de la contrainte principale intermédiaire est présentée sur la Figure 5.8.

État de contrainte	z	r	θ
Traction uniaxiale			
$\sigma_1 = \sigma > 0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$	$\sigma/\sqrt{3}$	$\sigma\sqrt{2/3}$	$\pi/6$
Traction équibiaxiale			
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma > 0$ et $\sigma_3 = 0$	$2\sigma/\sqrt{3}$	$\sigma\sqrt{2/3}$	$-\pi/6$
Cisaillement pur			
$\sigma_1 = \sigma > 0, \sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = -\sigma < 0$	0	$\sigma\sqrt{2}$	0
Compression uniaxiale			
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \sigma < 0$	$\sigma/\sqrt{3}$	$-\sigma\sqrt{2/3}$	$-\pi/6$
Compression équibiaxiale			
$\sigma_1 = 0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma < 0$	$2\sigma/\sqrt{3}$	$-\sigma\sqrt{2/3}$	$\pi/6$

Tableau 5.1: Coordonnées de Lode pour quelques états de contrainte particuliers. Pour la classification des états de contrainte, on suppose que les contraintes principales sont ordonnées de sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

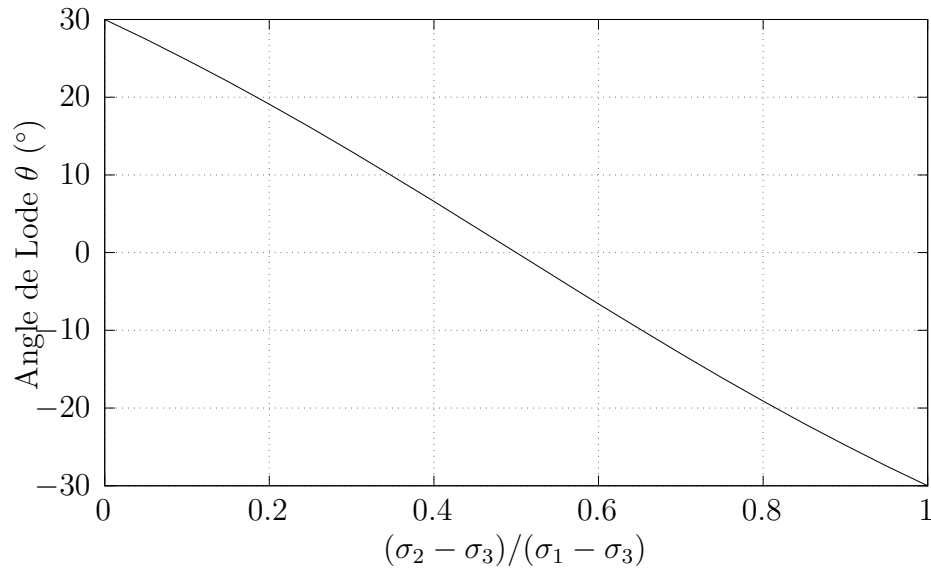


Figure 5.8: Evolution de l'angle de Lode θ en fonction du rapport $(\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$. On suppose que les contraintes principales sont ordonnées de sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

5.7 Etats de contrainte particuliers

À titre illustratif, on présente dans ce qui suit quelques états de contrainte particuliers. Ces états de contrainte, parce qu'ils correspondent souvent à des situations simples, sont parfois reproduits expérimentalement pour caractériser le comportement mécanique des matériaux solides.

5.7.1 Traction (ou compression) uniaxiale

Un point matériel est soumis à un état de traction (ou compression) uniaxiale s'il est possible de mettre le tenseur des contraintes sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad (5.89)$$

où \mathbf{m} est un vecteur unitaire qui définit la direction de traction et σ est la contrainte normale appliquée sur l'élément de surface de normale \mathbf{m} . Il convient de noter que la traction uniaxiale correspond au cas où σ est positif tandis que la compression uniaxiale est obtenue lorsque σ est négatif.

5.7.2 Cisaillement

L'état de contrainte correspond à du cisaillement simple si le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ s'exprime comme suit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau (\mathbf{k} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{k}) \quad (5.90)$$

où \mathbf{k} et \mathbf{m} sont deux vecteurs mutuellement orthogonaux (i.e. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$) et τ représente la contrainte tangentielle s'appliquant selon la direction \mathbf{k} sur l'élément de surface de normale \mathbf{m} (et vice-versa). On peut remarquer que l'état de contrainte associé au cisaillement simple est purement déviatorique.

5.7.3 Contraintes planes

L'état de contrainte est qualifié de plan lorsqu'il existe un élément infinitésimal de surface pour lequel le vecteur contrainte est nul. Ainsi, si on considère un ensemble de trois vecteurs unitaires \mathbf{k} , \mathbf{m} et \mathbf{n} qui sont

mutuellement orthogonaux, le tenseur des contraintes qui correspond à un état plan s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau (\mathbf{k} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{k}) + \sigma \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \eta \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad (5.91)$$

On remarque que, sur une surface de normale \mathbf{n} , le vecteur contrainte $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ est nécessairement nul.

5.7.4 Compression (ou traction) hydrostatique

La compression (ou traction) hydrostatique est un état de contrainte purement sphérique pour lequel le tenseur des contraintes s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma} = p \mathbf{1} \quad (5.92)$$

La variable p est usuellement appelée pression hydrostatique. Elle caractérise la partie sphérique du tenseur des contraintes.

Remarque Selon la convention adoptée ici, souvent celle utilisée en mécanique des solides, la pression hydrostatique est positive lorsque la partie sphérique de l'état de contrainte favorise une augmentation du volume. Cette définition correspond à l'opposé de celle adoptée pour l'étude des fluides selon laquelle une pression positive provoque une réduction du volume.

Chapitre 6

Concepts fondamentaux de thermodynamique

La compréhension du comportement des matériaux nécessite de s'intéresser aux échanges et aux conversions d'énergie susceptibles d'avoir lieu au cours de la transformation d'un système. Ces transferts ou conversions d'énergie ne peuvent toutefois être quelconques, ils doivent satisfaire à un ensemble de restrictions qui font l'objet de la thermodynamique. Parce que ces restrictions sont essentielles, notamment lorsqu'il s'agit de correctement décrire le comportement des matériaux et des structures, on rappelle ici quelques notions fondamentales de thermodynamique.

6.1 Approche macroscopique

Parce que le nombre de particules contenues au sein d'un système est généralement extrêmement élevé¹, il est impossible de le décrire en précisant l'état (e.g. position, vitesse) de chacune des particules qui le composent. Si on peut espérer caractériser un système avec différents dispositifs de mesure (e.g. jauge de déformation, thermocouple), la résolution spatiale de tels dispositifs dépasse néanmoins largement la taille d'une particule et la résolution temporelle excède de loin les échelles de temps atomiques. Les

¹À titre d'exemple, le nombre d'atomes contenus dans 1 g d'aluminium est de l'ordre de 10^{22} .

quantités mesurées par ces différents dispositifs, qui résultent donc d'une double opération de moyenne, à la fois spatiale et temporelle, sont appelées observables macroscopiques. Ce point de vue macroscopique a été adopté dans les chapitres précédents; les grandeurs mécaniques (e.g. déformation, contrainte) qui y ont été introduites sont en effet à considérer comme des observables macroscopiques.

6.2 Équilibre thermodynamique

Tous les systèmes, lorsqu'ils sont isolés, ont une tendance naturelle à évoluer vers un état terminal stable où les observables macroscopiques n'évoluent plus. Cet état terminal est appelé état d'équilibre. Le temps nécessaire à un système pour atteindre l'état d'équilibre est souvent très long, la plupart des systèmes réels ne sont donc pas dans un véritable état d'équilibre. Toutefois, suite à une perturbation qui le conduit hors de son état d'équilibre, un système va évoluer d'abord très rapidement, puis ensuite beaucoup plus lentement vers un nouvel état d'équilibre. L'état intermédiaire dans lequel se trouve le système suite à cette première phase rapide de retour vers l'équilibre est dit métastable.

6.3 Variables d'états

Lorsqu'un système se trouve dans un état d'équilibre thermodynamique, on postule qu'il est possible d'en connaître l'ensemble des propriétés thermodynamiques à partir d'un nombre fini d'observables macroscopiques indépendants les uns des autres. Ces observables macroscopiques particuliers sont appelés des variables d'état.

Les variables d'état sont de deux types différents. Les variables d'état sont dites externes² lorsque leur valeur peut être imposée au système considéré par l'extérieur. Le volume peut par exemple constituer une variable externe pour un système. Par opposition, une variable d'état est qualifiée d'interne lorsque sa valeur ne peut être directement contrôlée. Une variable d'endommagement, qui mesurerait la densité de fissures au sein d'un

²Les variables d'état externes sont également appelées variables d'état contrôlables.

système, est un exemple de variable interne dont la valeur ne peut être directement ajustée. Lorsque l'évolution d'un système est réversible, seules les variables d'état externes sont nécessaires à sa description. Si l'évolution n'est plus réversible, la description de l'état fait intervenir des variables internes qui viennent s'ajouter aux variables externes. Comme leur nom le suggère, les variables d'état internes permettent de représenter les changements de structure interne susceptibles d'intervenir au cours de l'histoire d'un système (e.g. endommagement, plasticité).

La nature (scalaire ou tensorielle) ainsi que le nombre de variables d'états qu'on souhaite considérer dépend largement de l'acuité recherchée lorsqu'il s'agit de modéliser un système. Aussi, dans une démarche de modélisation, il n'est pas nécessaire de donner une signification physique aux variables internes. Elles peuvent aussi bien représenter une caractéristique microstructurale mesurable (e.g. densité de fissures, fraction de phase) qu'être introduites dans une démarche phénoménologique qui vise à reproduire un ensemble d'observations expérimentales.

Pour un système en évolution, il convient de se poser la question des variables qui définissent son état à chaque instant quand bien même le système n'est pas dans un état d'équilibre. Dans ce qui suit, on adopte le postulat de l'état local. Plus spécifiquement, on considère (i) que l'état actuel d'un système en évolution est décrit par les mêmes variables d'état qu'à l'équilibre et (ii) que l'état actuel ne dépend pas de la vitesse à laquelle les variables d'état changent.

Aussi, les systèmes considérés dans la suite sont des milieux continus constitués d'une infinité de points matériels. Ces systèmes particuliers sont traités comme la réunion d'une infinité de sous-systèmes correspondant aux différents points matériels. Si le postulat de l'état local est adopté pour chacun de ces sous-systèmes, un point matériel, qu'il soit en évolution ou pas, est représenté par les mêmes variables d'état. Dans cette approche, qui constitue le point de départ de la thermodynamique des milieux continus, les variables d'état, donc les grandeurs thermodynamiques telles que l'énergie et la température, dépendent alors des variables de position.

6.4 Energie interne et énergie cinétique

L'énergie contenue au sein d'un système mesure sa capacité à produire un travail mécanique, à générer de la chaleur ou à modifier sa structure interne. Pour discuter des restrictions thermodynamiques qui s'appliquent à un système, il est utile de décomposer son énergie totale \mathcal{E} en la somme d'une quantité d'énergie cinétique \mathcal{K} et d'une énergie interne \mathcal{U} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{U} \quad (6.1)$$

L'énergie cinétique est celle que possède le système en raison de sa vitesse d'ensemble. L'énergie interne est celle qui est contenue au sein du système sous forme d'agitation thermique³ (e.g. le mouvement désordonné des particules) ou sous forme d'énergie potentielle (e.g. via les liaisons interatomiques).

Il est important de remarquer que l'énergie, quelle que soit sa forme, est une grandeur extensive⁴. Pour évaluer l'énergie interne \mathcal{U} d'un système, il est donc commode d'introduire une énergie interne spécifique, notée u ⁵ telle que :

$$\mathcal{U} = \int_{\mathcal{V}} \varrho u \, dv = \int_{\mathcal{V}} U \, dv \quad (6.2)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 u \, dV = \int_{\mathcal{V}_0} U_0 \, dV \quad (6.3)$$

où les grandeurs U ou U_0 correspondent à la densité volumique d'énergie interne en un point matériel.

Aussi, dans un référentiel galiléen, l'énergie cinétique \mathcal{K} d'un système est

³L'agitation thermique est en fait une forme d'énergie cinétique. Elle apparaît dans l'énergie interne car les mouvements à l'origine de l'agitation thermique ne sont pas coopératifs et ne provoquent donc pas de déplacement d'ensemble du système.

⁴Une variable extensive voit sa valeur évoluer en fonction du nombre de particules contenues dans le système (e.g. volume). Une variable extensive associée à deux sous-systèmes identiques voit donc sa valeur doubler si les deux sous-systèmes sont réunis au sein d'un seul et même système. Par opposition, une variable intensive est indépendante de la quantité de matière contenue à l'intérieur du système (e.g. pression hydrostatique).

⁵Les grandeurs spécifiques, puisqu'elles sont définies par unité de masse, prennent des valeurs identiques sur les configurations initiale et actuelle.

obtenue à partir de la densité de masse et du champ de vitesse comme suit :

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv \quad (6.4)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (6.5)$$

Les relations précédentes indiquent que l'énergie cinétique spécifique k est donnée par :

$$k = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (6.6)$$

La densité d'énergie cinétique, selon qu'elle soit associée à la configuration initiale ou la configuration actuelle, s'écrit donc :

$$K = \rho k \quad (6.7)$$

$$K_0 = \rho_0 k \quad (6.8)$$

6.5 Entropie

Lorsqu'un système rejoint un état d'équilibre, il est naturel de considérer qu'il existe une grandeur qui atteint une valeur extrême. Cette grandeur thermodynamique particulière notée \mathcal{S} est appelée entropie. Parmi tous les états satisfaisants aux contraintes cinématiques imposées, l'état d'équilibre thermodynamique d'un système isolé est celui qui correspond à la valeur d'entropie maximale. L'entropie est une fonction continue et dérivable des différentes variables d'état. Aussi, puisqu'il s'agit d'une grandeur extensive, sa valeur globale pour un système est obtenue à partir d'un champ d'entropie spécifique s tel que :

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \rho s dv = \int_{\mathcal{V}} S dv \quad (6.9)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 s dV = \int_{\mathcal{V}_0} S_0 dV \quad (6.10)$$

Pour un point matériel, la densité d'entropie est notée S ou S_0 selon la configuration (actuelle ou initiale) retenue.

L'entropie et l'énergie interne sont des fonctions d'état, i.e. des grandeurs qui dépendent uniquement de l'état du système. Les dérivées temporelles

des variables d'état n'interviennent donc pas dans ces fonctions puisque, si ces dérivées fournissent une information sur le chemin suivi pour arriver à un certain état, elles ne représentent pas pour autant ce même état. Dans un contexte thermomécanique, la liste des variables d'état dont dépend l'entropie spécifique s inclut l'énergie interne spécifique u , le gradient de la transformation \mathbf{F} , éventuellement la masse volumique ρ_0 si le système est ouvert, ainsi qu'un nombre n de variables internes (notées x_k avec k variant de 1 à n dans ce qui suit). On peut donc formellement écrire que :

$$s = \hat{s}(u, \mathbf{F}, \rho_0, x_1, \dots, x_n) \quad (6.11)$$

La variation d'entropie par unité de temps est donc donnée par :

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial s}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial s}{\partial \rho_0} \dot{\rho}_0 + \sum_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.12)$$

Pour un point matériel isolé (donc $\dot{u} = 0$ et $\dot{\rho}_0 = 0$) auquel on impose un état de déformation constant (donc $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$), l'entropie spécifique prend une valeur maximale lorsque l'équilibre est atteint (voir Figure 6.1). À l'équilibre, les dérivées partielles $\partial s / \partial x_i$ sont donc nulles et la matrice hessienne $s_{,ij}$, dont les coefficients sont donnés par les dérivées secondes $\partial^2 s / \partial x_i \partial x_j$, est définie négative. Ces deux conditions assurent que l'équilibre d'un point matériel soumis aux contraintes décrites précédemment correspond à une valeur extrême, plus précisément maximale, de l'entropie spécifique.

Plutôt que d'exprimer l'entropie spécifique en fonction de l'énergie interne spécifique, on préfère parfois adopter le point de vue réciproque, i.e. exprimer l'énergie interne spécifique en fonction de l'entropie spécifique, qui joue alors le rôle de variable d'état externe, ce qui s'écrit :

$$u = \hat{u}(s, \mathbf{F}, \rho_0, x_1, \dots, x_n) \quad (6.13)$$

Remarque Certaines approches de modélisation non-locales utilisent à la fois des variables d'état et leurs gradients pour représenter l'état d'un point matériel (e.g. gradient de déformation plastique). Dans une telle démarche de modélisation, l'énergie interne spécifique prend donc la forme suivante :

$$u = \hat{u}(s, \mathbf{F}, \rho_0, x_1, \dots, x_n, \nabla_{\mathbf{x}} x_1, \dots, \nabla_{\mathbf{x}} x_n)$$

L'intérêt de ces approches est de pouvoir décrire un effet de voisinage, au sens où l'état d'un point matériel dépend, *via* les gradients des variables

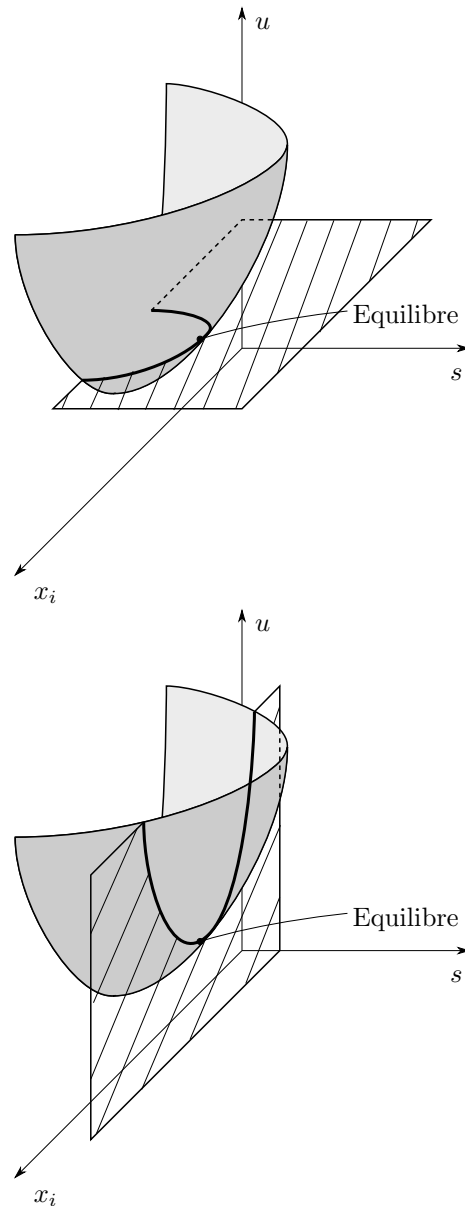


Figure 6.1: Section de l'espace des configurations thermodynamiques utilisant l'entropie spécifique, l'énergie interne spécifique et une variable interne comme coordonnées. Lorsque l'énergie interne spécifique est constante, la configuration d'équilibre correspond à la valeur d'entropie spécifique maximale. Lorsque l'entropie spécifique est constante, la configuration d'équilibre correspond à la valeur d'énergie interne spécifique minimale.

internes, de l'état des points matériels environnants. Ces approches sont parfois injustement appelées approches à gradients de variables internes. Elles nécessitent en effet d'introduire des équations d'équilibre et des conditions aux limites supplémentaires. De telles conditions aux limites suggèrent que les variables d'état auxquelles les gradients sont juxtaposés deviennent contrôlables. Elles doivent donc être considérées comme des variables externes.

La dérivation de l'énergie interne spécifique par rapport au temps conduit à :

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \dot{\rho}_0 + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.14)$$

Comme l'illustre la Figure 6.1, en l'absence de transfert de masse (donc $\dot{\rho}_0 = 0$) et si l'état de déformation et l'entropie spécifique sont constants (donc $\dot{s} = 0$ et $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$), l'état d'équilibre correspond à la valeur minimale de l'énergie interne spécifique.

Démonstration Pour montrer que l'énergie interne spécifique est minimale, il convient de s'appuyer les résultats obtenus pour l'entropie spécifique à l'équilibre. En particulier, en utilisant les règles de dérivation en chaîne, on constate que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{F}, s, \rho_0} &= \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{\mathbf{F}, x_i, \rho_0} \left. \frac{\partial s}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{F}, u, \rho_0} \\ &= -T \left. \frac{\partial s}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{F}, u, \rho_0} \\ &= 0 \quad (\text{à l'équilibre}) \end{aligned}$$

Le résultat précédente indique que l'équilibre correspond à un extremum (ou un point col) d'énergie interne spécifique. Pour vérifier qu'il s'agit d'un minimum, il faut s'intéresser à la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{F}, s, \rho_0} &= - \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{\mathbf{F}, x_i, \rho_0} \left. \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{F}, u, \rho_0} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial x_j} \right|_{\mathbf{F}, x_i, \rho_0} \left. \frac{\partial s}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{F}, u, \rho_0} \\ &= -T \left. \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{F}, u, \rho_0} \quad (\text{à l'équilibre}) \end{aligned}$$

La température absolue étant positive, on déduit de la dernière relation que la matrice hessienne $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ est définie positive. L'équilibre d'un point matériel pour lequel on fixe l'état de déformation, l'entropie spécifique et la masse volumique correspond donc à un minimum d'énergie interne spécifique.

6.6 Température, tenseur des contraintes et potentiel chimique

La température est une représentation indirecte du degré d'agitation des particules qui composent un système. La température absolue est donnée par la dérivée de l'énergie interne par rapport à l'entropie. Ainsi, dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, il est possible d'associer à chaque point matériel une température T donnée par :

$$T = \frac{\partial u}{\partial s} \text{ et } \frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial u} \quad (6.15)$$

Aussi, en imposant que l'énergie interne soit une fonction monotone strictement croissante de l'entropie (et vice-versa), on impose que la température absolue T soit positive :

$$T \geq 0 \quad (6.16)$$

La positivité de la température traduit le fait que l'agitation thermique ne peut être réduite à l'infinie. La température nulle, appelée zéro absolu, correspond ainsi à l'absence d'agitation thermique.

L'état de contrainte, mesuré par le premier tenseur de Piola-Kirchoff \mathbf{P} , se déduit de l'énergie interne spécifique et de l'entropie spécifique par les relations :

$$\mathbf{P} = \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{F}} \text{ et } \frac{\mathbf{P}}{T} = -\varrho_0 \frac{\partial s}{\partial \mathbf{F}} \quad (6.17)$$

Le tenseur des contraintes \mathbf{P} peut être perçu comme la généralisation de la notion de pression classiquement utilisée en thermodynamique mais qui, à cause de sa nature scalaire, ne permet pas à elle seule de représenter la diversité des états de contraintes qui peuvent s'appliquer en un point.

Pour le cas particulier des systèmes ouverts, il est également nécessaire d'introduire le potentiel chimique, noté μ , qui est la variable duale de la

masse volumique ϱ_0 . Cette quantité se déduit de l'énergie interne spécifique et de l'entropie spécifique à partir de :

$$\mu = \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial \varrho_0} \text{ et } \frac{\mu}{T} = -\varrho_0 \frac{\partial s}{\partial \varrho_0} \quad (6.18)$$

Contrairement à la définition utilisée pour la description des réactions chimiques, il convient de remarquer que, selon la définition adoptée ici, le potentiel chimique μ correspond à une variation d'énergie provoquée par une variation de masse, plutôt que par une variation de quantité de matière.

Remarque En toute rigueur, la relation (6.17) n'est valable qu'en l'absence de contribution visqueuse à l'état de contrainte. En effet, pour certains matériaux, les contraintes ont une origine à la fois élastique, qui résulte d'une déformation, et visqueuse, qui nécessite un taux de déformation pour se manifester. Pour de tels matériaux, l'état de contrainte se décompose donc de manière suivante :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_v$$

La contribution élastique à l'état de contrainte \mathbf{P}_e a une origine énergétique, elle dérive donc d'une fonction d'état au sens où :

$$\mathbf{P}_e = \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{F}} \text{ et } \frac{\mathbf{P}_e}{T} = -\varrho_0 \frac{\partial s}{\partial \mathbf{F}}$$

La contribution visqueuse \mathbf{P}_v a en revanche une origine dissipative. Elle ne peut donc pas être obtenue à partir des fonctions d'état (e.g. énergie interne, entropie) qui n'intègrent aucunement les effets de vitesse de déformation. Il convient néanmoins de remarquer que la contribution visqueuse est négligeable dans de nombreuses situations (i.e. $\mathbf{P} \approx \mathbf{P}_e$), en particulier celles impliquant des matériaux solides, auquel cas les relations (6.17) sont valables.

En utilisant les relations d'état (6.15), (6.17) et (6.18), qui donnent la température, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff et le potentiel chimique, il est possible d'exprimer la variation d'énergie interne spécifique d'un point matériel par :

$$\dot{u} = T\dot{s} + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \mu \frac{\dot{\varrho}_0}{\varrho_0} + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.19)$$

La relation précédente souligne que, au sens de l'énergie interne, l'entropie spécifique, le gradient de la transformation et la masse volumique sont des variables primales auxquelles correspondent des variables duales que sont la température, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff et le potentiel chimique. Cela signifie qu'il n'est pas possible de contrôler à la fois la température et l'entropie spécifique d'un point matériel. De la même manière, on ne peut imposer en même temps un état de contrainte, représenté par le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, et un état de déformation, représenté par le gradient de la transformation⁶.

6.7 Energie libre, enthalpie et enthalpie libre

Quand bien même il est possible de contrôler l'entropie, celle-ci ne constitue pas une variable d'état très commode en pratique. En effet, d'un point de vue expérimental, il est souvent beaucoup plus simple de contrôler la température que l'entropie. Afin de donner à la température le rôle de variable primale, on peut utiliser une fonction d'état nommée énergie libre à laquelle on associe une valeur spécifique a . Celle-ci se déduit de l'énergie interne spécifique à partir d'une transformation de Legendre telle que :

$$a = \hat{a}(T, \mathbf{F}, \varrho_0, x_1, \dots, x_n) \quad (6.20)$$

$$= \hat{u}(s, \mathbf{F}, \varrho_0, x_1, \dots, x_n) - sT \quad (6.21)$$

La dérivée temporelle de l'énergie libre spécifique s'exprime :

$$\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial a}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial a}{\partial \varrho_0} \dot{\varrho}_0 + \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.22)$$

$$= -s\dot{T} + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \mu \frac{\dot{\varrho}_0}{\varrho_0} + \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.23)$$

Au sens de l'énergie libre, l'entropie est donc (au signe près) la variable duale de la température tandis que le tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff et le potentiel chimique restent les variables duales du gradient de la transfor-

⁶Cela n'exclue pas d'imposer certaines composantes du tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, et certaines composantes du gradient de la transformation.

mation et de la masse volumique :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{P} = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{F}} \quad (6.25)$$

$$\mu = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \varrho_0} \quad (6.26)$$

L'énergie libre étant une variable extensive, sa valeur globale \mathcal{A} pour l'ensemble d'un système s'obtient en additionnant les contributions des différents points matériels qui le composent :

$$\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \varrho a \, dv \quad (6.27)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 a \, dV \quad (6.28)$$

Dans certaines expériences, il est plus facile de contrôler l'état de contrainte que l'état de déformation. Il est ainsi parfois préférable d'utiliser le tenseur des contraintes comme variable primale, ce que permet l'enthalpie. En effet, l'enthalpie spécifique h est une fonction d'état qui dépend de l'entropie et de l'état de contrainte. Elle représente la quantité de chaleur qui, par unité de masse, est échangée au cours d'une transformation qui se déroule à état de contrainte constant. L'enthalpie spécifique est reliée à l'énergie interne spécifique u par :

$$h = \hat{h}(s, \mathbf{P}, \varrho_0, x_1, \dots, x_n) \quad (6.29)$$

$$= \hat{u}(s, \mathbf{F}, \varrho_0, x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \mathbf{F} \quad (6.30)$$

Si on dérive l'enthalpie spécifique par rapport au temps, on constate que, au signe près, le gradient de la transformation est la variable duale du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff :

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{P}} : \dot{\mathbf{P}} + \frac{\partial h}{\partial \varrho_0} \dot{\varrho}_0 + \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.31)$$

$$= T \dot{s} - \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{P}} + \left(\mu + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \mathbf{F} \right) \frac{\dot{\varrho}_0}{\varrho_0} + \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.32)$$

On déduit des relations précédentes les équations d'état suivantes :

$$T = \frac{\partial h}{\partial s} \quad (6.33)$$

$$\mathbf{F} = -\varrho_0 \frac{\partial h}{\partial \mathbf{P}} \quad (6.34)$$

$$\mu = \varrho_0 \left(\frac{\partial h}{\partial \varrho_0} + \mathbf{P} : \frac{\partial h}{\partial \mathbf{P}} \right) \quad (6.35)$$

De manière analogue à l'énergie libre, l'enthalpie totale \mathcal{H} d'un système est donnée par :

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}} \varrho h \, dv \quad (6.36)$$

$$= \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 h \, dV \quad (6.37)$$

Enfin, l'enthalpie libre est fonction d'état, homogène à une énergie, qui utilise la température et le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff comme variables primales. La valeur spécifique de cette fonction d'état est désignée par g . Elle est reliée à l'enthalpie par la relation :

$$g = \hat{g}(T, \mathbf{P}, \varrho_0, x_1, \dots, x_n) \quad (6.38)$$

$$= \hat{h}(s, \mathbf{P}, \varrho_0, x_1, \dots, x_n) - sT \quad (6.39)$$

Sa variation par unité de temps s'exprime donc :

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{P}} : \dot{\mathbf{P}} + \frac{\partial g}{\partial \varrho_0} \dot{\varrho}_0 + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.40)$$

$$= -s\dot{T} - \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{P}} + \left(\mu + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \mathbf{F} \right) \frac{\dot{\varrho}_0}{\varrho_0} + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.41)$$

Au sens de l'enthalpie libre, l'entropie et le gradient de la transformation sont, au signe près, les variables duales de la température et du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff. Le potentiel chimique, auquel on ajoute une contribution induite par l'état de contrainte, est la variable duale de la masse volumique. Les relations d'état correspondantes sont :

$$s = -\frac{\partial g}{\partial T} \quad (6.42)$$

$$\mathbf{F} = -\varrho_0 \frac{\partial g}{\partial \mathbf{P}} \quad (6.43)$$

$$\mu = \varrho_0 \left(\frac{\partial g}{\partial \varrho_0} + \mathbf{P} : \frac{\partial g}{\partial \mathbf{P}} \right) \quad (6.44)$$

u	a
u	$u - sT$
$a + sT$	a
$h + \mathbf{P} : \mathbf{F}/\varrho_0$	$h - sT + \mathbf{P} : \mathbf{F}/\varrho_0$
$g + sT + \mathbf{P} : \mathbf{F}/\varrho_0$	$g + \mathbf{P} : \mathbf{F}/\varrho_0$
h	g
$u - \mathbf{P} : \mathbf{F}/\varrho_0$	$u - sT - \mathbf{P} : \mathbf{F}/\varrho_0$
$a + sT - \mathbf{P} : \mathbf{F}/\varrho_0$	$a - \mathbf{P} : \mathbf{F}/\varrho_0$
h	$h - sT$
$g + sT$	g

Tableau 6.1: Relations entre différentes fonctions d'état : énergie interne spécifique u , énergie libre spécifique a , enthalpie spécifique h et enthalpie libre spécifique g .

L'enthalpie libre totale d'un système s'obtient par intégration sur le volume occupé à partir de l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$\mathcal{G} = \int_{\gamma} \varrho g \, dv \quad (6.45)$$

$$= \int_{\gamma_0} \varrho_0 g \, dV \quad (6.46)$$

Les relations entre les différentes fonctions d'état couramment utilisées sont résumées dans le tableau 6.1.

Remarque Suivant la terminologie anglo-saxonne, i.e. *Gibbs free energy*, l'enthalpie libre est parfois nommée énergie libre de Gibbs (d'où sa désignation courante par la lettre \mathcal{G}). Pour éviter toute confusion, l'énergie libre \mathcal{A} introduite précédemment est alors désignée par le terme d'énergie libre de Helmholtz.

Chapitre 7

Puissance des efforts internes et externes

Au cours de la transformation d'un système, les efforts appliqués contribuent, au travers d'un travail mécanique, à lui transférer de l'énergie. Avant de présenter les restrictions imposées par les principes fondamentaux de la thermodynamique, il convient de préciser ce qu'il advient de l'énergie issue de l'action mécanique des efforts. Pour ce faire, différentes grandeurs de puissance sont introduites dans la suite :

- La puissance des efforts externes permet de représenter la vitesse à laquelle l'énergie est transférée à un système *via* l'action mécanique du milieu extérieur.
- La puissance des efforts internes correspond à la vitesse à laquelle le système consomme de l'énergie pour se déformer sous l'effet des contraintes s'exerçant en son intérieur.

Dans ce chapitre, les expressions de ces deux puissances sont explicitées à partir des mesures de force, de contrainte, de vitesse et de taux de déformation introduites aux chapitres précédents. Pour établir ces expressions, on analyse ce qu'il advient la puissance accélératrice, qui donne la vitesse d'évolution de l'énergie cinétique d'un système, au cours d'un mouvement rigidifiant. Cela permet d'identifier les différentes contributions à la puissance des efforts externes pour finalement en déduire l'expression de la

puissance des efforts internes. En fin de chapitre, la notion de conjugaison est abordée. Cette notion, appliquée ici à la puissance des efforts internes, permet d'introduire de nouvelles mesures de l'état de contrainte.

7.1 Théorème de l'énergie cinétique

Au cours de la transformation d'un système, les efforts externes appliqués contribuent, au travers d'un travail mécanique, à lui transférer de l'énergie *via* l'action mécanique du milieu environnant. Ce transfert d'énergie mécanique peut se manifester sous deux formes distinctes. Il participe soit à déformer la matière qui compose le système, soit à changer son énergie cinétique. La quantité d'énergie qui, par unité de temps, sert à déformer la matière est appelée puissance des efforts internes. Ce sont en effet ces efforts de cohésion qui, par les contraintes qu'ils produisent, contribuent à faire évoluer l'état de déformation des points matériels qui composent un système.

Le théorème de l'énergie cinétique stipule que la variation d'énergie cinétique d'un système, exprimée dans un référentiel galiléen, est donc égale à la différence entre les travaux réalisés par les forces externes et ceux produits par les efforts internes. Si la puissance développée par les efforts externes (respectivement internes) est notée \mathcal{P}_e (respectivement \mathcal{P}_i), le théorème de l'énergie cinétique indique que le taux de variation d'énergie cinétique $\dot{\mathcal{K}}$ est donné par :

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_i \quad (7.1)$$

Remarque Dans certains ouvrages, une définition alternative de la puissance des efforts internes est adoptée. Elle correspond à l'opposé de la définition adoptée ici. Il s'agit d'un choix quant au signe à donner à la puissance nécessaire pour faire évoluer l'état de déformation d'un système, i.e. la puissance des efforts internes. Avec la définition adoptée ici, cette dernière est positive quand le système consomme de l'énergie. Cette même quantité est négative si la définition alternative est retenue.

Le cas particulier où les efforts internes ne permettent pas de déformer la matière correspond à un mouvement de corps rigide (i.e. $\mathcal{P}_i = 0$), auquel cas l'entièreté du travail mécanique des efforts externes sert à augmenter l'énergie cinétique. À l'opposé, au cours d'un processus de transformation

où la vitesse reste constante, donc l'accélération nulle, le taux de variation de l'énergie cinétique s'annule (i.e. $\dot{\mathcal{K}} = 0$). Le travail mécanique réalisé par les efforts externes est alors utilisé pour déformer la matière contenue à l'intérieur du système.

Afin d'appliquer les principes fondamentaux de la thermodynamique, il convient de préciser ce que représentent les puissances des efforts internes et externes, i.e. les exprimer en fonction des mesures de force, de contrainte, de vitesse et de taux de déformation qui ont été introduites aux chapitres précédents. Pour ce faire, la démarche adoptée dans la suite dans ce chapitre consiste à obtenir l'expression de la dérivée temporelle de l'énergie cinétique $\dot{\mathcal{K}}$. Le cas particulier d'un mouvement de corps rigide sur un intervalle de temps infinitésimal est ensuite examiné. En effet, pour ce cas particulier où l'état de déformation n'évolue pas, la puissance des efforts externes est égale à la variation d'énergie cinétique (i.e. $\mathcal{P}_e = \dot{\mathcal{K}}$). On est ainsi en mesure d'identifier les différentes contributions à la puissance des efforts externes. L'expression de la puissance des efforts internes est ensuite déduite en se replaçant dans le cas général d'une transformation arbitraire.

7.2 Taux de variation de l'énergie cinétique

Le taux de variation de l'énergie cinétique, également appelé puissance accélératrice, mesure la variation par unité de temps de l'énergie cinétique contenue dans un système. L'utilisation des équations globales de conservation (4.6) et (4.13) conduit à exprimer la variation d'énergie comme suit :

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_{\mathcal{V}_0} \dot{K}_0 dV - \int_{\mathcal{Z}_0} [K_0] Z dS \quad (7.2)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial K}{\partial t} + (K\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dv - \int_{\mathcal{Z}} ([K] \zeta - [K\mathbf{v}] \cdot \mathbf{m}) ds \quad (7.3)$$

La relation précédente utilise les notations introduites au 6.4. En particulier, la densité d'énergie cinétique, selon qu'elle soit exprimée sur la configuration actuelle (respectivement initiale) est désignée par K (respectivement K_0).

7.2.1 Cas des systèmes ouverts

Pour un système ouvert, la densité d'énergie cinétique évolue si la vitesse des points matériels change, ce qui se traduit par une modification de l'énergie cinétique spécifique, ou si de la masse est transférée, ce qui se manifeste par une évolution de la masse volumique. On peut ainsi écrire que :

$$\dot{K}_0 = \dot{\varrho}_0 k + \varrho_0 \dot{k} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + (K \mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \dot{\varrho} k + \varrho \dot{k} + \varrho k \operatorname{tr}(\mathbf{1}) \quad (7.5)$$

avec :

$$\dot{k} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (7.6)$$

Les conditions d'équilibre locales pour un point régulier d'un système ouvert (5.39) et (5.41) permettent d'exprimer la variation d'énergie cinétique spécifique comme suit :

$$\varrho_0 \dot{k} = (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{P}}) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (7.7)$$

$$\varrho \dot{k} = (\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (7.8)$$

Aussi, à partir des équations locales de conservation de la masse (4.24) et (4.28), la contribution des transferts de masse à la variation d'énergie cinétique d'un point régulier devient :

$$\dot{\varrho}_0 k = \varrho_0 k r_m - (k \mathbf{J}_m) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{J}_m) : \dot{\mathbf{F}}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (7.9)$$

$$(\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{tr}(\mathbf{1})) k = \varrho k r_m - (k \mathbf{j}_m) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{j}_m) : \mathbf{1}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (7.10)$$

Enfin, les équations d'équilibre et de conservation de la masse obtenues pour les points singuliers d'un système ouvert permettent d'écrire :

$$[\varrho_0 k] Z = \left([k \mathbf{J}_m] + [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{P}} \rangle - [\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{P}}] \right) \cdot \mathbf{M}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (7.11)$$

$$[\varrho k] \zeta - [\varrho k \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m} = ([k \mathbf{j}_m] + [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle - [\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}]) \cdot \mathbf{m}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (7.12)$$

En regroupant les équations précédentes, il est possible d'exprimer la vitesse

à laquelle l'énergie cinétique globale change comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}} &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\varrho_0 r_k - \mathbf{J}_k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \right) dV \\ &\quad - \int_{\mathcal{S}_0} \left([\mathbf{J}_k] + [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{P}} \rangle \right) \cdot \mathbf{M} dS \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}} &= \int_{\mathcal{V}} \left(\varrho r_k - \mathbf{j}_k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \right) dv \\ &\quad - \int_{\mathcal{S}} \left([\mathbf{j}_k] + [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \right) \cdot \mathbf{m} ds \end{aligned} \quad (7.14)$$

Dans un souci de concision, les équations précédentes utilisent les densités surfaciques de flux \mathbf{J}_k et \mathbf{j}_k qui sont définies par¹ :

$$\mathbf{J}_k = k \mathbf{J}_m - \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{P}} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{j}_k = k \mathbf{j}_m - \mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (7.16)$$

Remarque Pour obtenir l'équation (7.14), on utilise la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy (i.e. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t$), qui est une conséquence de la conservation de la quantité de mouvement angulaire, ainsi que la définition (5.45) du tenseur des contraintes de Cauchy réduit. En particulier, cela permet d'écrire que :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{l} - (\mathbf{v} \otimes \mathbf{j}_m) : \mathbf{l} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{l} = \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{d} + \mathbf{w}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$$

Ces équations font également intervenir une source spécifique r_k telle que :

$$\varrho_0 r_k = \varrho_0 k r_m + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v} \quad (7.17a)$$

$$\varrho r_k = \varrho k r_m + \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} \quad (7.17b)$$

Les expressions des densités surfaciques de flux et de la source spécifique traduisent le fait que la variation d'énergie cinétique est à la fois due à un transfert de masse au sein du système et à une action mécanique produite par les efforts.

¹Les densités surfaciques de flux d'énergie \mathbf{j}_k et \mathbf{J}_k sont liées par la relation de transport (2.26) qui indique que $\mathbf{J}_k = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{j}_k$.

7.2.2 Cas des systèmes fermés

L'expression de la variation d'énergie cinétique pour un système fermé est aisément déduite des résultats obtenus pour un système ouvert. Il est intéressant de remarquer que les équations de conservation de la masse (4.30) et (4.32) obtenues pour un système fermé permettent d'exprimer les dérivées temporelles de la densité d'énergie cinétique comme suit :

$$\dot{K}_0 = \varrho_0 \dot{k} \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + (K \mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \varrho \dot{k} \quad (7.19)$$

Comme attendu, ces équations soulignent que, lorsque la masse d'un point matériel reste constante, la densité d'énergie cinétique ne change que si l'énergie cinétique spécifique évolue.

Pour un système fermé, les densités surfaciques de flux de masse sont nulles (i.e. $\mathbf{j}_m = \mathbf{J}_m = \mathbf{0}$). Dans ce cas particulier, le tenseur des contraintes de Cauchy et le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff sont équivalents à leurs formes réduites (i.e. $\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$). L'expression qui donne la vitesse à laquelle l'énergie cinétique globale d'un système fermé évolue devient donc :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}} &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\varrho_0 r_k - \mathbf{J}_k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \right) dV \\ &\quad - \int_{\mathcal{S}_0} \left([\mathbf{J}_k] + [\mathbf{v}] \cdot \langle \mathbf{P} \rangle \right) \cdot \mathbf{M} dS \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}} &= \int_{\mathcal{V}} \left(\varrho r_k - \mathbf{j}_k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \right) dv \\ &\quad - \int_{\mathcal{S}} \left([\mathbf{j}_k] + [\mathbf{v}] \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \right) \cdot \mathbf{m} ds \end{aligned} \quad (7.21)$$

Aussi, les expressions des densités surfaciques de flux d'énergie \mathbf{J}_k et \mathbf{j}_k pour un système fermé se réduisent à :

$$\mathbf{J}_k = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{P} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{j}_k = -\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (7.23)$$

Pour la source spécifique d'énergie r_k , on obtient que :

$$\varrho_0 r_k = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \quad (7.24)$$

$$\varrho r_k = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \quad (7.25)$$

À la différence des résultats obtenus pour un système ouvert, les expressions précédentes montrent que, en l'absence de transfert de masse, la variation d'énergie cinétique est le seul résultat du travail mécanique produit par les efforts.

7.3 Puissance des efforts externes

La puissance des efforts externes correspond à la quantité d'énergie qui est transférée par unité de temps au système considéré sous une forme mécanique au travers de l'action de son environnement. Comme discuté précédemment, pour identifier les différentes contributions à la puissance des efforts externes, il suffit de considérer un intervalle de temps infinitésimal au cours duquel la déformation n'évolue pas, auquel cas la puissance développée par les efforts internes s'annule (i.e. $\mathcal{P}_i = 0$). Pour ce cas particulier, la variation d'énergie cinétique par unité de temps est alors égale à la puissance développée par les efforts externes (i.e. $\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}_e$).

L'absence de déformation entre deux instants successifs implique que, en chaque point régulier du système, la dérivée temporelle du gradient de la transformation se réduit à sa contribution de rotation (i.e. $\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{U}$ car $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$). Dans une telle situation, le taux de déformation eulérien s'annule (i.e. $\mathbf{d} = \mathbf{0}$). Enfin, l'absence d'évolution de l'état de déformation macroscopique du système impose également que les surfaces de singularité ne se déplacent pas (i.e. $Z = 0$). On déduit de l'équation (2.39) que cette dernière condition implique l'absence de saut du champ de vitesse en chaque point singulier, i.e. $[\mathbf{v}] = \mathbf{0}$.

Que le système soit ouvert ou fermé, la variation globale d'énergie cinétique fait intervenir des densités de puissance qui sont données par des produits entre une mesure de contrainte ($\boldsymbol{\sigma}$ ou \mathbf{P}) et une mesure du taux de déformation (\mathbf{d} ou $\dot{\mathbf{F}}$)². Dans le cas particulier d'une transformation qui, sur l'intervalle de temps concerné, est assimilable à un mouvement de corps rigide, ces

²Strictement parlant, la dérivée temporelle du gradient de la transformation $\dot{\mathbf{F}}$ n'est pas une mesure du taux de déformation car elle contient également une contribution du taux de rotation.

densités de puissance s'annulent :

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad (7.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0 \quad (7.27)$$

Démonstration Lorsque la déformation n'évolue pas, la condition $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$ permet d'exprimer le gradient spatial du champ de vitesse \mathbf{l} comme suit :

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^t = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t$$

Le tenseur de rotation étant orthogonal, il vérifie :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{1}$$

Le produit $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t$ est donc un tenseur anti-symétrique puisque la dérivation par rapport au temps de la relation précédente montre que :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^t &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t)^t &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t &= -(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t)^t \end{aligned}$$

Pour le cas particulier examiné ici, le gradient spatial du champ de vitesse se réduit donc à sa partie anti-symétrique (i.e. $\mathbf{l} = \mathbf{w}$), qui correspond au taux de rotation eulérien puisque le taux de déformation eulérien s'annule :

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{w} &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^t) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t \end{aligned}$$

La conséquence directe est donc que :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

Aussi, la conservation de la quantité de mouvement angulaire impose la symétrie $\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^t$. Le tenseur $\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t$ est donc orthogonal au taux de rotation eulérien \mathbf{w} . On en déduit donc que :

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t) : \mathbf{1} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t) : \mathbf{w} = 0$$

Les résultats précédents sont importants en cela qu'ils indiquent que la puissance développée par les efforts externes est la résultante d'une contribution surfacique, à laquelle correspondent les densités surfaciques de flux \mathbf{j}_k et \mathbf{J}_k , et d'une contribution volumique, à laquelle est associée la source spécifique r_k . En effet, lorsque la puissance des efforts internes s'annule, la puissance des efforts externes est égale à la variation d'énergie cinétique par unité de temps, ce qui conduit à :

$$\mathcal{P}_e = \int_{\gamma_0} (\varrho_0 r_k - \mathbf{J}_k \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) dV - \int_{\mathcal{S}_0} [\mathbf{J}_k] \cdot \mathbf{M} dS \quad (7.28)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} (\varrho r_k - \mathbf{j}_k \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) dv - \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{j}_k] \cdot \mathbf{m} ds \quad (7.29)$$

Il est important de remarquer que les expressions précédentes sont valables quelle que soit la nature (ouverte ou fermée) du système considéré. Néanmoins, les expressions des densités surfaciques de flux et de la source spécifique d'énergie cinétique dépendent du caractère ouvert ou fermé du système étudié.

7.4 Puissance des efforts internes

Pour obtenir l'expression de la puissance développée par les efforts internes, il suffit de se replacer dans le cas général, i.e. celui où l'action des efforts externes provoque des variations de vitesse et de l'état de déformation auquel cas :

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_e - \dot{\mathcal{K}} \quad (7.30)$$

7.4.1 Cas des systèmes ouverts

Pour un système ouvert, la puissance des efforts internes est donnée par la différence entre les relations (7.28) et (7.13) (ou de manière équivalente entre

(7.29) et (7.14)). On obtient alors que :

$$\mathcal{P}_i = \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV + \int_{\mathcal{Z}_0} [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{P}} \rangle \cdot \mathbf{M} dS \quad (7.31)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dv + \int_{\mathcal{Z}} [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \cdot \mathbf{m} ds \quad (7.32)$$

7.4.2 Cas des systèmes fermés

L'expression de la puissance des efforts internes pour un système fermé est semblable à la précédente, à ceci près que la contribution des points singuliers n'inclut pas l'effet du transfert de masse. Spécifiquement, la différence entre les relations (7.28) et (7.20) (ou de manière équivalente entre (7.29) et (7.21)) conduit à :

$$\mathcal{P}_i = \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV + \int_{\mathcal{Z}_0} [\mathbf{v}] \cdot \langle \mathbf{P} \rangle \cdot \mathbf{M} dS \quad (7.33)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dv + \int_{\mathcal{Z}} [\mathbf{v}] \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \mathbf{m} ds \quad (7.34)$$

7.4.3 Conjugaison entre mesures de contrainte et de taux de déformation

Pour évaluer les conséquences énergétiques d'un processus de déformation, il est commode d'associer à chaque point matériel une puissance de déformation spécifique. Cette quantité, notée p dans la suite, mesure à chaque instant la puissance par unité de masse consommée par un point matériel régulier pour faire changer son état de déformation. La puissance de déformation spécifique s'écrit :

$$p = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (7.35)$$

$$= \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad (7.36)$$

Les relations précédentes indiquent que chaque mesure de l'état de contrainte possède une relation dite de conjugaison avec une mesure du taux de déformation. En effet, lorsqu'elles sont projetées l'une sur l'autre, ces grandeurs tensorielles permettent de calculer la puissance spécifique qui doit

être développée par les efforts intérieurs pour déformer la matière. Ainsi, la relation (7.35) montre que le tenseur des contraintes de Cauchy est conjugué au taux de déformation eulérien. De manière semblable, la relation (7.36) souligne que le premier tenseur de Piola-Kirchoff est conjugué à la dérivée temporelle du gradient de la transformation.

Remarque Le tenseur de Kirchoff $\boldsymbol{\tau}$ est une mesure de l'état de contrainte qui est parfois employée en mécanique. Ce tenseur symétrique est relié au tenseur des contraintes de Cauchy par la relation :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\varrho_0}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} = J \boldsymbol{\sigma}$$

Aussi, comme le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, il est conjugué au taux de déformation eulérien \mathbf{d} au sens de la puissance de déformation puisqu'on est mesure d'écrire que :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}$$

Toutefois, si le produit $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$ correspond à une puissance par unité de volume de la configuration actuelle, le produit $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}$ est une puissance par unité de volume de la configuration initiale.

La notion de conjugaison, au sens de la puissance de déformation, est intéressante en cela qu'elle permet, pour chaque mesure du taux de déformation, de construire une mesure de l'état de contrainte qui lui est conjuguée. Ainsi, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}_g$, qui est conjugué au taux de déformation de Green-Lagrange $\dot{\mathbf{E}}_g$, est tel que :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma}_g : \dot{\mathbf{E}}_g \quad (7.37)$$

Pour que les relations (7.37) et (7.36) soient équivalentes, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}_g$ doit nécessairement satisfaire :

$$\boldsymbol{\Sigma}_g : \frac{\partial \mathbf{E}_g}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{P} \quad (7.38)$$

En utilisant la définition (3.6), on trouve que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}_g$ n'est nul autre que le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S} introduit précédemment. La relation précédente permet en effet de retrouver

l'expression (5.37) présentée au Chapitre 5 :

$$\boldsymbol{\Sigma}_g = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} \quad (7.39)$$

$$= \mathbf{S} \quad (7.40)$$

Le second tenseur de Piola-Kirchoff est donc conjugué au taux de déformation de Green-Lagrange au sens de la puissance de déformation.

De manière semblable, la notion de conjugaison permet d'introduire le tenseur des contraintes de Hencky $\boldsymbol{\Sigma}_t$, qui est conjugué au taux de déformation de Hencky $\dot{\mathbf{E}}_t$. Le tenseur des contraintes de Hencky est défini de sorte que :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma}_t : \dot{\mathbf{E}}_t \quad (7.41)$$

Il est alors possible de relier le tenseur des contraintes de Hencky $\boldsymbol{\Sigma}_t$ au second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S} par la relation :

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}_g}{\partial \mathbf{E}_t} \quad (7.42)$$

La relation (7.42) est construite afin de garantir que les relations (7.37) et (7.41) sont équivalentes du point de vue de puissance de déformation spécifique.

Enfin, le tenseur de Biot symétrique $\boldsymbol{\Sigma}_b$ est la mesure de contrainte conjuguée au taux de déformation du même nom $\dot{\mathbf{E}}_b$. Cette mesure de contrainte est définie de sorte à ce que la puissance de déformation spécifique s'exprime :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma}_b : \dot{\mathbf{E}}_b \quad (7.43)$$

Le tenseur des contraintes de Biot symétrique est ainsi défini par :

$$\boldsymbol{\Sigma}_b = \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}_g}{\partial \mathbf{E}_b} \quad (7.44)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}) \quad (7.45)$$

Comme discuté au Chapitre 3, il existe une infinité de mesures de l'état de déformation, donc du taux de déformation. On peut alors construire une infinité de mesures de l'état de contrainte en utilisant la notion de conjugaison.

Remarque Le tenseur des contraintes de Biot, noté \mathbf{T} , est obtenu par l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{P} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S}$$

On peut remarquer que ce tenseur ne diffère du premier tenseur de Piola-Kirchoff \mathbf{P} que par l'effet de la rotation \mathbf{R} (ces deux mesures de l'état de contrainte possèdent la même norme).

De manière générale, le tenseur des contraintes de Biot n'est pas symétrique, il peut donc être décomposé en parties symétrique $\boldsymbol{\Sigma}_b$ et antisymétrique $\boldsymbol{\Xi}_b$ comme suit :

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\Sigma}_b + \boldsymbol{\Xi}_b \text{ avec } \boldsymbol{\Sigma}_b = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t) \text{ et } \boldsymbol{\Xi}_b = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t)$$

Aussi, le tenseur des contraintes de Biot est la grandeur conjuguée au taux d'élongation droit $\dot{\mathbf{U}}$ puisque la puissance de déformation spécifique peut s'écrire :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{U}}$$

Puisque le taux d'élongation $\dot{\mathbf{U}}$ est représenté par un tenseur symétrique, seule la partie symétrique du tenseur des contraintes de Biot contribue à la puissance de déformation spécifique :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma}_b : \dot{\mathbf{U}}$$

En remarquant que le taux d'élongation $\dot{\mathbf{U}}$ est égal au taux de déformation de Biot $\dot{\mathbf{E}}_b$, on retrouve la relation (7.43).

Chapitre 8

Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique impose la conservation de l'énergie. Cela signifie que la quantité d'énergie contenue dans un système, s'il est isolé de son environnement, ne peut pas évoluer lors d'une transformation. Pour les systèmes fermés ou ouverts, l'énergie contenue peut néanmoins varier du fait des échanges avec l'extérieur. Pour de tels systèmes, la quantité d'énergie transférée au système doit correspondre à la quantité d'énergie extraite de l'environnement.

Dans ce chapitre, les équations de conservation de l'énergie, qui constituent la traduction du premier principe, sont présentées d'abord dans une forme globale, puis dans une forme locale. Pour la présentation de cette dernière forme, la distinction est faite entre les systèmes ouverts, qui peuvent transférer masse et énergie, et les systèmes fermés, pour lesquels seuls les transferts d'énergie sont permis.

8.1 Forme globale du premier principe

Le premier principe de la thermodynamique stipule que l'énergie totale \mathcal{E} d'un système ne varie que si de l'énergie est transférée depuis le milieu extérieur. Dans un contexte thermomécanique, ce transfert peut prendre

soit une forme mécanique, soit une forme thermique. Le premier principe s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{U}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_c \quad (8.1)$$

L'égalité précédente montre que la vitesse $\dot{\mathcal{E}}$ à laquelle change l'énergie totale d'un système est la somme de deux contributions. Comme discuté au Chapitre 7, la puissance des efforts extérieurs \mathcal{P}_e mesure la quantité d'énergie qui est transférée par unité de temps au système sous une forme mécanique. Le terme \mathcal{P}_c est la puissance calorifique, il représente la contribution des échanges thermiques à faire varier l'énergie totale du système.

Le théorème de l'énergie cinétique discuté au Chapitre 7 indique que la variation d'énergie cinétique par unité de temps est la somme des contributions des puissances des efforts externes et internes (i.e. $\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_i$). Il est ainsi possible de proposer une écriture globale alternative du premier principe en utilisant cette décomposition de la variation d'énergie cinétique, ce qui conduit à :

$$\dot{\mathcal{U}} = \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_i \quad (8.2)$$

Cette dernière équation indique que la variation d'énergie interne est le résultat des contributions mécaniques, *via* la puissance développée par les efforts internes, et calorifiques, *via* les transferts de chaleur entre le système et son environnement.

8.2 Forme locale du premier principe

L'équation (8.2) constitue une écriture globale du premier principe au sens où elle traite de la conservation de l'énergie pour l'ensemble du système considéré. Dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, cette forme dispose toutefois d'un intérêt limité puisqu'elle dépend de la taille du système étudié. On préfère ainsi souvent une forme locale, qui est une traduction du premier principe en chaque position, à la forme globale. La méthode d'obtention de cette forme locale du premier principe est discutée dans ce qui suit.

Pour un système thermodynamique, les équations (4.6) et (4.13) permettent

d'établir l'expression de la vitesse d'évolution de l'énergie interne :

$$\dot{U} = \int_{\mathcal{V}_0} \dot{U}_0 dV - \int_{\mathcal{Z}_0} [U_0] Z dS \quad (8.3)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + (U\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dv - \int_{\mathcal{Z}} ([U] \zeta - [U\mathbf{v}] \cdot \mathbf{m}) ds \quad (8.4)$$

Aussi, les transferts de chaleur réalisés entre un système et son environnement sont la résultante d'une contribution surfacique au travers de la frontière du système (e.g. convection) et d'une contribution volumique qui représente les apports de chaleur réalisés à l'intérieur du système (e.g. effet Joule). La contribution surfacique est décrite par un champ vectoriel de densité surfacique de flux de chaleur (notée \mathbf{j}_q ou \mathbf{J}_q selon la configuration étudiée¹). La source de chaleur spécifique, qui correspond à la contribution volumique, est désignée par r_q . La puissance calorifique s'exprime donc :

$$\mathcal{P}_c = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 r_q dV - \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{N} dS \quad (8.5)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \varrho r_q dv - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}_q \cdot \mathbf{n} ds \quad (8.6)$$

8.2.1 Cas des systèmes ouverts

Afin d'établir la forme locale du premier principe pour un système ouvert, il convient d'évaluer la somme de la puissance calorifique, donnée par les expressions (8.5) et (8.6), et de la puissance des efforts internes, évaluée à partir des expressions (7.31) et (7.32). Cette somme, qui contrôle l'évolution de l'énergie interne, s'exprime :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_i &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\varrho_0 r_q - \mathbf{J}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \right) dV \\ &+ \int_{\mathcal{Z}_0} \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{P}} \rangle - [\mathbf{J}_q] \right) \cdot \mathbf{M} dS \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_i &= \int_{\mathcal{V}} \left(\varrho r_q - \mathbf{j}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \right) dv \\ &+ \int_{\mathcal{Z}} \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle - [\mathbf{j}_q] \right) \cdot \mathbf{m} ds \end{aligned} \quad (8.8)$$

¹La relation de transport (2.26) permet de montrer que $\mathbf{J}_q = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{j}_q$.

Aussi, la densité d'énergie interne associée à un point matériel change si l'énergie interne spécifique évolue ou si de la masse est transférée, ce qui se traduit par :

$$\dot{U}_0 = \dot{\varrho}_0 u + \varrho_0 \dot{u} \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \dot{\varrho}u + \varrho\dot{u} + \varrho u \operatorname{tr}(\mathbf{1}) \quad (8.10)$$

Les équations locales de conservation de la masse (4.24) et (4.28) permettent d'exprimer les contributions du transfert de masse à la variation d'énergie interne comme suit :

$$\dot{\varrho}_0 u = \varrho_0 u r_m - (u\mathbf{J}_m) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{x}} u) \cdot \mathbf{J}_m \quad (8.11)$$

$$(\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{tr}(\mathbf{1}))u = \varrho u r_m - (u\mathbf{j}_m) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{x}} u) \cdot \mathbf{j}_m \quad (8.12)$$

La forme globale du premier principe (8.2) stipule que la variation d'énergie interne correspond à la somme de la puissance calorifique et de celle développée par les efforts internes. En utilisant les relations précédentes, il est possible de reformuler le premier principe de la thermodynamique de manière globale par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \varrho_0 \dot{u} dV - \int_{\mathcal{Z}_0} [\varrho_0 u] Z dS &= \int_{\gamma_0} \left(\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{J}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \varrho_0 \tilde{r}_q \right) dV \\ &\quad - \int_{\mathcal{Z}_0} \left([\mathbf{J}_q] - [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{P}} \rangle \right) \cdot \mathbf{M} dS \end{aligned} \quad (8.13)$$

L'égalité précédente est une forme matérielle du premier principe au sens où elle fait intervenir des quantités rattachées à la configuration initiale. L'équivalent spatial de cette égalité, qui utilise des quantités associées à la configuration actuelle, est donné par :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \varrho \dot{u} dv - \int_{\mathcal{Z}} ([\varrho u] \zeta - [\varrho u \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m}) ds &= \int_{\gamma} \left(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \tilde{\mathbf{j}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \varrho \tilde{r}_q \right) dv \\ &\quad - \int_{\mathcal{Z}} \left([\mathbf{j}_q] - [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \right) \cdot \mathbf{m} ds \end{aligned} \quad (8.14)$$

Dans un souci de concision, l'écriture précédente du premier principe de la thermodynamique utilise la forme réduite des densités surfaciques de flux de chaleur et de la source spécifique. Ainsi, conformément aux définitions (4.38)

et (4.39), les densités surfaciques de flux de chaleur réduites s'expriment :

$$\tilde{\mathbf{J}}_q = \mathbf{J}_q - u \mathbf{J}_m \quad (8.15)$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_q = \mathbf{j}_q - u \mathbf{j}_m \quad (8.16)$$

La source spécifique réduite est définie à partir de la relation (4.40), ce qui donne :

$$\tilde{r}_q = r_q - ur_m - (\nabla_{\mathbf{x}} u) \cdot \mathbf{J}_m / \varrho_0 \quad (8.17)$$

$$= r_q - ur_m - (\nabla_{\mathbf{x}} u) \cdot \mathbf{j}_m / \varrho \quad (8.18)$$

Le premier principe de la thermodynamique, i.e. la conservation de l'énergie, s'applique non seulement au système considéré, mais également à tous les sous-systèmes qui le composent. Ainsi, si la taille du système est réduite jusqu'à ne considérer plus qu'un seul point, on obtient la forme locale du premier principe de la thermodynamique. Selon qu'il soit régulier ou singulier, la forme matérielle locale du premier principe de la thermodynamique se déduit de l'égalité (8.13), ce qui conduit à :

$$\varrho_0 \dot{u} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{J}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \varrho_0 \tilde{r}_q, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (8.19a)$$

$$[\varrho_0 u] Z = \left([\mathbf{J}_q] - [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{P}} \rangle \right) \cdot \mathbf{M}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (8.19b)$$

La forme spatiale du premier principe de la thermodynamique s'obtient à partir de l'égalité (8.14). Elle s'écrit :

$$\varrho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \tilde{\mathbf{j}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \varrho \tilde{r}_q, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (8.20a)$$

$$[\varrho u] \zeta - [\varrho u \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m} = \left([\mathbf{j}_q] - [\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \right) \cdot \mathbf{m}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (8.20b)$$

Les équations (8.19) et (8.20) traduisent le fait que l'énergie interne d'un point matériel évolue soit sous l'effet des échanges thermiques, représentés par les densités surfaciques de flux de chaleur et la source de chaleur spécifique (dans leur forme réduite), soit sous l'effet d'une variation de l'état de déformation produite par l'état de contrainte appliqué.

8.2.2 Cas des systèmes fermés

Pour un système fermé, la somme de la puissance calorifique et de la puissance des efforts internes, qui intervient dans la forme globale (8.2) du pre-

mier principe, est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_i &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\varrho_0 r_q - \mathbf{J}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \right) dV \\ &+ \int_{\mathcal{Z}_0} ([\mathbf{v}] \cdot \langle \mathbf{P} \rangle - [\mathbf{J}_q]) \cdot \mathbf{M} dS \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_i &= \int_{\mathcal{V}} (\varrho r_q - \mathbf{j}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) dv \\ &+ \int_{\mathcal{Z}} ([\mathbf{v}] \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle - [\mathbf{j}_q]) \cdot \mathbf{m} ds \end{aligned} \quad (8.22)$$

En l'absence de transfert de masse, les dérivées temporelles des densités d'énergie interne s'expriment :

$$\dot{U}_0 = \varrho_0 \dot{u} \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \varrho \dot{u} \quad (8.24)$$

Il est possible d'utiliser les relations précédentes pour reformuler de manière globale le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé. En particulier, sous une forme matérielle, la conservation de l'énergie impose que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 \dot{u} dV - \int_{\mathcal{Z}_0} [\varrho_0 u] Z dS &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{J}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \varrho_0 r_q \right) dV \\ &- \int_{\mathcal{Z}_0} ([\mathbf{J}_q] - [\mathbf{v}] \cdot \langle \mathbf{P} \rangle) \cdot \mathbf{M} dS \end{aligned} \quad (8.25)$$

Quand elle est traduite sous une forme spatiale, l'égalité précédente devient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \varrho \dot{u} dv - \int_{\mathcal{Z}} ([\varrho u] \zeta - [\varrho u \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m}) ds &= \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \mathbf{j}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \varrho r_q) dv \\ &- \int_{\mathcal{Z}} ([\mathbf{j}_q] - [\mathbf{v}] \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle) \cdot \mathbf{m} ds \end{aligned} \quad (8.26)$$

En réduisant la taille du système jusqu'à ne considérer qu'un point matériel, on obtient à partir de l'égalité (8.25) la forme matérielle locale du premier principe pour un système fermé :

$$\varrho_0 \dot{u} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{J}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \varrho_0 r_q, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (8.27a)$$

$$[\varrho_0 u] Z = ([\mathbf{J}_q] - [\mathbf{v}] \cdot \langle \mathbf{P} \rangle) \cdot \mathbf{M}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (8.27b)$$

Aussi, pour un système fermé, la forme spatiale du premier principe de la thermodynamique est donnée par :

$$\varrho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \mathbf{j}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \varrho r_q, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (8.28a)$$

$$[\varrho u] \zeta - [\varrho u \mathbf{v}] \cdot \mathbf{m} = ([\mathbf{j}_q] - [\mathbf{v}] \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle) \cdot \mathbf{m}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (8.28b)$$

Les équations (8.27) et (8.28) sont très semblables à leurs homologues (8.19) et (8.20) obtenues pour un système ouvert, à ceci près que les transferts de masse ne contribuent plus à l'évolution de l'énergie interne.

Chapitre 9

Second principe de la thermodynamique

Si le premier principe de la thermodynamique traite de la conservation de l'énergie, il ne précise pas la direction vers laquelle un système évolue. Les restrictions quant à la direction vers laquelle un système peut évoluer font l'objet du second principe de la thermodynamique.

Dans ce chapitre, la forme globale de ce principe, qui s'appuie sur la notion d'entropie introduite au Chapitre 6, est d'abord présentée. Les énoncés du second principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts et fermés sont ensuite exposés sous une forme locale. Ces énoncés sont finalement utilisés pour évaluer la puissance dissipée par un système lors d'une transformation.

9.1 Forme globale du second principe

Le second principe de la thermodynamique fixe les restrictions quant à la direction vers laquelle évoluent les différentes variables d'état d'un système. Dans sa forme globale, le second principe stipule que l'entropie produite par un système est non-négative. En notant $\dot{\mathcal{S}}_c$ le taux de création d'entropie par un système, le second principe s'écrit donc :

$$\dot{\mathcal{S}}_c \geq 0 \quad (9.1)$$

Le second principe permet de distinguer les transformations réversibles des transformations irréversibles. Plus spécifiquement, une transformation est qualifiée de réversible dès lors que la production d'entropie est nulle (i.e. $\dot{\mathcal{S}}_c = 0$). À l'opposé, une transformation est dite irréversible si le système produit de l'entropie (i.e. $\dot{\mathcal{S}}_c > 0$).

Il est important de remarquer que le taux de variation d'entropie d'un système $\dot{\mathcal{S}}$ est différent du taux de création $\dot{\mathcal{S}}_c$ puisqu'il peut également y avoir des échanges d'entropie entre le système et le milieu extérieur. En notant $\dot{\mathcal{S}}_e$ le taux d'échange d'entropie entre un système et le milieu extérieur, on peut décomposer le taux de variation d'entropie comme suit :

$$\dot{\mathcal{S}} = \dot{\mathcal{S}}_c + \dot{\mathcal{S}}_e \quad (9.2)$$

Puisque le taux de création d'entropie est donné par la différence entre le taux de variation d'entropie et le taux d'échange d'entropie, le second principe de la thermodynamique peut également s'écrire :

$$\dot{\mathcal{S}} - \dot{\mathcal{S}}_e \geq 0 \quad (9.3)$$

9.2 Forme locale du second principe

De manière analogue à ce qui a été discuté pour le premier principe, il est souvent préférable de travailler avec une forme locale du second principe de la thermodynamique. Pour obtenir cette forme locale, le point de départ est l'application des équations de conservation globales (4.6) et (4.13) au cas particulier de l'entropie, ce qui conduit à :

$$\dot{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}_0} \dot{\mathcal{S}}_0 dV - \int_{\mathcal{Z}_0} [S_0] Z dS \quad (9.4)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + (S\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dv - \int_{\mathcal{Z}} ([S] \zeta - [S\mathbf{v}] \cdot \mathbf{m}) ds \quad (9.5)$$

Aussi, comme pour les transferts thermiques, les échanges d'entropie entre un système et son environnement peuvent se réaliser au travers de la frontière externe du système considéré ou sous la forme d'une source interne. Il est ainsi naturel d'écrire que l'entropie échangée entre un système et le milieu

extérieur est donnée par :

$$\dot{S}_e = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 r_s dV - \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{N} dS \quad (9.6)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \varrho r_s dv - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{n} ds \quad (9.7)$$

où \mathbf{J}_s et \mathbf{j}_s sont des densités surfaciques de flux d'entropie¹ et r_s est une source spécifique d'entropie.

En combinant les relations précédentes et en utilisant le théorème de flux-divergence, il est possible d'exprimer le taux de création d'entropie, donné par la différence entre le taux de variation et le taux d'échange, comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{S}_c &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\dot{S}_0 - \varrho_0 r_s + \mathbf{J}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dV \\ &+ \int_{\mathcal{S}_0} ([\mathbf{J}_s] \cdot \mathbf{M} - [S_0] Z) dS \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_c &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + (S\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \varrho r_s + \mathbf{j}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dv \\ &+ \int_{\mathcal{S}} ([S\mathbf{v} + \mathbf{j}_s] \cdot \mathbf{m} - [S] \zeta) ds \end{aligned} \quad (9.9)$$

9.2.1 Cas des systèmes ouverts

Pour le cas général des systèmes ouverts, la variation de densité d'entropie par unité de temps inclut à la fois la variation d'entropie spécifique ainsi que la contribution des transferts de masse :

$$\dot{S}_0 = \dot{\varrho}_0 s + \varrho_0 \dot{s} \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (S\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \dot{\varrho} s + \varrho \dot{s} + \varrho s \operatorname{tr}(\mathbf{1}) \quad (9.11)$$

Les équations locales de conservation de la masse (4.24) et (4.28) obtenues pour un système ouvert permettent d'exprimer la contribution des transferts de masse :

$$\dot{\varrho}_0 s = \varrho_0 s r_m - (s\mathbf{J}_m) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{x}} s) \cdot \mathbf{J}_m \quad (9.12)$$

$$(\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{tr}(\mathbf{1}))s = \varrho s r_m - (s\mathbf{j}_m) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{x}} s) \cdot \mathbf{j}_m \quad (9.13)$$

¹Comme pour la densité surfacique de flux de chaleur, les densités surfaciques de flux d'entropie associées aux configurations initiale et actuelle sont liées par $\mathbf{J}_s = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{j}_s$.

Les relations précédentes peuvent être combinées pour reformuler les expressions (9.8) et (9.9), qui donnent le taux de création d'entropie global (i.e. à l'échelle d'un système) :

$$\dot{S}_c = \int_{\mathcal{V}_0} \left(\varrho_0 \dot{s} - \varrho_0 \tilde{r}_s + \tilde{\mathbf{J}}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dV + \int_{\mathcal{Z}_0} ([\mathbf{J}_s] \cdot \mathbf{M} - [\varrho_0 s] Z) dS \quad (9.14)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\varrho \dot{s} - \varrho \tilde{r}_s + \tilde{\mathbf{j}}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) dv + \int_{\mathcal{Z}} ([\varrho s \mathbf{v} + \mathbf{j}_s] \cdot \mathbf{m} - [\varrho s] \zeta) ds \quad (9.15)$$

Suivant le formalisme introduit pour l'écriture des équations de conservation locales des systèmes ouverts (voir 4.2.3), les relations ci-dessus font intervenir les formes réduites des densités surfaciques de flux d'entropie et de la source spécifique d'entropie. Ainsi, conformément aux définitions (4.38) et (4.39), les densités surfaciques de flux d'entropie réduites s'expriment :

$$\tilde{\mathbf{J}}_s = \mathbf{J}_s - s \mathbf{J}_m \quad (9.16)$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_s = \mathbf{j}_s - s \mathbf{j}_m \quad (9.17)$$

La source spécifique réduite est définie à partir de la relation (4.40), ce qui permet d'établir que :

$$\tilde{r}_s = r_s - s r_m - (\nabla_{\mathbf{x}} s) \cdot \mathbf{J}_m / \varrho_0 \quad (9.18)$$

$$= r_s - s r_m - (\nabla_{\mathbf{x}} s) \cdot \mathbf{j}_m / \varrho \quad (9.19)$$

De manière analogue à la démarche suivie pour l'écriture locale du premier principe, la taille du système étudié peut être réduite pour ne considérer *in fine* qu'un point matériel pour lequel on requiert que la production d'entropie soit positive. Cette démarche, appliquée à (9.14), fournit la forme locale matérielle du second principe de la thermodynamique pour un système ouvert :

$$\varrho_0 \dot{s} - \varrho_0 \tilde{r}_s + \tilde{\mathbf{J}}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (9.20a)$$

$$[\mathbf{J}_s] \cdot \mathbf{M} - [\varrho_0 s] Z \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (9.20b)$$

La forme spatiale du second principe de la thermodynamique s'obtient de manière équivalente à partir de (9.15). Elle est donnée par :

$$\varrho \dot{s} - \varrho \tilde{r}_s + \tilde{\mathbf{j}}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (9.21a)$$

$$[\varrho s \mathbf{v} + \mathbf{j}_s] \cdot \mathbf{m} - [\varrho s] \zeta \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (9.21b)$$

Il est important de comprendre que l'ensemble des termes qui apparaissent à gauche des inégalités (9.20) et (9.21) correspondent à un taux de création d'entropie par unité de volume. En particulier, la transformation subie par un point matériel est localement réversible dès lors que la somme de ces termes est nulle, ce qui signifie qu'elle ne s'accompagne d'aucune création d'entropie. Par opposition, la production d'entropie, dès lors qu'elle est strictement positive, souligne le caractère irréversible de la transformation subie par un point matériel.

Si le taux d'échange d'entropie $\dot{\mathcal{S}}_e$ est donné par le rapport entre le taux de chaleur reçue et la température pour un système fermé, le taux d'échange d'un système ouvert doit inclure une contribution supplémentaire qui représente les variations d'entropie induites par des transferts de masse qui ne sont pas comptabilisées dans le rapport entre le flux de chaleur et la température absolue. Ainsi, pour un système ouvert, la source spécifique d'entropie réduite \tilde{r}_s peut se décomposer comme suit :

$$\tilde{r}_s = \frac{\tilde{r}_q}{T} - \frac{\mu}{T} r_m \quad (9.22)$$

De manière semblable, les densités surfaciques de flux d'entropie réduites s'obtiennent à partir des densités surfaciques de flux de chaleur réduites à partir des relations :

$$\tilde{\mathbf{J}}_s = \frac{\tilde{\mathbf{J}}_q}{T} - \frac{\mu}{T} \mathbf{J}_m \quad (9.23a)$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_s = \frac{\tilde{\mathbf{j}}_q}{T} - \frac{\mu}{T} \mathbf{j}_m \quad (9.23b)$$

9.2.2 Cas des systèmes fermés

En l'absence de transfert de masse, les dérivées temporelles des densités d'entropie sont données par :

$$\dot{S}_0 = \varrho_0 \dot{s} \quad (9.24)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (S\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \varrho \dot{s} \quad (9.25)$$

Les expressions précédentes peuvent être injectées dans les relations (9.8) et (9.9). On peut ainsi écrire que le taux de production d'entropie d'un

système fermé s'exprime :

$$\dot{S}_c = \int_{\mathcal{V}_0} (\varrho_0 \dot{s} - \varrho_0 r_s + \mathbf{J}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) dV + \int_{\mathcal{L}_0} ([\mathbf{J}_s] \cdot \mathbf{M} - [\varrho_0 s] Z) dS \quad (9.26)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} (\varrho \dot{s} - \varrho r_s + \mathbf{j}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) dv + \int_{\mathcal{L}} ([\varrho s \mathbf{v} + \mathbf{j}_s] \cdot \mathbf{m} - [\varrho s] \zeta) ds \quad (9.27)$$

Puisque la production d'entropie du système, et de n'importe quel sous-système, doit être positive, on déduit de la relation (9.26) les inégalités qui correspondent à la forme locale matérielle du second principe de la thermodynamique pour un système fermé :

$$\varrho \dot{s} - \varrho r_s + \mathbf{J}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{L}_0 \quad (9.28a)$$

$$[\mathbf{J}_s] \cdot \mathbf{M} - [\varrho_0 s] Z \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{L}_0 \quad (9.28b)$$

Le transport des inégalités précédentes vers la configuration actuelle conduit à la forme spatiale du second principe de la thermodynamique :

$$\varrho \dot{s} - \varrho r_s + \mathbf{j}_s \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L} \quad (9.29a)$$

$$[\varrho s \mathbf{v} + \mathbf{j}_s] \cdot \mathbf{m} - [\varrho s] \zeta \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad (9.29b)$$

Pour un système fermé, le taux d'échange d'entropie correspond au rapport entre le flux de chaleur et la température absolue. En suivant cette définition, la source spécifique d'entropie s'exprime :

$$r_s = \frac{r_q}{T} \quad (9.30)$$

Aussi, de manière semblable, les densités surfaciques de flux d'entropie sont données par :

$$\mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{J}_q}{T} \quad (9.31)$$

$$\mathbf{j}_s = \frac{\mathbf{j}_q}{T} \quad (9.32)$$

Remarque Dans certaines approches, les grandeurs qui représentent le flux d'entropie, i.e. la source spécifique \tilde{r}_s ainsi que les densités surfaciques de flux $\tilde{\mathbf{J}}_s$ et $\tilde{\mathbf{j}}_s$, sont fournies à partir de relations de comportement. En particulier, il est possible de considérer que le flux d'entropie incorpore la contribution du flux de chaleur à laquelle une contribution supplémentaire est ajoutée. Cette dernière peut prendre la forme

d'une densité surfacique de flux supplémentaire [Maugin \(1990\)](#) ou d'une source spécifique supplémentaire [Ireman and Nguyen \(2004\)](#) d'entropie.

9.3 Puissance dissipée

Pour décrire l'effet d'un processus sur l'évolution d'un système, il convient d'évaluer la quantité de puissance dissipée à chaque instant à cause des éventuelles transformations irréversibles (e.g. endommagement, frottement). Ceci est particulièrement important pour les problèmes thermomécaniques pour lesquels les phénomènes dissipatifs contribuent largement à faire évoluer la température.

La quantité globale de puissance dissipée \mathcal{D} par un système est obtenue en intégrant les contributions des points réguliers et des points singuliers qui le composent. Dans le cadre d'une description matérielle, il est ainsi commode d'évaluer la puissance dissipée à partir de :

$$\mathcal{D} = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 d \, dV + \int_{\mathcal{Z}_0} \Delta_0 dS \quad (9.33)$$

Dans la relation précédente, la puissance dissipée spécifique par un point régulier est notée d tandis que la densité surfacique de puissance dissipée par un point singulier, lorsqu'elle est mesurée par unité de surface de la configuration initiale, est notée Δ_0 .

Dans le cadre d'une description spatiale, la puissance dissipée par un système en évolution prend une forme semblable à la précédente. Elle est ainsi donnée par :

$$\mathcal{D} = \int_{\mathcal{V}} \varrho \, d \, dv + \int_{\mathcal{Z}} \Delta \, ds \quad (9.34)$$

où Δ représente la densité surfacique de puissance dissipée par un point singulier lorsqu'elle est mesurée par unité de surface de la configuration actuelle.

Dans ce qui suit, on s'appuie sur les restrictions imposées par le second principe de la thermodynamique pour évaluer la puissance dissipée par un système selon qu'il soit ouvert ou fermé.

9.3.1 Cas des systèmes ouverts

La quantité de puissance dissipée est donnée par le produit du taux de production d'entropie et de la température absolue. Puisque la température absolue et le taux de production d'entropie sont positifs, le produit de ces deux quantités l'est également. Les inégalités (9.20), qui imposent la positivité du taux de production d'entropie, peuvent donc être reformulées comme suit :

$$\begin{aligned} & \varrho_0 \dot{s}T - \varrho_0 \tilde{r}_q + \varrho_0 \mu r_m + \tilde{\mathbf{J}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \\ & - \left(\frac{\mu \mathbf{J}_m}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) T - (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (9.35a) \end{aligned}$$

$$\langle T \rangle \left[\frac{\tilde{\mathbf{J}}_q}{T} + \left(s - \frac{\mu}{T} \right) \mathbf{J}_m \right] \cdot \mathbf{M} - \langle T \rangle [\varrho_0 s] Z \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (9.35b)$$

Lorsque la forme spatiale, plutôt que la forme matérielle précédente, est privilégiée, le produit des inégalités (9.21) et de la température conduit à :

$$\begin{aligned} & \varrho \dot{s}T - \varrho \tilde{r}_q + \varrho \mu r_m + \tilde{\mathbf{j}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \\ & - \left(\frac{\mu \mathbf{j}_m}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) T - (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{j}}_q \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{Z} \quad (9.36a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle T \rangle \left[\varrho s \mathbf{v} + \frac{\tilde{\mathbf{j}}_q}{T} + \left(s - \frac{\mu}{T} \right) \mathbf{j}_m \right] \cdot \mathbf{m} \\ & - \langle T \rangle [\varrho s] \zeta \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (9.36b) \end{aligned}$$

Il convient de remarquer que le champ de température est susceptible d'être discontinu au travers d'une surface de singularité. Les inégalités qui correspondent au cas particulier des points singuliers utilisent donc la moyenne des températures prises de part et d'autre de la surface de singularité.

Comme évoqué précédemment, la quantité de puissance dissipée est donnée par le produit du taux de production d'entropie et de la température. Les termes qui apparaissent à gauche des inégalités (9.35) et (9.36) correspondent donc à des densités (volumique ou surfacique) de puissance dissipée. Ainsi, pour un système ouvert, la puissance dissipée spécifique d pour un point régulier s'exprime :

$$\begin{aligned} d &= \dot{s}T - \tilde{r}_q + \mu r_m + \frac{1}{\varrho_0} \tilde{\mathbf{J}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \\ & - \frac{T}{\varrho_0} \left(\frac{\mu \mathbf{J}_m}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \quad (9.37) \end{aligned}$$

Si des grandeurs associées à la configuration actuelle sont préférées, la puissance dissipée spécifique peut également être évaluée à partir de :

$$d = \dot{s}T - \tilde{r}_q + \mu r_m + \frac{1}{\varrho} \tilde{\mathbf{j}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{T}{\varrho} \left(\frac{\mu \mathbf{j}_m}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) - \frac{1}{\varrho} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{j}}_q \quad (9.38)$$

Aussi, la densité surfacique de puissance dissipée par un point singulier d'un système ouvert Δ_0 est donnée par :

$$\Delta_0 = \langle T \rangle \left[\frac{\tilde{\mathbf{J}}_q}{T} + \left(s - \frac{\mu}{T} \right) \mathbf{J}_m \right] \cdot \mathbf{M} - \langle T \rangle [\varrho_0 s] Z \quad (9.39)$$

Lorsqu'elle mesurée par unité de surface de la configuration actuelle, plutôt qu'initiale, la densité surfacique de puissance dissipée par un point singulier Δ s'écrit :

$$\Delta = \langle T \rangle \left[\varrho s \mathbf{v} + \frac{\tilde{\mathbf{j}}_q}{T} + \left(s - \frac{\mu}{T} \right) \mathbf{j}_m \right] \cdot \mathbf{m} - \langle T \rangle [\varrho s] \zeta \quad (9.40)$$

L'utilisation de la forme locale matérielle (8.19) du premier principe pour un système ouvert permet de réécrire les expressions (9.37) et (9.39). En particulier, la source de dissipation spécifique d d'un point régulier peut s'exprimer comme suit :

$$d = \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + (\dot{s}T - \dot{u} + \mu r_m) - \frac{T}{\varrho_0} \left(\frac{\mu \mathbf{J}_m}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \quad (9.41)$$

De la même manière, pour un point singulier, on obtient que la densité de puissance dissipée Δ_0 est donnée par :

$$\Delta_0 = ([\varrho_0 u] - \langle T \rangle [\varrho_0 s]) Z - ([u \mathbf{J}_m] - \langle T \rangle [s \mathbf{J}_m]) \cdot \mathbf{M} + \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\mathbf{P}} \rangle - \langle T \rangle \left[\frac{\mu \mathbf{J}_m}{T} \right] - [T] \left\langle \frac{\tilde{\mathbf{J}}_q}{T} \right\rangle \right) \cdot \mathbf{M} \quad (9.42)$$

Les expressions (9.38) et (9.40) peuvent également être reformulées à partir des équations (8.20), qui donnent la forme spatiale du premier principe de la

thermodynamique. La source de dissipation spécifique d associée à un point régulier peut ainsi être évaluée à partir de :

$$d = \frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + (\dot{s}T - \dot{u} + \mu r_m) - \frac{T}{\varrho} \left(\frac{\mu \dot{\mathbf{j}}_m}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) - \frac{1}{\varrho} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{j}}_q \quad (9.43)$$

Enfin, en utilisant le premier principe pour un point singulier, la densité surfacique de puissance dissipée par un point singulier Δ s'écrit également :

$$\Delta = ([\varrho u] - \langle T \rangle [\varrho s]) \zeta - ([u(\mathbf{j}_m + \varrho \mathbf{v})] - \langle T \rangle [s(\mathbf{j}_m + \varrho \mathbf{v})]) \cdot \mathbf{m} + \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle - \langle T \rangle \left[\frac{\mu \dot{\mathbf{j}}_m}{T} \right] - [T] \langle \frac{\tilde{\mathbf{j}}_q}{T} \rangle \right) \cdot \mathbf{m} \quad (9.44)$$

La puissance dissipée globale \mathcal{D} est la somme des puissances dissipées associées aux différents points matériels qui composent le système considéré. À cause des restrictions imposées par le second principe de la thermodynamique, les contributions d'un point matériel, qu'il soit régulier ou singulier, sont positives (i.e. $d \geq 0$, $\Delta_0 \geq 0$ et $\Delta \geq 0$). La puissance dissipée globale \mathcal{D} est donc également positive. Le cas particulier où la puissance dissipée globale est nulle à chaque instant correspond à la situation où l'ensemble des points matériels qui composent le système ont subi une transformation réversible au cours du processus considéré.

9.3.2 Cas des systèmes fermés

Pour un système fermé, le produit du taux de création d'entropie et de la température s'obtient à partir des inégalités qui constituent l'énoncé local du second principe de la thermodynamique. Ainsi, après multiplication par la température absolue, les inégalités (9.28) deviennent :

$$\varrho_0 \dot{s}T - \varrho_0 r_q + \mathbf{J}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{Z}_0 \quad (9.45a)$$

$$\langle T \rangle \left[\frac{\mathbf{J}_q}{T} \right] \cdot \mathbf{M} - \langle T \rangle [\varrho_0 s] Z \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{Z}_0 \quad (9.45b)$$

Pour une description spatiale, selon que le point matériel considéré soit régulier ou non, le produit des inégalités (9.29) par la température absolue

conduit à :

$$\varrho \dot{s}T - \varrho r_q + \mathbf{j}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{j}_q \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L} \quad (9.46a)$$

$$\langle T \rangle \left[\frac{\mathbf{j}_q}{T} \right] \cdot \mathbf{m} - \langle T \rangle [\varrho s] \zeta \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad (9.46b)$$

Comme pour un système ouvert, le taux de création d'entropie est multiplié par la température moyenne pour les points singuliers du système considéré.

Les inégalités précédentes permettent d'identifier les expressions de la puissance dissipée spécifique pour un point régulier. En effet, si elle est exprimée à partir de grandeurs attachées à la configuration initiale, elle est donnée par :

$$d = \dot{s}T - r_q + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{J}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q \quad (9.47)$$

De manière équivalente, la source de dissipation spécifique associée à un point régulier peut être évaluée à partir de la relation :

$$d = \dot{s}T - r_q + \frac{1}{\varrho} \mathbf{j}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{\varrho} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{j}_q \quad (9.48)$$

Aussi, la densité surfacique de puissance dissipée Δ_0 par un point singulier dans le cadre d'une description matérielle est donnée par :

$$\Delta_0 = \langle T \rangle \left[\frac{\mathbf{J}_q}{T} \right] \cdot \mathbf{M} - \langle T \rangle [\varrho_0 s] Z \quad (9.49)$$

L'équivalent spatial de la relation précédente, qui conduit à la densité de puissance dissipée Δ par un point singulier par unité de surface de la configuration actuelle, s'écrit :

$$\Delta = \langle T \rangle \left[\varrho s \mathbf{v} + \frac{\mathbf{j}_q}{T} \right] \cdot \mathbf{m} - \langle T \rangle [\varrho s] \zeta \quad (9.50)$$

L'utilisation des formes locales du premier principe obtenues pour un système fermé permet d'introduire la variation d'énergie interne dans les inégalités précédentes. Spécifiquement, les équations locales de conservation de l'énergie (8.27) permettent de reformuler les expressions (9.47) et (9.49) comme suit :

$$d = \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + (\dot{s}T - \dot{u}) - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q \quad (9.51)$$

$$\Delta_0 = ([\varrho_0 u] - \langle T \rangle [\varrho_0 s]) Z + \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \mathbf{P} \rangle - [T] \left\langle \frac{\mathbf{J}_q}{T} \right\rangle \right) \cdot \mathbf{M} \quad (9.52)$$

Par analogie, la prise en compte des équations spatiales de conservation de l'énergie (8.28) dans les relations (9.48) et (9.50) conduit à :

$$d = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + (\dot{s}T - \dot{u}) - \frac{1}{\rho} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{j}_q \quad (9.53)$$

$$\begin{aligned} \Delta = & ([\rho u] - \langle T \rangle [\rho s]) \zeta - ([\rho u \mathbf{v}] - \langle T \rangle [\rho s \mathbf{v}]) \cdot \mathbf{m} \\ & + \left([\mathbf{v}] \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle - [T] \left\langle \frac{\mathbf{j}_q}{T} \right\rangle \right) \cdot \mathbf{m} \end{aligned} \quad (9.54)$$

Du fait du second principe de la thermodynamique, les grandeurs d , Δ_0 et Δ , qui mesurent la contribution d'un point matériel (régulier ou singulier) à la puissance dissipée par un système sont nécessairement positives.

Chapitre 10

Troisième principe de la thermodynamique et stabilité thermodynamique

Le troisième principe de la thermodynamique impose des restrictions quant au comportement de certaines propriétés thermodynamiques lorsque la température absolue s'approche de zéro, ce qui correspond à l'état d'agitation thermique minimale. Le troisième principe est donc moins fondamental que les premier et second principes au sens où il ne devient important que pour des applications cryogéniques pour lesquelles la température peut se situer au voisinage du zéro absolu.

Dans ce chapitre, les définitions thermodynamiques de quelques propriétés physiques courantes sont d'abord rappelées. L'énoncé du troisième principe de la thermodynamique est ensuite présenté. Ce principe est utilisé pour discuter des restrictions qui s'appliquent aux propriétés précédemment introduites. Les conditions de stabilité thermodynamique, qui imposent des restrictions supplémentaires aux propriétés thermodynamiques sont discutées dans la dernière partie de ce chapitre.

10.1 Propriétés thermodynamiques

10.1.1 Tenseur de dilatation thermique

Le tenseur de dilatation thermique α_b mesure, pour un état de contrainte fixé, la variation de l'état de déformation provoquée par une variation de la température. Puisqu'il existe une infinité de mesures de l'état de déformation (voir Chapitre 3), le tenseur de dilatation thermique peut être défini d'une infinité de manières différentes. Une approche commode, bien qu'arbitraire, consiste à utiliser le tenseur des déformations de Biot pour construire le tenseur de dilatation thermique, ce qui signifie que :

$$\alpha_b = \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial T} \right|_{\Sigma_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.1)$$

$$= -\varrho_0 \left. \frac{\partial^2 g}{\partial T \partial \Sigma_b} \right|_{\varrho_0, x_i} \quad (10.2)$$

Quelle que soit la mesure de l'état de déformation retenue, elle est représentée par un tenseur du second ordre symétrique. Le tenseur de dilatation thermique est donc également un tenseur du second ordre symétrique.

Le coefficient de dilatation linéaire α_n mesure la variation de longueur relative, i.e. la déformation, induite par une variation de température selon une direction particulière représentée par le vecteur unitaire \mathbf{n} . Le coefficient de dilatation linéaire α_n est donc le résultat de la projection du tenseur de dilatation thermique selon la direction \mathbf{n} , soit :

$$\alpha_n = \mathbf{n} \cdot \alpha_b \cdot \mathbf{n} \quad (10.3)$$

Lorsque les propriétés de dilatation thermique sont isotropes, le tenseur de dilatation thermique est entièrement défini à partir d'un unique coefficient de dilatation thermique α tel que $\alpha_b = \alpha \mathbf{1}$. Pour ce cas particulier, le coefficient de dilatation linéaire ne dépend alors pas de la direction de mesure (i.e. $\alpha_n = \alpha, \forall \mathbf{n}$).

Le coefficient de dilatation volumique α_v correspond à la variation de volume relative provoquée par une variation de la température. Le choix du tenseur des déformations de Biot pour l'évaluation du coefficient de dilatation thermique permet d'exprimer le coefficient de dilatation volumique α_v à partir du tenseur de dilatation thermique comme suit :

$$\alpha_v = \text{tr}(\mathbf{U} \cdot \alpha_b) \quad (10.4)$$

Pour le cas particulier de propriétés de dilatation thermique isotropes, le coefficient de dilatation volumique est donné par $\alpha_v = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{U})$.

Remarque Si le tenseur de dilatation thermique est défini à partir du tenseur des déformations de Hencky, i.e. $\boldsymbol{\alpha}_t = \partial \mathbf{E}_t / \partial T$, le coefficient de dilatation volumique α_v est alors donné par la trace du tenseur de dilatation thermique, soit $\alpha_v = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}_t)$.

10.1.2 Tenseurs de rigidité et de souplesse

Le tenseur de rigidité fournit une indication quant à la variation de l'état de contrainte produite par une variation de l'état de déformation. Pour l'évaluation des propriétés de rigidité, il faut toutefois se poser la question du contrôle des autres variables d'état externes, en particulier la température et l'entropie. Les propriétés de rigidité isothermes (i.e. à température constante) sont représentées par le tenseur \mathbb{C}_T tel que :

$$\mathbb{C}_T = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b}{\partial \mathbf{E}_b} \right|_{T, \varrho_0, x_i} \quad (10.5)$$

$$= \varrho_0 \left. \frac{\partial^2 a}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_{T, \varrho_0, x_i} \quad (10.6)$$

Les propriétés de rigidité isentropique, i.e. à entropie spécifique constante, sont données par le tenseur \mathbb{C}_s dont la définition thermodynamique est :

$$\mathbb{C}_s = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b}{\partial \mathbf{E}_b} \right|_{s, \varrho_0, x_i} \quad (10.7)$$

$$= \varrho_0 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_{s, \varrho_0, x_i} \quad (10.8)$$

Le tenseur de rigidité, qu'il soit isotherme ou isentropique, possède des symétries aussi bien mineures que majeures.

Remarque Comme pour le tenseur de dilatation thermique, la définition des propriétés de rigidité et de souplesse est dépendante des mesures de l'état de déformation et de l'état de contrainte utilisées. Si le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes de Biot sont utilisés ici, rien n'interdit la construction de tenseurs de rigidité et de souplesse qui s'appuient sur d'autres mesures de l'état de déformation

et de l'état de contrainte sous réserve qu'elles disposent d'une relation de conjugaison. Le choix des mesures de contrainte et de déformation n'affecte les propriétés de rigidité que lorsque les transformations sont importantes.

Dans le cas particulier où les propriétés de rigidité sont isotropes, le tenseur de rigidité peut être construit à partir de deux constantes qui correspondent aux parties sphérique et déviatorique :

$$\mathbb{C}_T = 3B_T \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G_T \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (10.9)$$

$$\mathbb{C}_s = 3B_s \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G_s \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (10.10)$$

où B_T (respectivement B_s) désigne le module de compressibilité isotherme (respectivement isentropique) et G_T (respectivement G_s) correspond au module de cisaillement isotherme (respectivement isentropique).

Le tenseur de souplesse mesure la variation de déformation induite par une variation de l'état de contrainte. Comme pour les propriétés de rigidité, il convient de distinguer le cas où la température est fixée de celui où l'entropie spécifique est maintenue constante. Ainsi, le tenseur de souplesse isotherme \mathbb{S}_T est donné par :

$$\mathbb{S}_T = \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b} \right|_{T, \varrho_0, x_i} \quad (10.11)$$

$$= -\varrho_0 \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b \partial \boldsymbol{\Sigma}_b} \right|_{T, \varrho_0, x_i} \quad (10.12)$$

Le tenseur de souplesse isentropique \mathbb{S}_s s'obtient par une relation semblable à la précédente, à ceci près qu'il faut fixer l'entropie, ce qui conduit à :

$$\mathbb{S}_s = \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b} \right|_{s, \varrho_0, x_i} \quad (10.13)$$

$$= -\varrho_0 \left. \frac{\partial^2 h}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b \partial \boldsymbol{\Sigma}_b} \right|_{s, \varrho_0, x_i} \quad (10.14)$$

Il convient de remarquer que les propriétés de souplesse et de rigidité ne sont pas indépendantes les unes des autres. Les tenseurs de rigidité et de souplesse sont en effet liés par les relations :

$$\mathbb{S}_T = \mathbb{C}_T^{-1} \quad (10.15)$$

$$\mathbb{S}_s = \mathbb{C}_s^{-1} \quad (10.16)$$

Ainsi, lorsque les propriétés de rigidité (donc de souplesse) sont isotropes, les tenseurs de souplesse isotherme et isentropique sont donnés par :

$$\mathbb{S}_T = \frac{1}{3B_T} \mathbb{P}_{\text{sph}} + \frac{1}{2G_T} \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (10.17)$$

$$\mathbb{S}_s = \frac{1}{3B_s} \mathbb{P}_{\text{sph}} + \frac{1}{2G_s} \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (10.18)$$

Les coefficients de compressibilité isotherme et isentropique, notés respectivement χ_T et χ_s , mesurent la variation de volume relative provoquée par une variation de pression hydrostatique. Lorsque les propriétés de rigidité sont isotropes, ces coefficients correspondent aux inverses des modules de compressibilité B_T et B_s .

10.1.3 Capacité thermique spécifique

Afin d'augmenter la température d'un point matériel, il est nécessaire de lui transférer de l'énergie. La capacité thermique spécifique est une grandeur qui mesure la variation d'énergie par unité de masse nécessaire à une variation de la température absolue. Selon qu'on fixe l'état de déformation ou l'état de contrainte, on distingue la capacité thermique spécifique à déformation constante, notée c_v , de la capacité thermique spécifique à contrainte constante, notée c_p .

Remarque Les notations c_v et c_p sont introduites en référence aux capacités thermiques spécifiques à volume constant et à pression constante classiquement utilisées en thermodynamique. Toutefois, dans le contexte de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus, le volume ne permet pas de représenter l'entière des états de déformation d'un système tout comme la pression ne suffit à intégralement définir l'état de contrainte. Ainsi, quand bien même les notations restent inchangées, il faut interpréter la capacité thermique à déformation constante (respectivement contrainte constante) comme une généralisation de la capacité thermique à volume constant (respectivement pression constante).

La capacité thermique spécifique à déformation constante c_v correspond à la variation d'énergie interne spécifique u par unité de température de sorte

que :

$$c_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.19)$$

$$= T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.20)$$

$$= -T \left. \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.21)$$

La capacité thermique spécifique à contrainte constante c_p s'obtient à partir de l'enthalpie spécifique h par :

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{\boldsymbol{\Sigma}_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.22)$$

$$= T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\boldsymbol{\Sigma}_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.23)$$

$$= -T \left. \frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \right|_{\boldsymbol{\Sigma}_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.24)$$

Ces deux définitions de la capacité thermique spécifique sont liées l'une à l'autre par la relation :

$$c_p = c_v + \frac{1}{\varrho_0} T \boldsymbol{\alpha}_b : \mathbb{C}_T : \boldsymbol{\alpha}_b \quad (10.25)$$

Dans le cas où les propriétés de rigidité et de dilatation thermique sont isotropes, la relation précédente devient :

$$c_p = c_v + \frac{9TB_T\alpha^2}{\varrho_0} \quad (10.26)$$

Démonstration Pour obtenir la relation entre les capacités thermiques spécifiques à déformation constante et contrainte constante, il faut s'appuyer sur les définitions thermodynamiques du tenseur de di-

latation thermique et du tenseur de rigidité isotherme :

$$\begin{aligned}
c_p &= T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\Sigma_b, \varrho_0, x_i} \\
&= T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} + T \left. \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}_b} \right|_{T, \varrho_0, x_i} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial T} \right|_{\Sigma_b, \varrho_0, x_i} \\
&= T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} - T \left. \frac{\partial^2 a}{\partial \mathbf{E}_b \partial T} \right|_{\varrho_0, x_i} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial T} \right|_{\Sigma_b, \varrho_0, x_i} \\
&= T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} - T \left. \frac{\partial \Sigma_b}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial T} \right|_{\Sigma_b, \varrho_0, x_i} \\
&= T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} + T \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial T} \right|_{\Sigma_b, \varrho_0, x_i} : \left. \frac{\partial \Sigma_b}{\partial \mathbf{E}_b} \right|_{T, \varrho_0, x_i} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial T} \right|_{\Sigma_b, \varrho_0, x_i} \\
&= c_v + \frac{1}{\varrho_0} T \boldsymbol{\alpha}_b : \mathbb{C}_T : \boldsymbol{\alpha}_b
\end{aligned}$$

10.2 Troisième principe de la thermodynamique

10.2.1 Énoncé

Le périmètre du troisième principe de la thermodynamique est plus restreint que ceux des premier et second principes. En effet, le troisième principe s'intéresse au comportement observé lorsque la température absolue approche la valeur nulle. Le troisième principe, parfois appelé postulat de Nernst, indique que l'entropie prend une valeur constante, qui ne dépend d'aucune autre variable d'état externe, lorsque la température approche le zéro absolu.

Discussion Il existe une forme plus restrictive du troisième principe de la thermodynamique, due à Planck, qui permet de définir une échelle absolue d'entropie. En effet, dans cette forme alternative, le troisième principe associe une valeur nulle, plutôt que constante, à l'entropie d'un corps pur s'il prenait la forme d'un solide cristallin parfait à la température du zéro absolu.

10.2.2 Conséquences

Le troisième principe de la thermodynamique impose des restrictions quant au comportement des propriétés thermodynamiques au voisinage du zéro absolu. Pour mettre en évidence ces restrictions, on considère un processus pour lequel toutes les variables d'état indépendantes, à l'exception de la température, sont fixés. Si la température passe de zéro à une valeur θ non-nulle et que le tenseur des déformations constitue l'une des variables d'état externe, l'entropie spécifique à l'état final est donnée par :

$$s = s_0 + \int_0^\theta \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} dT \quad (10.27)$$

$$= s_0 + \int_0^\theta \frac{c_v}{T} dT \quad (10.28)$$

où s_0 désigne la valeur de l'entropie spécifique au zéro absolu. Puisque l'entropie doit prendre une valeur finie, on en déduit que la capacité thermique à déformation constante doit tendre vers une valeur nulle à l'approche du zéro absolu :

$$\lim_{T \rightarrow 0} c_v = 0 \quad (10.29)$$

Si on choisit le tenseur des contraintes, plutôt que le tenseur des déformations, comme variable d'état externe primale, il est possible de conduire un raisonnement semblable au précédent. Ainsi, pour un processus thermodynamique où les variables d'état externes primales, à l'exception de la température qui varie du zéro absolu à une température θ , sont fixées, l'entropie spécifique à la fin du processus est donnée par :

$$s = s_0 + \int_0^\theta \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\boldsymbol{\Sigma}_b, \varrho_0, x_i} dT \quad (10.30)$$

$$= s_0 + \int_0^\theta \frac{c_p}{T} dT \quad (10.31)$$

La capacité thermique spécifique à contrainte constante doit donc s'annuler quand la température approche le zéro absolu pour que l'entropie prenne une valeur finie lorsque la température finale θ est atteinte :

$$\lim_{T \rightarrow 0} c_p = 0 \quad (10.32)$$

Aussi, si l'entropie spécifique ne dépend pas des autres variables d'état externes, donc de l'état de contrainte, la condition suivante doit être satisfaite :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial s}{\partial \Sigma_b} \Big|_{T, \varrho_0, x_i} \right) = \mathbf{0} \quad (10.33)$$

La dérivée partielle de l'entropie spécifique, pour un état de contrainte fixe, correspond en fait à un facteur près au tenseur de dilatation thermique puisque :

$$\frac{\partial s}{\partial \Sigma_b} \Big|_{T, \varrho_0, x_i} = - \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_b \partial T} \Big|_{\varrho_0, x_i} \quad (10.34)$$

$$= \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial T} \Big|_{\Sigma_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.35)$$

$$= \frac{\boldsymbol{\alpha}_b}{\varrho_0} \quad (10.36)$$

La condition (10.33) impose donc l'annulation du tenseur de dilatation thermique au zéro absolu :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \boldsymbol{\alpha}_b = \mathbf{0} \quad (10.37)$$

Enfin, puisque l'entropie spécifique ne doit pas dépendre de l'état de déformation au voisinage d'une température absolue nulle, on a :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}_b} \Big|_{T, \varrho_0, x_i} \right) = \mathbf{0} \quad (10.38)$$

Les définitions du tenseur de rigidité isotherme et du coefficient de dilatation thermique permettent d'exprimer la dérivée partielle de l'entropie spécifique par rapport au tenseur des déformations comme suit :

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}_b} \Big|_{T, \varrho_0, x_i} = - \frac{\partial^2 a}{\partial \mathbf{E}_b \partial T} \Big|_{\varrho_0, x_i} \quad (10.39)$$

$$= - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \Sigma_b}{\partial T} \Big|_{\mathbf{E}_b, \varrho_0, x_i} \quad (10.40)$$

$$= \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{C}_T : \boldsymbol{\alpha}_b \quad (10.41)$$

Ainsi, si la condition (10.37) est vérifiée, la condition (10.38) est automatiquement satisfaite puisqu'elle se résume à :

$$\lim_{T \rightarrow 0} (\mathbb{C}_T : \boldsymbol{\alpha}_b) = \mathbf{0} \quad (10.42)$$

10.3 Stabilité thermodynamique

10.3.1 Entropie spécifique

L'entropie spécifique est une fonction d'état dont la valeur pour un point matériel dépend de l'énergie interne spécifique, de l'état de déformation, de la masse volumique et d'éventuelles variables internes qui fournissent une information quant à l'état microstructural de ce point. L'utilisation des relations d'état (6.15), (6.17) et (6.18) permet d'exprimer la variation d'entropie spécifique par unité de temps comme suit :

$$\dot{s} = \frac{1}{T} \dot{u} - \frac{\mathbf{P}}{\rho_0 T} : \dot{\mathbf{F}} - \frac{\mu}{\rho_0 T} \dot{\rho}_0 + \sum_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (10.43)$$

Si on considère un processus thermodynamique particulier pour lequel les variables d'état externes primales dont dépend l'entropie spécifique sont constantes, cela signifie que :

- L'énergie interne spécifique est constante donc \dot{u} est nulle.
- L'état de déformation est constant donc $\dot{\mathbf{F}}$ est un tenseur nul.
- La masse volumique prise par unité de volume de la configuration initiale est constante donc $\dot{\rho}_0$ est nulle.

Aussi, si le point matériel considéré est isolé, les phénomènes de transport de masse et de chaleur sont inexistantes. Les densités surfaciques de flux $\tilde{\mathbf{J}}_q$ et \mathbf{J}_m ainsi que les sources spécifiques \tilde{r}_q et r_m sont donc nulles.

Pour ce processus particulier, il est possible d'exprimer le taux de variation d'entropie spécifique en fonction de la source de dissipation en utilisant les résultats obtenus au 9.3. On montre notamment que, dans la situation

considérée, le taux de variation d'entropie spécifique d'un point régulier s'écrit :

$$\dot{s} = \sum_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{d}{T} \geq 0 \quad (10.44)$$

La température absolue et la source de dissipation étant positives, on en déduit que, pendant le processus particulier décrit précédemment, l'entropie ne peut que croître. L'état d'équilibre correspond à une absence d'évolution de la microstructure du point considéré. Par conséquent, les vitesses d'évolution des variables internes \dot{x}_i , donc la source de dissipation, s'annulent à l'équilibre. Conformément à ce qui a été discuté au 6.5, l'entropie spécifique d'un point matériel isolé, pour lequel l'énergie interne spécifique, l'état de déformation et la masse volumique sont fixés, croît ainsi jusqu'à atteindre une valeur maximale qui correspond à l'état d'équilibre.

Afin de discuter de la stabilité de l'équilibre thermodynamique, on considère un système isolé homogène à l'équilibre, l'entropie spécifique s est uniforme au sein du système. L'entropie totale \mathcal{S} du système est alors donnée par¹:

$$\mathcal{S} = \varrho_0 s(u, \mathbf{E}_b) \mathcal{V}_0 \quad (10.45)$$

où \mathcal{V}_0 représente le volume du système dans la configuration initiale. Il convient de préciser qu'on a délibérément supposé que l'entropie spécifique dépend du gradient de la transformation \mathbf{F} uniquement au travers du tenseur des déformations de Biot \mathbf{E}_b . Si le choix de cette mesure de déformation particulière est subjectif, l'indépendance vis-à-vis du tenseur de rotation est motivée par le respect des conditions d'objectivité qui sont discutées en détail au Chapitre 11. On peut par ailleurs remarquer que, du fait de la relation de conjugaison qui existent entre ces grandeurs, les produits $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_b : \dot{\mathbf{E}}_b$ sont égaux.

Pour définir les conditions de stabilité, on peut considérer une partition du système en deux sous-parties repérées par les exposants a et b de sorte que:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0^a + \mathcal{V}_0^b \quad (10.46)$$

Il est maintenant possible d'imaginer une perturbation du système qui consiste en un transfert d'énergie interne et un transfert de l'état de déformation

¹Afin d'alléger les notations, seule la dépendance de l'entropie spécifique vis-à-vis de l'énergie interne spécifique et de l'état de déformation est explicitement mentionnée.

de la sous-partie a vers la sous-partie b . Le transfert d'énergie interne est représenté par une variation d'énergie interne spécifique Δu telle que :

$$u^a = u + \frac{\gamma_0^b}{\gamma_0} \Delta u \quad (10.47)$$

$$u^b = u - \frac{\gamma_0^a}{\gamma_0} \Delta u \quad (10.48)$$

Une telle perturbation n'affecte pas la valeur globale de l'énergie interne du système, mais uniquement sa répartition, puisque :

$$\mathcal{U} = \varrho_0 u \gamma_0 \quad (10.49)$$

$$= \varrho_0 u^a \gamma_0^a + \varrho_0 u^b \gamma_0^b \quad (10.50)$$

De manière semblable, la perturbation de l'état de déformation est représenté par un tenseur $\Delta \mathbf{E}_b$ qui permet d'évaluer le tenseur des déformations de Biot pour chaque sous-partie du système à partir de :

$$\mathbf{E}_b^a = \mathbf{E}_b + \frac{\gamma_0^b}{\gamma_0} \Delta \mathbf{E}_b \quad (10.51)$$

$$\mathbf{E}_b^b = \mathbf{E}_b - \frac{\gamma_0^a}{\gamma_0} \Delta \mathbf{E}_b \quad (10.52)$$

L'écriture précédente assure que l'état de déformation du système, qui correspond à la moyenne volumique des tenseurs de déformation associés aux différentes sous-parties, n'est pas affecté par la perturbation :

$$\frac{\gamma_0^a}{\gamma_0} \mathbf{E}_b^a + \frac{\gamma_0^b}{\gamma_0} \mathbf{E}_b^b = \mathbf{E}_b \quad (10.53)$$

Suite à la perturbation, l'entropie du système varie de $\Delta \mathcal{S}$ avec:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} + \Delta \mathcal{S} &= \varrho_0 s \left(u + \frac{\gamma_0^b}{\gamma_0} \Delta u, \mathbf{E}_b + \frac{\gamma_0^b}{\gamma_0} \Delta \mathbf{E}_b \right) \gamma_0^a \\ &+ \varrho_0 s \left(u - \frac{\gamma_0^a}{\gamma_0} \Delta u, \mathbf{E}_b - \frac{\gamma_0^a}{\gamma_0} \Delta \mathbf{E}_b \right) \gamma_0^b \end{aligned} \quad (10.54)$$

La stabilité du système nécessite que le système perturbé retourne spontanément vers son état d'équilibre initial. En d'autres termes, puisque

l'équilibre correspond à la valeur d'entropie maximale, il en résulte que la stabilité impose que $\Delta\mathcal{S}$ soit négatif:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{S} = & \varrho_0 s \left(u + \frac{\gamma_0^b}{\gamma_0} \Delta u, \mathbf{E}_b + \frac{\gamma_0^b}{\gamma_0} \Delta \mathbf{E}_b \right) \gamma_0^a \\ & + \varrho_0 s \left(u - \frac{\gamma_0^a}{\gamma_0} \Delta u, \mathbf{E}_b - \frac{\gamma_0^a}{\gamma_0} \Delta \mathbf{E}_b \right) \gamma_0^b - \varrho_0 s (u, \mathbf{E}_b) \gamma_0 \leq 0 \end{aligned} \quad (10.55)$$

L'inégalité précédente correspond à un critère de concavité d'une fonction. Comme le montre la Figure 10.1, la stabilité thermodynamique d'un système nécessite donc que l'entropie spécifique soit une fonction concave de l'énergie interne spécifique et du tenseur des déformations.

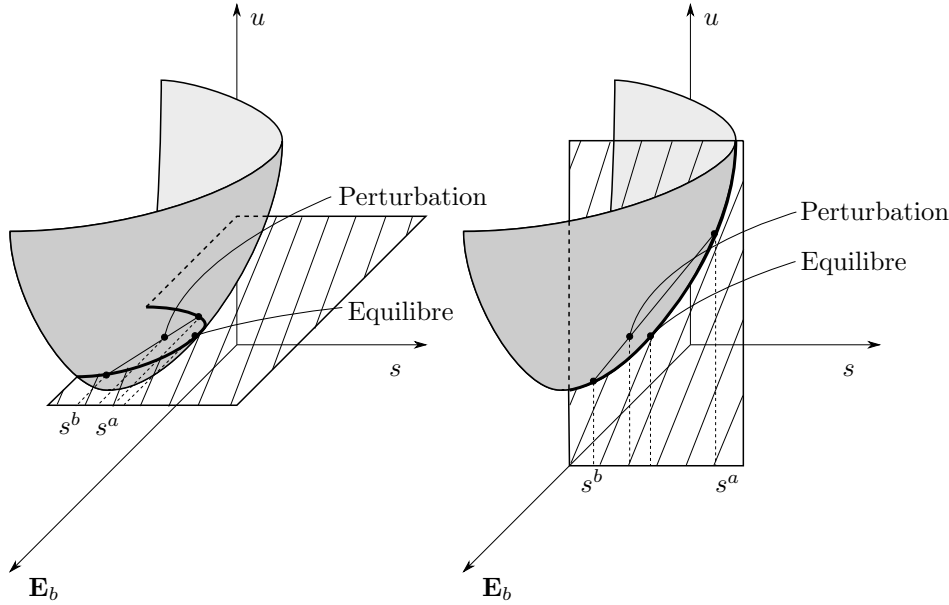


Figure 10.1: Effet d'une perturbation sur l'entropie spécifique d'un système pour lequel l'état de déformation moyen et l'énergie interne totale sont fixés. La stabilité globale exige que l'entropie spécifique soit une fonction concave de l'état de déformation (gauche) et de l'énergie interne spécifique (droite).

La concavité de l'entropie spécifique correspond à un critère de stabilité globale au sens où, quelle que soit l'ampleur des perturbations considérées, le système retourne vers l'état d'équilibre initial. Un critère moins strict consiste à n'imposer qu'une stabilité locale en ne considérant que des perturbations infinitésimales. Cette stabilité locale est garantie si la matrice

hessienne, construite à partir des dérivées secondes $\partial^2 s / \partial u^2$, $\partial^2 s / \partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b$ et $\partial^2 s / \partial u \partial \mathbf{E}_b$ est semi-définie négative. Il en résulte que :

$$\left. \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right|_{\mathbf{E}_b} du^2 \leq 0, \quad \forall du \quad (10.56)$$

$$d\mathbf{E}_b : \left. \frac{\partial^2 s}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_u : d\mathbf{E}_b \leq 0, \quad \forall d\mathbf{E}_b \quad (10.57)$$

$$d\mathbf{E}_b : \left(\left. \frac{\partial^2 s}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_u \left. \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right|_{\mathbf{E}_b} - \frac{\partial^2 s}{\partial \mathbf{E}_b \partial u} \otimes \frac{\partial^2 s}{\partial \mathbf{E}_b \partial u} \right) : d\mathbf{E}_b \geq 0, \quad \forall d\mathbf{E}_b \quad (10.58)$$

Pour qu'un point matériel soit localement stable, il est donc nécessaire, mais pas suffisant, que la dérivée seconde $\partial^2 s / \partial u^2$ soit négative et que le tenseur $\partial^2 s / \partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b$ soit défini négatif. Si la stabilité globale, représentée par la concavité de l'entropie spécifique, implique la stabilité locale, à laquelle on associe les conditions précédentes, la réciproque n'est pas nécessairement vérifiée. En effet, les conditions locales indiquent seulement qu'un point matériel retrouve son état d'équilibre, qui correspond à la valeur maximale d'entropie spécifique, pour des perturbations infinitésimales.

10.3.2 Énergie interne spécifique

Par un raisonnement analogue, on peut étudier les conditions de stabilité thermodynamique du point de vue de l'énergie interne spécifique. Ainsi, en utilisant la définition de la température absolue et du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, la variation d'énergie interne spécifique par unité de temps pour un point matériel régulier s'exprime :

$$\dot{u} = T\dot{s} + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\mu}{\varrho_0} \dot{\varrho}_0 + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (10.59)$$

Comme précédemment, on analyse un processus thermodynamique particulier pour lequel les variables d'état externes primales dont dépend l'énergie interne spécifique sont fixées. Cela suppose donc que :

- L'entropie spécifique est constante donc \dot{s} est nulle.
- L'état de déformation est constant donc $\dot{\mathbf{F}}$ est un tenseur nul.

- La masse volumique prise par unité de volume de la configuration initiale est constante donc $\dot{\rho}_0$ est nulle.

Aussi, l'absence de transfert de masse pour le point matériel considéré suppose d'annuler la densité surfacique de flux de masse \mathbf{J}_m ainsi que la source spécifique de masse r_m . La densité surfacique de flux de chaleur $\tilde{\mathbf{J}}_q$ et la source spécifique de chaleur \tilde{r}_q sont également supposées nulles. Ces différentes hypothèses sont des conséquences du caractère isolé conféré au point matériel considéré.

Pour un tel processus, la variation d'énergie interne spécifique est égale à l'opposé de la source de dissipation puisque :

$$\dot{u} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i = -d \leq 0 \quad (10.60)$$

L'inégalité précédente souligne que, pour le processus considéré ici, l'énergie interne spécifique d'un point matériel ne peut que diminuer. Cette diminution, qui est la conséquence du second principe de la thermodynamique, se produit jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint, auquel cas l'état interne du point considéré n'évolue plus (i.e. $\dot{x}_i = 0$). Dans cette situation d'équilibre, la source de dissipation s'annule, ce qui correspond à la valeur minimale de l'énergie interne spécifique.

Pour déterminer les conditions de stabilité du point de vue de l'énergie interne spécifique, on considère un système dont l'énergie interne à l'équilibre \mathcal{U} est donnée par² :

$$\mathcal{U} = \rho_0 u(s, \mathbf{E}_b) \mathcal{V}_0 \quad (10.61)$$

Aussi, la perturbation susceptible d'éloigner le système considéré de l'équilibre comprend un transfert d'entropie et un transfert de déformation entre deux sous-parties. Le transfert d'entropie est représenté par une variation d'entropie spécifique Δs telle que :

$$s^a = u + \frac{\mathcal{V}_0^b}{\mathcal{V}_0} \Delta s \quad (10.62)$$

$$s^b = u - \frac{\mathcal{V}_0^a}{\mathcal{V}_0} \Delta s \quad (10.63)$$

²Quand bien même l'énergie interne spécifique peut dépendre de la masse volumique et d'éventuelles variables internes, seule la dépendance vis-à-vis de l'entropie spécifique et de l'état de déformation apparaît explicitement.

Le transfert d'entropie n'impacte pas l'entropie globale du système considéré puisque :

$$\mathcal{S} = \varrho_0 s \mathcal{V}_0 \quad (10.64)$$

$$= \varrho_0 s^a \mathcal{V}_0^a + \varrho_0 s^b \mathcal{V}_0^b \quad (10.65)$$

Après perturbation l'énergie interne du système correspond à sa valeur à l'équilibre \mathcal{U} à laquelle on ajoute une variation $\Delta\mathcal{U}$ de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} + \Delta\mathcal{U} &= \varrho_0 u \left(s + \frac{\mathcal{V}_0^b}{\mathcal{V}_0} \Delta s, \mathbf{E}_b + \frac{\mathcal{V}_0^b}{\mathcal{V}_0} \Delta \mathbf{E}_b \right) \mathcal{V}_0^a \\ &+ \varrho_0 u \left(s - \frac{\mathcal{V}_0^a}{\mathcal{V}_0} \Delta s, \mathbf{E}_b - \frac{\mathcal{V}_0^a}{\mathcal{V}_0} \Delta \mathbf{E}_b \right) \mathcal{V}_0^b \end{aligned} \quad (10.66)$$

Pour un système dont la masse, l'entropie et la déformation sont contrôlées, l'équilibre correspond à une valeur d'énergie interne minimale, le système perturbé retourne vers sa position d'équilibre si la variation d'énergie interne est positive :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{U} &= \varrho_0 u \left(s + \frac{\mathcal{V}_0^b}{\mathcal{V}_0} \Delta s, \mathbf{E}_b + \frac{\mathcal{V}_0^b}{\mathcal{V}_0} \Delta \mathbf{E}_b \right) \mathcal{V}_0^a \\ &+ \varrho_0 u \left(s - \frac{\mathcal{V}_0^a}{\mathcal{V}_0} \Delta s, \mathbf{E}_b - \frac{\mathcal{V}_0^a}{\mathcal{V}_0} \Delta \mathbf{E}_b \right) \mathcal{V}_0^b - \varrho_0 u(s, \mathbf{E}_b) \mathcal{V}_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (10.67)$$

L'inégalité précédente indique que le système est stable si l'énergie interne spécifique est une fonction convexe de l'entropie spécifique et de l'état de déformation (voir Figure 10.2). Ce critère de stabilité globale peut aisément se décliner dans un format local. En effet, si on se limite aux perturbations infinitésimales depuis l'équilibre, le critère de convexité se résume à ce que la matrice hessienne formée à partir des dérivées secondes $\partial^2 u / \partial s^2$, $\partial^2 u / \partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b$ et $\partial^2 u / \partial s \partial \mathbf{E}_b$ soit semi-définie positive. On en déduit donc que :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|_{\mathbf{E}_b} ds^2 \geq 0, \quad \forall ds \quad (10.68)$$

$$d\mathbf{E}_b : \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_s : d\mathbf{E}_b \geq 0, \quad \forall d\mathbf{E}_b \quad (10.69)$$

$$d\mathbf{E}_b : \left(\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_s \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|_{\mathbf{E}_b} - \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E}_b \partial s} \otimes \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E}_b \partial s} \right) : d\mathbf{E}_b \geq 0, \quad \forall d\mathbf{E}_b \quad (10.70)$$

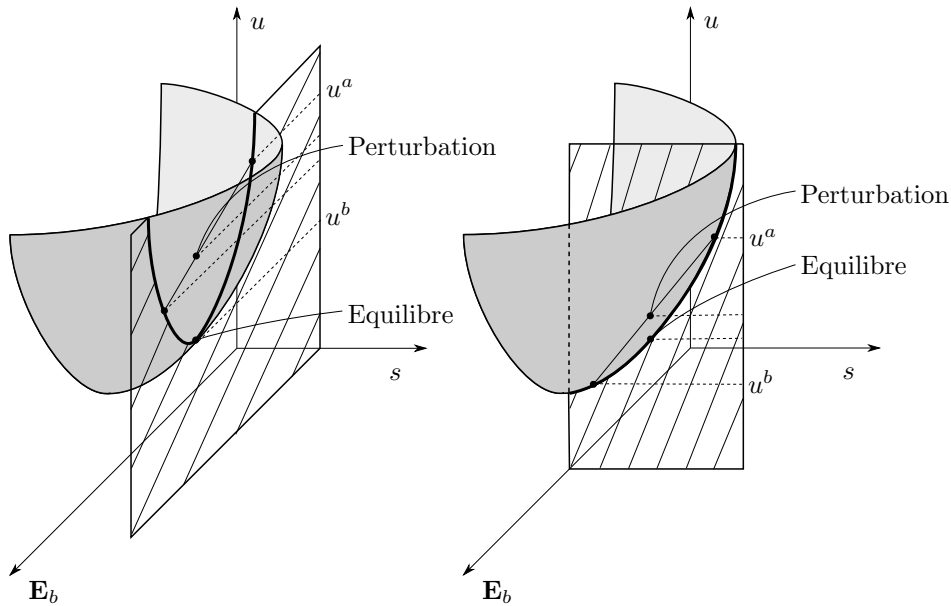


Figure 10.2: Effet d'une perturbation sur l'énergie interne spécifique d'un système pour lequel l'état de déformation moyen et l'entropie totale sont fixés. La stabilité globale exige que l'énergie interne spécifique soit une fonction convexe de l'état de déformation (gauche) et de l'entropie spécifique (droite).

Le critère de stabilité locale (10.68) impose des restrictions quant aux valeurs possibles de la capacité thermique spécifique à déformation constante. En effet, en utilisant la définition (10.20) de la capacité thermique spécifique à déformation constante, on montre que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \Big|_{\mathbf{E}_b} = \frac{\partial T}{\partial s} \Big|_{\mathbf{E}_b} \quad (10.71)$$

$$= \frac{T}{c_v} \quad (10.72)$$

La température absolue étant positive, on en déduit que le critère (10.68) est satisfait si la capacité thermique spécifique à déformation constante est positive.

Aussi, il est possible d'exprimer le tenseur $\partial^2 u / \partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b$, qui intervient dans le critère de stabilité (10.69), en fonction du tenseur de rigidité isentropique

comme suit :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_s = \frac{1}{\varrho_0} \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b}{\partial \mathbf{E}_b} \right|_s \quad (10.73)$$

$$= \frac{\mathbb{C}_s}{\varrho_0} \quad (10.74)$$

La relation précédente indique qu'une condition nécessaire pour que le tenseur $\partial^2 u / \partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b$ soit semi-défini positif est que le tenseur de rigidité isentropique \mathbb{C}_s soit également défini positif.

10.3.3 Énergie libre spécifique

L'énergie libre spécifique a est une fonction d'état dont les variables d'état externes primales sont la température, le gradient de la transformation et la masse volumique. La variation d'énergie libre spécifique pour un point matériel régulier s'exprime donc :

$$\dot{a} = -s\dot{T} + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\mu}{\varrho_0} \dot{\varrho}_0 + \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (10.75)$$

En l'absence de transferts de masse et de chaleur, si on fixe les variables d'état externes dont dépend l'énergie libre spécifique, on retrouve une situation semblable à celle discutée dans la section précédente à savoir que la variation d'énergie libre spécifique par unité de temps est, au signe près, égale à la source de dissipation :

$$\dot{a} = \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \dot{x}_i = -d \leq 0 \quad (10.76)$$

L'énergie interne spécifique d'un point matériel, pour lequel la température, le gradient de la transformation et la masse volumique sont fixés, ne peut que diminuer. La réduction de l'énergie libre spécifique est observée jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint (i.e. $\dot{x}_i = 0$). Pour un point matériel soumis aux conditions susmentionnées, l'état d'équilibre correspond donc à une valeur minimale de l'énergie libre spécifique.

Aussi, l'énergie libre spécifique est obtenue à partir de l'énergie interne spécifique, de l'entropie spécifique et de la température absolue par la rela-

tion³ :

$$a(T, \mathbf{E}_b) = u(s, \mathbf{E}_b) - sT \quad (10.77)$$

La définition précédente correspond à une transformation de Legendre qui permet de conférer à la température le rôle de variable primale au détriment de l'entropie spécifique. Ainsi, la convexité de l'énergie interne vis-à-vis de l'entropie spécifique et de l'état de déformation, condition nécessaire à la stabilité globale d'un système, conduit à ce que l'énergie libre spécifique soit une fonction convexe du tenseur des déformations de Biot et concave de la température. On en déduit donc que la dérivée seconde $\partial^2 a / \partial T^2$ est négative tandis que le tenseur $\partial^2 a / \partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b$ est semi-défini positif :

$$\left. \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \right|_{\mathbf{E}_b} dT^2 \leq 0, \quad \forall dT \quad (10.78)$$

$$d\mathbf{E}_b : \left. \frac{\partial^2 a}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_T : d\mathbf{E}_b \geq 0, \quad \forall d\mathbf{E}_b \quad (10.79)$$

La condition (10.78) n'impose pas de nouvelles restrictions dans la mesure où elle conduit à imposer que la capacité thermique spécifique à déformation constante soit positive :

$$\left. \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \right|_{\mathbf{E}_b} = - \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\mathbf{E}_b} = - \frac{c_v}{T} \leq 0 \quad (10.80)$$

Pour que le tenseur $\partial^2 a / \partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b$ soit semi-défini positif, il est nécessaire que le tenseur de rigidité isotherme \mathbb{C}_T soit lui-même semi-défini positif, ce qui découle de la dérivation en chaîne suivante :

$$\left. \frac{\partial^2 a}{\partial \mathbf{E}_b \partial \mathbf{E}_b} \right|_T = \frac{1}{\varrho_0} \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b}{\partial \mathbf{E}_b} \right|_T \quad (10.81)$$

$$= \frac{\mathbb{C}_T}{\varrho_0} \quad (10.82)$$

Puisque la capacité thermique à déformation constante c_v est positive et que le tenseur de rigidité isotherme \mathbb{C}_T est semi-défini positif, on déduit de la relation (10.25) que la capacité thermique à contrainte constante c_p est positive.

³Dans un souci de concision, seule la dépendance de l'énergie libre spécifique vis-à-vis de la température et de l'état de déformation est explicitement présentée.

10.3.4 Enthalpie spécifique

La liste des variables d'état dont dépend l'enthalpie spécifique h inclut le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{P} , l'entropie spécifique s , la masse volumique ϱ_0 et les éventuelles variables internes. La variation d'enthalpie spécifique par unité de temps d'un point régulier est donc donnée par :

$$\dot{h} = T\dot{s} - \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{P}} + \frac{1}{\varrho_0} \left(\mu + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{F} : \mathbf{P} \right) \dot{\varrho}_0 + \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (10.83)$$

Si l'état de contrainte, l'entropie spécifique et la masse d'un point matériel isolé sont fixés, le taux de variation d'enthalpie spécifique correspond à l'opposé de la source de dissipation :

$$\dot{h} = \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \dot{x}_i = -d \leq 0 \quad (10.84)$$

L'état d'équilibre d'un point matériel soumis aux contraintes discutées précédemment est donc atteint lorsque l'enthalpie spécifique atteint une valeur minimale.

Une définition différente de l'enthalpie spécifique, bien qu'équivalente à celle présentée au 6.7, consiste à utiliser le tenseur des contraintes de Biot symétrique, en lieu et place du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, pour la définition de l'enthalpie spécifique :

$$h(s, \boldsymbol{\Sigma}_b) = u(s, \mathbf{E}_b) - \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma}_b : (\mathbf{1} + \mathbf{E}_b) \quad (10.85)$$

La transformation de Legendre utilisée dans la relation précédente permet d'utiliser le premier tenseur des contraintes de Biot, plutôt que le tenseur des déformations de Biot, comme variable d'état primale. L'enthalpie spécifique est donc, comme l'énergie interne, une fonction convexe de l'entropie spécifique. En revanche, si l'énergie interne spécifique est une fonction convexe de l'état de déformation, il en résulte que l'enthalpie est une fonction concave de l'état de contrainte. Cela signifie que l'enthalpie spécifique vérifie les conditions suivantes :

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} \right|_{\boldsymbol{\Sigma}_b} ds^2 \geq 0, \quad \forall ds \quad (10.86)$$

$$d\boldsymbol{\Sigma}_b : \left. \frac{\partial^2 h}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_b \partial \boldsymbol{\Sigma}_b} \right|_s : d\boldsymbol{\Sigma}_b \leq 0, \quad \forall d\boldsymbol{\Sigma}_b \quad (10.87)$$

Remarque On peut remarquer que la transformation de Legendre, qui permet le passage de l'énergie interne spécifique à l'enthalpie spécifique, dépend des mesures de contrainte et de déformation utilisées. Ainsi, puisqu'une infinité de mesures de contrainte et de déformation sont disponibles, il n'existe pas de définition unique de l'enthalpie spécifique. On peut néanmoins remarquer que l'expression (10.84) qui donne la dérivée temporelle de l'enthalpie spécifique peut s'écrire de manière équivalente :

$$\dot{h} = T\dot{s} - \frac{1}{\varrho_0}(\mathbf{E}_b + \mathbf{1}) : \dot{\Sigma}_b + \frac{1}{\varrho_0} \left(\mu + \frac{1}{\varrho_0}(\mathbf{E}_b + \mathbf{1}) : \Sigma_b \right) \dot{\varrho}_0 + \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

Les définitions du tenseur des déformations de Biot (voir 3.1.1) et du tenseur des contraintes de Biot symétrique (voir 7.4.3) permettent en effet d'établir que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathbf{P} &= (\mathbf{1} + \mathbf{E}_b) : \Sigma_b \\ \mathbf{F} : \dot{\mathbf{P}} &= (\mathbf{1} + \mathbf{E}_b) : \dot{\Sigma}_b \end{aligned}$$

Lorsque d'autres mesures de contrainte et de déformation sont utilisées (e.g. Hencky), Les relations précédentes ne prennent pas une forme aussi simples.

La condition (10.86) constitue un critère de stabilité thermodynamique locale. Elle impose en outre que la capacité thermique spécifique à contrainte constante c_p soit positive puisque :

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} \right|_{\Sigma_b} = \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_{\Sigma_b} = \frac{T}{c_p} \quad (10.88)$$

Aussi, pour que la condition (10.87) soit vérifiée, une condition nécessaire est le caractère semi-défini positif du tenseur de souplesse isentropique \mathbb{S}_s . En effet, on peut décomposer le tenseur $\partial^2 h / \partial \Sigma_b \partial \Sigma_b$ comme suit :

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial \Sigma_b \partial \Sigma_b} \right|_s = -\frac{1}{\varrho_0} \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial \Sigma_b} \right|_s \quad (10.89)$$

$$= -\frac{\mathbb{S}_s}{\varrho_0} \quad (10.90)$$

Il faut remarquer que le tenseur de souplesse isentropique \mathbb{S}_s est semi-défini positif dès que lors que le tenseur de rigidité isentropique \mathbb{C}_s est semi-défini

positif (et réciproquement). Cela signifie que la condition de stabilité locale représentée par (10.87) est équivalente à celle donnée par (10.69).

10.3.5 Enthalpie libre spécifique

L'enthalpie libre spécifique utilise la température absolue T , le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{P} , la masse volumique ϱ_0 et d'éventuelles variables internes comme variables d'état primales. Pour un point matériel régulier, le taux de variation d'enthalpie libre spécifique peut ainsi s'exprimer :

$$\dot{g} = -s\dot{T} - \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{P}} + \frac{1}{\varrho_0} \left(\mu + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{F} : \mathbf{P} \right) \dot{\varrho}_0 + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (10.91)$$

Lorsque les variables d'état primales sont maintenues constantes, le taux de variation de l'enthalpie libre spécifique est égal à l'opposé de la source de dissipation :

$$\dot{g} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \dot{x}_i = -d \leq 0 \quad (10.92)$$

On comprend ainsi que, dans des conditions où l'état de contrainte, la température et la masse sont fixés, l'enthalpie libre spécifique décroît jusqu'à atteindre une valeur minimale qui correspond à l'état d'équilibre. Cet état d'équilibre est par définition stationnaire, il n'est donc accompagné d'aucune évolution de la microstructure (i.e. $\dot{x}_i = 0$).

Si on préfère le tenseur des contraintes de Biot symétrique comme mesure de l'état de contrainte, l'enthalpie libre spécifique se déduit de l'enthalpie spécifique à partir de :

$$g(T, \boldsymbol{\Sigma}_b) = h(s, \boldsymbol{\Sigma}_b) - sT \quad (10.93)$$

La transformation de Legendre précédente permet de montrer que, si l'enthalpie spécifique est une fonction convexe de l'entropie et concave de l'état de contrainte, l'enthalpie libre spécifique est alors une fonction concave de la température et de l'état de contrainte. Du point de vue de l'enthalpie

libre, le critère de stabilité locale impose donc que :

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \right|_{\Sigma_b} dT^2 \leq 0, \quad \forall dT \quad (10.94)$$

$$d\Sigma_b : \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_b \partial \Sigma_b} \right|_T : d\Sigma_b \leq 0, \quad \forall d\Sigma_b \quad (10.95)$$

Les critères de stabilité locale (10.94) et (10.95) n'imposent pas de nouvelles restrictions quant aux valeurs admissibles par les propriétés thermodynamiques courantes. En effet, le critère (10.94) se réduit à la positivité de la capacité thermique spécifique à pression constante :

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \right|_{\Sigma_b} = - \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\Sigma_b} = - \frac{c_p}{T} \quad (10.96)$$

De manière semblable, la condition (10.95) indique que le tenseur de souplesse isotherme \mathbb{S}_T est semi-défini positif car :

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_b \partial \Sigma_b} \right|_T = - \frac{1}{\varrho_0} \left. \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial \Sigma_b} \right|_T \quad (10.97)$$

$$= - \frac{\mathbb{S}_T}{\varrho_0} \quad (10.98)$$

Comme pour son homologue isentropique, le caractère semi-défini positif du tenseur de souplesse isotherme \mathbb{S}_T est automatiquement assuré si son inverse, i.e. le tenseur de rigidité isotherme \mathbb{C}_T , est semi-défini positif.

Chapitre 11

Objectivité

Comme cela a été discuté au Chapitre 2, la description de l'évolution d'un système nécessite de préciser au préalable le référentiel utilisé. Le choix du référentiel de travail est laissé à l'appréciation de l'observateur. Puisque deux observateurs distincts peuvent adopter deux référentiels différents, il convient de s'attarder sur l'effet du choix du référentiel sur les grandeurs physiques introduites jusqu'à présent. Plus spécifiquement, il est nécessaire de se doter d'outils permettant de distinguer les grandeurs qui sont indépendantes du référentiel choisi de celles qui ne le sont pas. En effet, tandis que les premières représentent l'état intrinsèque du système considéré, les secondes voient leurs caractéristiques dépendre du référentiel choisi. Ces grandeurs ne sont donc pas adaptées à la description du comportement d'un point matériel, qui ne dépend *a priori* pas de l'observateur.

Pour juger de la capacité qu'ont les grandeurs physiques à représenter l'état intrinsèque d'un point matériel, on est amené à introduire les notions d'objectivité et d'invariance. L'objectivité et l'invariance sont des propriétés que possèdent les grandeurs capables de représenter cet état intrinsèque. Dans ce chapitre, on commence ainsi par définir les notions d'objectivité et d'invariance. La seconde partie de ce chapitre est dédiée à une discussion sur l'éventuel caractère objectif et/ou invariant des grandeurs introduites jusqu'ici (e.g. déformation, contrainte, énergie).

11.1 Définitions

Dans les chapitres précédents, différentes grandeurs ont été introduites pour définir l'état d'un système. Parmi ces grandeurs, certaines sont représentatives de l'état intrinsèque du système, au sens où elles ne dépendent pas du référentiel adopté. À l'opposé, il existe des grandeurs pour lesquelles des précautions doivent être prises dans la mesure où l'interprétation de ces dernières est largement tributaire du référentiel choisi. Les grandeurs qui reflètent la nature intrinsèque du système sont qualifiées d'objectives et/ou d'invariantes. Le qualificatif d'objectif est réservé aux grandeurs associées à la configuration actuelle tandis que terme invariant s'applique aux grandeurs définies sur la configuration initiale.

Pour définir précisément les notions d'objectivité et d'invariance, il est nécessaire d'observer comment une grandeur évolue lors d'un changement de référentiel (de \mathbf{R} à \mathbf{R}^*). Si on suit la notation introduite au chapitre 2, le changement de référentiel est défini par la translation $\mathbf{c}(t)$, la rotation $\mathbf{Q}(t)$ et la différence de temps a (voir relations (2.1) et (2.2)). On se place ici dans le cas où la configuration initiale est identique pour les deux référentiels utilisés (i.e. $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{1}$).

La Figure 11.1 permet d'illustrer les notions d'objectivité et d'invariance. On peut y remarquer que la distance $d(M, N)$ qui sépare deux points M et N dans la configuration actuelle est objective, son homologue $d_0(M, N)$ de la configuration initiale est invariante. Ces deux grandeurs sont en effet indépendantes du référentiel utilisé. Ainsi, une grandeur scalaire g associée à la configuration actuelle κ_t , est objective si¹ :

$$g^*(\mathbf{x}^*, t^*) = g(\mathbf{x}, t) \quad (11.1)$$

De manière semblable, une grandeur scalaire G , attachée à la configuration initiale κ_0 , est qualifiée d'invariante si :

$$G^*(\mathbf{X}^*, t^*) = G(\mathbf{X}, t) \quad (11.2)$$

Si les définitions d'objectivité et d'invariance coïncident pour des grandeurs scalaires, il n'en est plus de même pour des grandeurs tensorielles. Ainsi, un vecteur \mathbf{g} attaché à la configuration actuelle est objectif si :

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (11.3)$$

¹Dans ce qui suit, le symbole \star est utilisé pour désigner les grandeurs définies dans le référentiel \mathbf{R}^* .

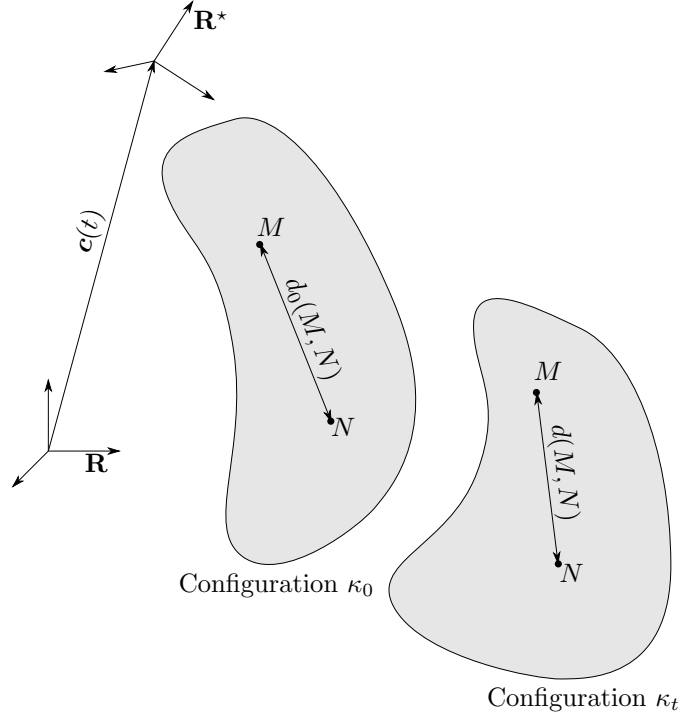


Figure 11.1: Illustration des notions d'objectivité et d'invariance. La distance $d_0(M, N)$ séparant les points M et N est invariante lorsqu'elle est mesurée sur la configuration initiale κ_0 . La distance $d(M, N)$ entre ces deux mêmes points est qualifiée d'objective quand elle est déterminée sur la configuration actuelle κ_t .

Si elle est invariante, une grandeur vectorielle \mathbf{G} associée à la configuration initiale vérifie l'égalité :

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{X}^*, t^*) = \mathbf{G}(\mathbf{X}, t) \quad (11.4)$$

Lorsqu'une grandeur est représentée par un tenseur du second ordre γ , la condition d'objectivité s'écrit :

$$\gamma^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \gamma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{Q}^t(t) \quad (11.5)$$

De manière semblable, pour un tenseur $\mathbf{\Gamma}$ associé à la configuration initiale,

la condition d'invariance est donnée par :

$$\mathbf{\Gamma}^*(\mathbf{X}^*, t^*) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}, t) \quad (11.6)$$

Il est important de remarquer que, lorsque les tenseurs sont objectifs ou invariants, leurs normes sont identiques dans tous les référentiels. Cette remarque donne une signification particulière aux notions d'objectivité et d'invariance. En effet, puisque la norme d'un tenseur mesure l'intensité de la grandeur physique qu'il représente, l'objectivité et l'invariance garantissent que l'intensité de cette grandeur est insensible à un changement de référentiel. En particulier, les grandeurs objectives sont ainsi simplement tournées, sous l'effet de \mathbf{Q} , quand on bascule d'un référentiel à un autre.

11.2 Cas des grandeurs cinématiques

Lorsqu'il s'agit de décrire le comportement d'un point matériel, il est nécessaire de disposer de grandeurs dont la signification n'est pas altérée par un changement de référentiel. Il convient donc de s'attarder sur l'effet d'un changement de référentiel sur les grandeurs cinématiques introduites aux chapitres précédents afin de statuer sur leur éventuel caractère objectif ou invariant.

Position, vitesse et accélération La position actuelle, qui est représentée par le champ vectoriel \mathbf{x} , est une grandeur qui n'est pas objective. La relation (2.1) montre en effet que la position ne vérifie pas la condition d'objectivité, telle que définie par (11.3). Aussi, la dérivation par rapport au temps de (2.1) permet d'exprimer le champ de vitesse dans le référentiel \mathbf{R}^* :

$$\mathbf{v}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{c}} \quad (11.7)$$

Le champ de vitesse n'est donc pas une grandeur objective. Enfin, la dérivation par rapport au temps de la relation précédente souligne également que le champ d'accélération n'est pas objectif :

$$\boldsymbol{\gamma}^* = \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x} + 2\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \ddot{\mathbf{c}} \quad (11.8)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma} + 2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{c}}) - \boldsymbol{\Omega}^2 \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) - \ddot{\mathbf{c}} \quad (11.9)$$

où le tenseur antisymétrique $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^t$ donne la vitesse de rotation du référentiel \mathbf{R}^* par rapport au référentiel \mathbf{R} . Si le référentiel \mathbf{R} est supposé galiléen alors que le référentiel \mathbf{R}^* est non-galiléen, le vecteur accélération $\boldsymbol{\gamma}^*$ incorpore un ensemble de contributions fictives qui résultent du caractère non-objectif de l'accélération. Parmi ces différentes contributions, on peut identifier celles dues à l'accélération d'Euler, i.e. $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c})$, à l'accélération de Coriolis, i.e. $-2 \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{c}})$, et à l'accélération centrifuge, i.e. $\boldsymbol{\Omega}^2 \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c})$.

Remarque La norme du vecteur vitesse $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ constitue un exemple de grandeur scalaire qui n'est pas objective puisque :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^*\| &= \sqrt{(\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{c}}) \cdot (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{c}})} \\ &\neq \sqrt{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v})} = \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

Gradient de la transformation Le gradient de la transformation \mathbf{F} , qui relie les éléments de longueur de la configuration initiale à la configuration actuelle, n'est ni objectif, ni invariant. Lors d'un changement de référentiel, on a en effet :

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \quad (11.10)$$

Pour les tenseurs \mathbf{R} , \mathbf{U} et \mathbf{V} qui sont issus de la décomposition polaire du gradient de la transformation (voir 2.2.4), on constate que :

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \quad (11.11)$$

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U} \quad (11.12)$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}^t \quad (11.13)$$

On déduit des relations précédentes que \mathbf{R} n'est ni objectif, ni invariant tandis que \mathbf{U} est invariant et que \mathbf{V} est objectif. Aussi, le jacobien de la transformation J , qui est obtenu à partir du déterminant du gradient de la transformation est une grandeur à la fois objective et invariante puisque :

$$J^* = J \quad (11.14)$$

Enfin, la dérivation par rapport au temps de (11.10) montre que, lors d'un changement de référentiel, la dérivée temporelle du gradient de la transformation $\dot{\mathbf{F}}$ évolue comme suit :

$$\dot{\mathbf{F}}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad (11.15)$$

Déformation et taux de déformation Comme discuté au Chapitre 3, le gradient de la transformation permet de construire les différentes mesures de déformation. On déduit des différentes définitions des mesures de déformation qu'une mesure lagrangienne (notée \mathbf{E}) ou eulérienne (notée \mathbf{e}) de l'état de déformation satisfait :

$$\mathbf{E}^* = \cdot \mathbf{E} \quad (11.16)$$

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}^t \quad (11.17)$$

Les tenseurs des déformations lagrangiens (e.g. Green-Lagrange, Biot ou Hencky) sont donc invariants tandis que les tenseurs des déformations eulériens (e.g. Euler-Almansi) sont des grandeurs objectives. Lors d'un changement de référentiel, les tenseurs de déformation infinitésimale $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de rotation infinitésimale $\boldsymbol{\omega}$ changent comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{Q}^t - \mathbf{1}) \quad (11.18)$$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{Q}^t - \mathbf{1}) \quad (11.19)$$

Les mesures de déformation infinitésimale et de rotation infinitésimale ne vérifient donc ni la condition d'invariance (11.6), ni la condition d'objectivité (11.5).

La dérivation par rapport au temps des relations (11.16) et (11.17) permet de conclure sur l'éventuel caractère objectif ou invariant des mesures de taux de déformation :

$$\dot{\mathbf{E}}^* = \dot{\mathbf{E}} \quad (11.20)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}^t + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{Q}^t + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^t \quad (11.21)$$

On constate ainsi que le taux de déformation, s'il est représenté par une mesure lagrangienne, est invariant. En revanche, le taux de déformation d'une mesure eulérienne ne vérifie pas les conditions d'objectivité.

Lors d'un changement de référentiel, le gradient spatial du champ de vitesse \mathbf{l} est transformé comme suit :

$$\mathbf{l}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{Q}^t + \boldsymbol{\Omega} \quad (11.22)$$

où $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^t$ représente la vitesse avec laquelle le référentiel \mathbf{R}^* tourne par rapport au référentiel \mathbf{R} . Le gradient du champ de vitesse, qui est défini

sur la configuration actuelle κ_t , n'est donc pas objectif. Pour les parties symétrique et anti-symétrique de \mathbf{l} , qui correspondent respectivement au taux de déformation eulérien \mathbf{d} et au taux de rotation eulérien \mathbf{w} , on a :

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{Q}^t \quad (11.23)$$

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}^t + \boldsymbol{\Omega} \quad (11.24)$$

On observe ainsi que, si le taux de déformation eulérien est une grandeur objective, le taux de rotation ne l'est pas.

11.3 Cas des grandeurs thermodynamiques

Énergie interne, entropie et température Le caractère objectif et/ou invariant de certaines grandeurs physiques découle de leurs définitions. Il est ainsi naturel de postuler que l'énergie interne spécifique u et l'entropie spécifique s sont des grandeurs scalaires qui vérifient simultanément les conditions d'objectivité et d'invariance :

$$u^* = u \quad (11.25)$$

$$s^* = s \quad (11.26)$$

Les conditions précédentes garantissent que l'énergie interne \mathcal{U} et l'entropie \mathcal{S} d'un système ne sont pas tributaires du référentiel choisi. Aussi, conformément à la vision intuitive qu'on en a, on déduit de ces relations que la température T est une grandeur scalaire à la fois objective et invariante car :

$$T^* = \frac{\partial u^*}{\partial s^*} = \frac{\partial u}{\partial s} = T \quad (11.27)$$

Masse volumique et flux de masse Puisque le nombre de particules associées à un point matériel ne dépend pas du référentiel utilisé, la densité de masse, notée ρ_0 ou ρ selon la configuration observée, est une grandeur à la fois objective et invariante :

$$\rho_0^* = \rho_0 \quad (11.28a)$$

$$\rho^* = \rho \quad (11.28b)$$

Aussi, la vitesse à laquelle la masse est transférée vers ou depuis le système considérée doit être indépendante du référentiel adopté. La source spécifique

de masse r_m est donc identique pour tous les référentiels utilisés :

$$r_m^* = r_m \quad (11.29a)$$

De même, la densité surfacique de masse \mathbf{J}_m (respectivement j_m), lorsqu'elle est définie sur la configuration initiale (respectivement actuelle), est une grandeur invariante (respectivement objective) :

$$\mathbf{j}_m^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}_m \quad (11.30a)$$

$$\mathbf{J}_m^* = \mathbf{J}_m \quad (11.30b)$$

Le caractère objectif et/ou invariant des grandeurs précédentes assure que la masse \mathcal{M} du système considéré est indépendante du référentiel utilisé pour formuler l'équation de conservation de la masse.

Flux de chaleur On postule également que la densité surfacique de flux de chaleur, désignée par les champs vectoriels \mathbf{j}_q et \mathbf{J}_q , satisfait aux conditions d'objectivité ou d'invariance :

$$\mathbf{j}_q^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}_q \quad (11.31a)$$

$$\mathbf{J}_q^* = \mathbf{J}_q \quad (11.31b)$$

De manière semblable, on suppose que la source de chaleur volumique, à laquelle on associe la puissance spécifique r_q , est un champ scalaire à la fois objectif et invariant :

$$r_q^* = r_q \quad (11.32)$$

Les conditions précédentes garantissent que, quel que soit le référentiel utilisé, la puissance calorifique \mathcal{P}_c reste identique.

Remarque Une densité surfacique de flux \mathbf{j} (e.g. chaleur, masse ou entropie), lorsqu'elle est objective (i.e. $\mathbf{j}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}$), est telle que sa divergence est indépendante du référentiel choisi puisque :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^* \cdot \nabla_x^* &= \mathbf{j}^* \cdot (\nabla_x \cdot \mathbf{Q}^t) \\ &= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}) \cdot (\nabla_x \cdot \mathbf{Q}^t) \\ &= \mathbf{j} \cdot \nabla_x \end{aligned}$$

De manière similaire, une densité surfacique de flux \mathbf{J} , si elle est invariante (i.e. $\mathbf{J}^* = \mathbf{J}$), a une divergence qui est invariante au sens

où :

$$\mathbf{J}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^* = \mathbf{J} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$$

Ces dernières propriétés sont utiles lorsqu'il s'agit de montrer qu'une équation de conservation est indépendante du référentiel adopté pour la description du système considéré.

Flux d'entropie L'écriture locale du second principe de la thermodynamique fait intervenir une source d'entropie et une densité surfacique de flux d'entropie. Puisqu'on ne peut pas tolérer une situation où le second principe serait vérifié dans un référentiel, mais pas un autre, la source spécifique d'entropie r_s doit vérifier :

$$r_s^* = r_s \quad (11.33)$$

Aussi, lorsqu'elle est associée à la configuration actuelle, la densité surfacique de flux d'entropie \mathbf{j}_s est objective tandis que son homologue \mathbf{J}_s de la configuration initiale est invariant. Cela signifie que :

$$\mathbf{j}_s^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}_s \quad (11.34)$$

$$\mathbf{J}_s^* = \mathbf{J}_s \quad (11.35)$$

Remarque Il convient de préciser que le caractère objectif et/ou invariant des quantités qui représentent le flux d'entropie est une conséquence du caractère objectif et/ou invariant des quantités qui représentent le flux de chaleur, le flux de masse et la température absolue.

Contrainte et taux de contrainte L'éventuel caractère invariant ou objectif des mesures de contraintes introduites au Chapitre 5 peut être mis en évidence sur la base des considérations précédentes. Plus précisément, puisque l'énergie interne spécifique u est une grandeur objective et invariante, sa dérivée par rapport au temps \dot{u} vérifie ces mêmes conditions (i.e. $\dot{u} = \dot{u}^*$). Cette dernière condition permet d'établir que le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est objectif :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^t \quad (11.36)$$

La relation précédente garantit en effet que la variation d'énergie interne spécifique, donnée par la forme locale (8.20) ou (8.28) du premier principe, est indépendante du référentiel choisi. De la même façon, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{P} , parce qu'il est défini sur les configurations à la fois actuelle et initiale, n'est ni objectif, ni invariant :

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (11.37)$$

Cette dernière relation garantit que la forme locale du premier principe, lorsqu'elle est représentée par les équations (8.19) ou (8.27), ne dépend pas du référentiel retenu.

Remarque Pour certaines applications, il est commode de travailler dans un référentiel qui n'est pas galiléen. Il convient alors de se poser la question de l'effet d'un changement d'un référentiel galiléen \mathbf{R} vers un référentiel non-galiléen \mathbf{R}^* sur les conditions d'équilibre que doit satisfaire le champ de contrainte. Pour un point régulier d'un système fermé, la condition locale d'équilibre dans le référentiel non-galiléen s'écrit sous la forme suivante :

$$\varrho \gamma^* - \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^* - \mathbf{b}^* = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L}$$

Si cette expression ressemble à la condition (5.54) établie pour un référentiel galiléen, il est important de préciser que la densité volumique de force \mathbf{b}^* contient des contributions supplémentaires qui résultent du caractère non-galiléen du référentiel utilisé. Pour établir les expressions de ces contributions supplémentaires, il faut d'abord remarquer que le vecteur qui correspond à la divergence du tenseur des contraintes de Cauchy est objectif puisque :

$$\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^* = \mathbf{Q} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})$$

Aussi, en utilisant l'expression (11.9) ainsi que l'équation (5.54), on en déduit que la densité volumique de force \mathbf{b}^* s'exprime :

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} - 2\varrho \boldsymbol{\Theta} \cdot (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{c}}) + \varrho \boldsymbol{\Theta}^2 \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) - \varrho \dot{\boldsymbol{\Theta}} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) + \varrho \ddot{\mathbf{c}}$$

La relation précédente montre que la densité volumique de force \mathbf{b}^* incorpore un ensemble de contributions qui se manifestent dès lors que le référentiel non-galiléen utilisé décrit un mouvement autre que rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen.

Les relations (11.36) et (11.37) traduisent le fait que la puissance de déformation spécifique p , qui mesure la puissance par unité de masse dépensée pour déformer un point matériel, est indépendante du référentiel adopté. En effet, on montre aisément que :

$$p^* = \frac{1}{\varrho^*} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d}^* = \frac{1}{\varrho_0^*} \mathbf{P}^* : \dot{\mathbf{F}}^* \quad (11.38)$$

$$= \frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = p \quad (11.39)$$

La notion de conjugaison au sens de la puissance de déformation, introduite au 7.4.3, permet d'établir les relations qui traduisent l'effet d'un changement de référentiel sur d'autres mesures de l'état de contrainte. En particulier, puisque la puissance de déformation spécifique p est invariante, pour une mesure lagrangienne du taux de déformation $\dot{\mathbf{E}}$, la grandeur de contrainte lagrangienne $\boldsymbol{\Sigma}$ qui lui est conjuguée au sens de la puissance des efforts intérieurs est également invariante :

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \boldsymbol{\Sigma} \quad (11.40)$$

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S} et le tenseur des contraintes de Hencky $\boldsymbol{\Sigma}_t$, qui sont des mesures lagrangiennes de l'état de contrainte, constituent un cas particulier de la relation précédente. Ces deux grandeurs, qui sont conjuguées respectivement au taux de déformation de Green-Lagrange et au taux de déformation de Hencky, sont donc invariantes. De manière générale, il est intéressant de remarquer que, pour les différentes mesures de contrainte, l'effet d'un changement de référentiel produit des effets semblables à ceux observés pour les mesures du taux de déformation qui leur sont conjuguées au sens de la puissance de déformation.

La dérivation par rapport au temps de la relation (11.36) montre que le taux de contrainte $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, défini au sens de Cauchy, n'est pas objectif :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^t + \mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}^t + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^t \quad (11.41)$$

De même, la dérivée par rapport au temps du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $\dot{\mathbf{P}}$ ne satisfait à aucune des conditions d'invariance ou d'objectivité car :

$$\dot{\mathbf{P}}^* = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{P}} \quad (11.42)$$

En revanche, lors d'un changement de référentiel, la dérivation de (11.40) indique que le taux de contrainte $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$, dès lors qu'il est conjugué à une mesure

lagrangienne du taux de déformation, se comporte comme une grandeur invariante :

$$\dot{\Sigma}^* = \dot{\Sigma} \quad (11.43)$$

11.4 Dérivation objective

La construction d'une loi de comportement nécessite parfois de pouvoir définir le taux de contrainte en fonction d'un ensemble de variables appropriées (e.g. taux de déformation). Dans le cadre d'une description eulérienne, une telle construction est délicate car, comme le montre la relation (11.41), le taux de contrainte de Cauchy n'est pas objectif. Il n'est donc pas possible de travailler directement avec le taux de contrainte de Cauchy pour l'écriture d'une loi de comportement. Son caractère non-objectif traduit le fait que la rotation d'un référentiel suffit à faire changer la contrainte de Cauchy. On comprend alors que, pour l'écriture d'une loi de comportement incrémentale dans le formalisme eulérien, il faille définir une mesure du taux de contrainte associée à la configuration actuelle qui soit insensible à une telle rotation.

On est ainsi amené à utiliser des mesures alternatives du taux de contrainte. Ces grandeurs, parce qu'elles utilisent une autre définition de la dérivation par rapport au temps, sont appelées des dérivées objectives. On expose dans ce qui suit les dérivées objectives les plus couramment utilisées pour la définition du taux de contrainte de Cauchy.

La dérivée objective de Truesdell de la contrainte de Cauchy $\overset{\circ}{\sigma}$ fait intervenir le gradient eulérien du champ de vitesse \mathbf{l} , elle est définie comme suit:

$$\overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} - \mathbf{l} \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{l}^t + \text{tr}(\mathbf{l})\sigma \quad (11.44)$$

La dérivée objective de Jaumann $\overset{\nabla}{\sigma}$ est obtenue à partir de la dérivée de Truesdell en ne considérant que la partie antisymétrique \mathbf{w} du gradient eulérien du champ de vitesse:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \sigma \quad (11.45)$$

La dérivée objective de Green-Naghdi de la contrainte de Cauchy $\overset{\diamond}{\sigma}$ est déterminée à partir du tenseur $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t$ qui représente la vitesse de

rotation propre d'un point matériel:

$$\overset{\diamond}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \cdot \Omega - \Omega \cdot \sigma \quad (11.46)$$

Il est important de remarquer que les dérivées précédentes sont toutes des mesures objectives du taux de contrainte. Elles permettent donc, dans le cadre d'une représentation eulérienne, de construire des lois de comportement sous une forme incrémentale. Si ces dérivées permettent de s'affranchir des problèmes liés à l'objectivité, le choix de la dérivée objective la plus appropriée est une question à laquelle il est délicat de fournir une réponse universelle.

Partie II

Description du comportement

Chapitre 12

Lois de comportement

Dans de nombreuses situations pratiques, il est nécessaire de pouvoir déterminer l'évolution de différentes grandeurs (e.g. champs de contrainte, de déformation ou de température) représentatives de l'état d'un système. Pour évaluer ces grandeurs, les équations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) ne sont toutefois pas suffisantes. Elles doivent en effet être complétées par des relations qui définissent le comportement des points matériels qui composent le système étudié. Cet ensemble de relations est désigné dans ce qui suit par le terme de loi de comportement.

Ce chapitre, qui discute des caractéristiques générales des lois de comportement, est scindé en quatre parties. Dans la première partie, la nécessité de recourir à des lois de comportement lorsqu'il s'agit de modéliser l'évolution d'un système est expliquée. La seconde partie se concentre sur les restrictions auxquelles doivent se plier les lois de comportement. La troisième partie est dédiée à la problématique du respect des symétries matérielles. La démarche générale de construction d'une loi de comportement, dans le contexte de la thermomécanique, est exposée dans la dernière partie.

12.1 Nécessité des lois de comportement

Pour représenter l'état d'un système, différentes grandeurs ont été introduites dans les chapitres précédents. La description de l'évolution d'un système nécessite ainsi de déterminer ces différentes grandeurs à chaque in-

Grandeur	Symbole(s)	Inconnues
Masse volumique	ϱ ou ϱ_0	1
Position actuelle	\mathbf{x}	3
Tenseur des contraintes	$\boldsymbol{\sigma}$ ou \mathbf{P}	9
Energie interne spécifique	u	1
Entropie spécifique	s	1
Température	T	1
Densité de flux de chaleur	\mathbf{j}_q ou \mathbf{J}_q	3
Température	T	1
Variables internes	x_i ($i = 1, \dots, n$)	n
Sous-total (système fermé)		$19 + n$
Densité de flux de masse	\mathbf{j}_m ou \mathbf{J}_m	3
Total (système ouvert)		$22 + n$

Tableau 12.1: Liste des grandeurs à déterminer pour représenter l'évolution d'un système.

stant et pour chaque point matériel. Pour cerner les difficultés liées à la modélisation d'un système, il convient donc de dresser d'une part la liste de ces grandeurs, qui constituent les inconnues du problème, et d'autre part, celle des équations que doivent satisfaire ces grandeurs.

Les grandeurs utilisées pour représenter à chaque instant un système sont listées dans le Tableau 12.1. En considérant la nature scalaire ou tensorielle des quantités précédentes, on constate que la définition complète de l'état d'un système fermé requiert de déterminer 19 inconnues, auquel il faut ajouter un nombre fini n de variables internes. Il est important de remarquer que cette liste ne fait intervenir aucune mesure de l'état de déformation. Ce dernier peut en effet être évalué à partir du champ vectoriel \mathbf{x} qui donne la position actuelle des différents points matériels (voir Chapitre 3). Aussi, le choix de la mesure utilisée pour la définition du champ de contrainte importe peu. Il suffit de connaître une mesure de contrainte pour déterminer les autres à partir du gradient de la transformation. Il en va de même pour la densité surfacique de flux de chaleur. Dans le cas des systèmes ouverts, la liste des grandeurs permettant de décrire l'état d'un système est semblable à celle établie pour un système fermé, à ceci près qu'il faut y ajouter la densité surfacique de flux de masse. L'ensemble forme un total de $22 + n$ inconnues.

La liste des équations de conservation disponibles pour identifier les grandeurs précédentes est exposée dans le Tableau 12.2. Le choix de la

Grandeur conservée	Equations
Masse $\dot{\rho} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = 0$ ou $\dot{\rho}_0 = 0$	1
Quantité de mouvement linéaire $\rho \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$ ou $\rho_0 \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}$	3
Quantité de mouvement angulaire $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t$ ou $\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^t$	3
Energie $\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \mathbf{j}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \rho r_q$ ou $\rho_0 \dot{u} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{J}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \rho_0 r_q$	1
Total (système fermé)	8
Masse $\dot{\rho} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} = \rho r_m - \mathbf{j}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ ou $\dot{\rho}_0 = \rho_0 r_m - \mathbf{J}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$	1
Quantité de mouvement linéaire $\rho \boldsymbol{\gamma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}$ ou $\rho_0 \boldsymbol{\gamma} = \tilde{\mathbf{P}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}$	3
Quantité de mouvement angulaire $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t$ ou $\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^t$	3
Energie $\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \tilde{\mathbf{j}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \rho \tilde{r}_q$ ou $\rho_0 \dot{u} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{J}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \rho_0 \tilde{r}_q$	1
Total (système ouvert)	8

Tableau 12.2: Liste des équations de conservation gouvernant l'évolution d'un système.

forme, spatiale ou matérielle, n'est pas cruciale puisque ces deux formes sont équivalentes, i.e. la vérification de l'une des formes entraîne la vérification de l'autre. On constate que seules 8 équations sont disponibles pour identifier les champs qui représentent l'état d'un système. Il est ainsi nécessaire d'établir $11 + n$ (respectivement $14 + n$) équations supplémentaires pour un système fermé (respectivement ouvert).

Afin de comprendre la démarche qui aboutit à la notion de loi de comportement, il est important de remarquer que les équations de conservation ne font intervenir aucune caractéristique représentative des matériaux qui forment le système étudié. L'expérience montre toutefois que deux systèmes soumis à des conditions initiales et des conditions aux limites identiques mais formés de matériaux différents n'évoluent pas de manière semblable. Il apparaît alors nécessaire, au travers des équations supplémentaires, de donner des indications quant au comportement des matériaux utilisés. Ces équations supplémentaires, parce qu'elles intègrent les spécificités de chaque matériau, forment une loi de comportement.

Les équations de comportement sont listées, de manière formelle, dans le Tableau 12.3. Ces relations, qui précisent la réponse d'un point matériel, peuvent être classées en deux catégories : les relations d'état et les relations d'évolution. Tandis que les relations d'état fournissent une information quant à l'état d'un système à un instant donné (e.g. état de contrainte), les relations d'évolution décrivent l'état vers lequel le point matériel va évoluer à l'instant suivant (e.g. densité de flux de chaleur). Ces dernières expriment en effet l'évolution d'une quantité par une unité de temps. Elles intègrent donc une notion de vitesse d'évolution.

12.2 Restrictions

Les relations nécessaires à la construction d'une loi de comportement ont été présentées, sous une forme générique, au paragraphe précédent. Avant d'essayer de les préciser, il convient de s'attarder sur les restrictions auxquelles doivent se plier ces relations. Ces restrictions, constituées de différents principes, sont importantes en cela qu'elles fournissent un cadre précisant la structure générale des lois de comportement.

Relations de comportement	Équations
Contrainte $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\dots)$ ou $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\dots)$	6
Densité de flux de chaleur $\mathbf{j}_q = \hat{\mathbf{j}}_q(\dots)$ ou $\mathbf{J}_q = \hat{\mathbf{J}}_q(\dots)$	3
Energie interne $u = \hat{u}(\dots)$	1
Entropie spécifique $s = \hat{s}(\dots)$	1
Variables internes $\dot{x}_i = \hat{x}_i(\dots)$ ($i = 1, \dots, n$)	n
Sous-total (système fermé)	$11 + n$
Densité de flux de masse $\mathbf{j}_m = \hat{\mathbf{j}}_m(\dots)$ ou $\mathbf{J}_m = \hat{\mathbf{J}}_m(\dots)$	3
Total (système ouvert)	$14 + n$

Tableau 12.3: Liste des équations de comportement permettant de modéliser l'évolution d'un système.

Principe de causalité Le premier principe sur lequel s'appuyer pour l'écriture d'une loi de comportement est la causalité. Le principe de causalité stipule que l'état d'un point matériel ne dépend que de l'histoire passée du système auquel il appartient. Lorsqu'elle s'appuie sur les équations présentées dans le Tableau 12.3, l'histoire du système est contenue dans les variables internes. Le choix des variables internes est une étape importante de la construction des relations de comportement dans la mesure où leur nombre et leur nature (scalaire ou tensorielle) contrôlent le caractère fin ou grossier de la description. Une alternative aux variables internes, utilisée notamment dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, consiste à considérer les effets d'histoire par une approche héréditaire. Dans ce cadre, une relation de comportement indique que l'état d'un point matériel à un instant t dépend de l'histoire passée des variables d'état externes, i.e. de leurs valeurs à tous les instants τ qui ont précédé l'instant t .

Exemple À titre illustratif, la relation de comportement qui fournit une mesure de lagrangienne de l'état de contrainte dans le cadre d'une approche héréditaire prend la forme fonctionnelle suivante :

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \mathcal{L}_{\tau \leq t}(\mathbf{E}(\mathbf{X}, \tau), T(\mathbf{X}, \tau), \varrho_0(\mathbf{X}, \tau)) \quad (12.1)$$

Cette relation traduit bien le principe de causalité au sens où seules les états passés influencent l'état actuel. Ces états passés sont représentés par l'histoire de déformation, de température et de masse volumique.

Principe de l'action locale L'adoption du principe de causalité conduit *a priori* à inclure un aspect non-local très fort dans les relations de comportement. Il indique en effet que l'état d'un point matériel à l'instant présent dépend possiblement des états passés de tous les autres points matériels du système. Il est possible de restreindre plus fortement la forme des lois de comportement en ne considérant que l'effet du voisinage local sur le comportement d'un point matériel. Cette hypothèse, connue sous le nom de principe de l'action locale, amène alors à définir le comportement à partir de l'histoire des variables externes (e.g. mesure de déformation, température) qui sont attachées au point matériel considéré.

Remarque Contrairement à ce qu'il peut laisser entendre, le principe de l'action locale n'exclut pas les lois de comportement non-locales. Ces dernières sont qualifiées de fortement non-locales quand l'état d'un

point matériel dépend des moyennes spatiales des variables d'état. Pour chaque point matériel, ces moyennes sont calculées en intégrant les contributions de l'ensemble des points matériels situés dans leur voisinage. Par opposition, les approches sont dites faiblement non-locales lorsque les gradients des variables d'état sont inclus dans la liste des variables d'état.

Principe d'indifférence matérielle Le principe d'indifférence matérielle impose que l'évolution d'un système ne puisse pas dépendre du référentiel choisi. Une telle dépendance, parce qu'elle permettrait à deux observateurs d'un même système de constater des évolutions différentes, est en effet exclue. Le respect du principe d'indifférence matérielle garantit donc qu'il est toujours possible de réconcilier des observations conduites dans des référentiels différents.

Dans le cadre de l'écriture des lois de comportement, il est commode de faire intervenir des quantités invariantes pour respecter le principe d'indifférence matérielle. À titre d'exemple, on peut considérer une relation de comportement qui donne une mesure lagrangienne (notée Σ) de l'état de contrainte en fonction d'une mesure lagrangienne de l'état de déformation (notée \mathbf{E}) et éventuellement d'autres variables invariantes. Cette relation est de la forme :

$$\Sigma = \hat{\Sigma}(\mathbf{E}, \dots) \quad (12.2)$$

Suivant les notations utilisées au Chapitre 11, l'effet d'un changement de référentiel sur la relation précédente se résume à :

$$\Sigma^* = \hat{\Sigma}(\mathbf{E}^*, \dots) \quad (12.3)$$

$$= \Sigma \quad (12.4)$$

On constate donc que la relation de comportement (12.2) est automatiquement compatible avec le caractère invariant attendu d'une mesure de contrainte lagrangienne, sans que cela ne nécessite de restriction particulière. Ainsi, les mesures lagrangiennes de l'état de déformation (e.g. Green-Lagrange, Hencky, Biot), parce qu'elles sont invariantes, sont souvent privilégiées pour l'écriture des lois de comportement.

Quand bien même cela n'est pas prohibé, il est en revanche plus délicat d'essayer de représenter le comportement par des variables qui ne soient pas

invariantes. En particulier, l'utilisation de grandeurs qui soient objectives (e.g. tenseur eulérien des taux de déformations) pour définir le comportement d'un point matériel restreint les possibilités de modélisation du comportement. Par exemple, il est possible de décrire les comportements de type visqueux à partir d'une relation qui traduit la dépendance du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ vis-à-vis du taux de déformation eulérien \mathbf{d} . La forme générale d'une telle relation est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{d}, \dots) \quad (12.5)$$

En s'appuyant sur l'égalité (11.36), on constate que le respect du principe d'indifférence matérielle impose que la relation de comportement donnant l'état de contrainte vérifie :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{d}^*, \dots) \quad (12.6)$$

$$= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{Q}^t, \dots) \quad (12.7)$$

$$= \mathbf{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{d}, \dots) \cdot \mathbf{Q}^t \quad (12.8)$$

où \mathbf{Q} est un tenseur orthogonal. Le caractère objectif d'une mesure de l'état de contrainte tel que le tenseur des contraintes de Cauchy n'est ainsi assuré que lorsque $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ est une fonction isotrope (voir Annexe C) de la mesure eulérienne utilisée pour représenter le taux de déformation. Une telle approche ne permet donc pas de considérer l'éventuelle anisotropie du comportement.

Principe d'équiprésence Le principe d'équiprésence, formulé par [Truesdell and Toupin \(1960\)](#), impose qu'une variable indépendante présente dans une relation de comportement apparaisse également dans les autres relations de comportement, sauf si cela entre en contradiction avec les principes fondamentaux énoncés plus tôt.

Respect des symétries matérielles En raison de leur microstructure particulière, les matériaux peuvent posséder certaines caractéristiques de symétrie. Ces caractéristiques font que la réponse d'un point matériel à un trajet de chargement reste inchangée si celui-ci est précédé d'une transformation qui correspond à une des opérations caractéristiques de son groupe ponctuel de symétrie. Les relations de comportement doivent donc être cohérentes avec les éventuelles symétries matérielles, e.g. l'application d'une rotation préalable à un matériau isotrope n'affecte pas sa réponse à une

sollicitation. Comme discuté ci-après (voir 12.3), le respect des symétries matérielles impose des restrictions quant aux propriétés qui interviennent dans la construction des relations de comportement, en particulier lorsque celles-ci ont une forme tensorielle.

12.3 Symétries matérielles

12.3.1 Groupes ponctuels de symétrie

Peu importe la forme retenue, les lois de comportement mettent en relation des grandeurs qui définissent la réponse d'un point matériel (e.g. état de contrainte, densité de flux de chaleur) avec celles qui représentent le trajet de sollicitation (e.g. déformation, température). Outre ces grandeurs, les relations de comportement font également intervenir un certain nombre de propriétés (e.g. rigidité, viscosité) qui sont propres à chaque matériau. Ces propriétés, lorsqu'elles sont susceptibles de varier en fonction de la direction considérée, sont représentées par des grandeurs tensorielles. Ainsi, parce qu'un point matériel présente éventuellement certains éléments de symétrie, il convient de s'intéresser aux restrictions auxquelles doivent satisfaire les tenseurs définissant les propriétés d'un matériau.

Afin d'illustrer les difficultés liées au respect des symétries matérielles, on peut s'intéresser à l'effet d'une transformation orthogonale \mathbf{G} (e.g. rotation pure) suivie d'une transformation \mathbf{F} sur la réponse d'un point matériel. Comme l'illustre la Figure 12.1, on constate que la séquence qui engendre une transformation $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ conduit sous certaines conditions à une réponse identique à celle de la seule transformation \mathbf{F} . Suite aux transformations $\hat{\mathbf{F}}$ et \mathbf{F} , l'état du point matériel est en effet identique au sens où :

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{G}^t \text{ et } \boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (12.9)$$

$$u = \hat{u} \quad (12.10)$$

$$s = \hat{s} \quad (12.11)$$

$$\varrho_0 = \hat{\varrho}_0 \text{ et } \varrho = \hat{\varrho} \quad (12.12)$$

L'exemple précédent permet de souligner que, en raison des éventuelles symétries matérielles, certaines transformations orthogonales laissent inchangée la réponse d'un point matériel.

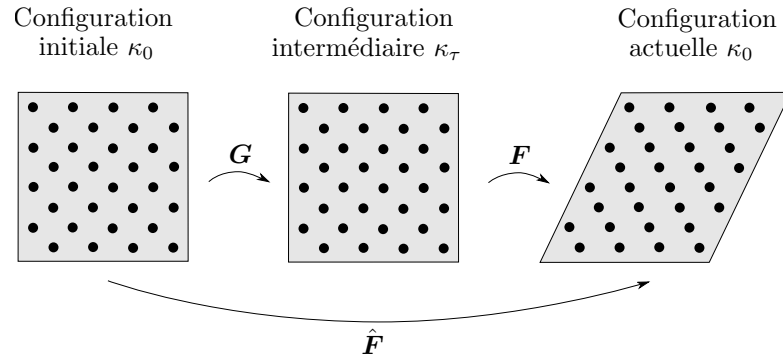


Figure 12.1: Représentation schématique d'une séquence de transformations appliquées à un point matériel. La première transformation \mathbf{G} est une transformation orthogonale qui, à cause des symétries matérielles du point matériel considéré, laisse la réponse inchangée.

L'ensemble des transformations orthogonales, représentées par les tenseurs tels que \mathbf{G} , qui laissent inchangée la réponse d'un point matériel forment le groupe ponctuel de symétrie, noté \mathcal{G} , du matériau considéré. Quel que soit le matériau considéré, le groupe ponctuel de symétrie contient *a minima* le sous-groupe $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$. Aussi, la notion de groupe ponctuel de symétrie conduit à considérer deux types de matériau. D'abord, les matériaux pour lesquels les propriétés sont indépendantes de la direction de mesure sont qualifiés d'isotrope. Pour de tels matériaux, il est possible de trouver au moins une configuration pour laquelle le groupe ponctuel de symétrie \mathcal{G} est le groupe \mathcal{G}_{orth} constitué de l'ensemble des tenseurs \mathbf{G} orthogonaux. Les autres matériaux, qui voient possiblement leurs propriétés évoluer avec la direction de mesure, sont qualifiés d'anisotrope. Leur groupe ponctuel de symétrie \mathcal{G} est alors un sous-groupe propre de \mathcal{G}_{orth} (i.e. $\mathcal{G} < \mathcal{G}_{orth}$).

Les matériaux peuvent, selon leur groupe ponctuel de symétrie, être classés en treize catégories. Parmi ces treize catégories, on trouve les onze classes de Laue des solides cristallins. La douzième catégorie est celle des matériaux présentant une isotropie transverse, qui possèdent un axe de symétrie (e.g. matériaux composites dont les renforts sont des fibres alignées). En ajoutant la catégorie des matériaux isotropes, on obtient les treize catégories de symétrie matérielle. Les transformations orthogonales qui forment les éléments du groupe ponctuel de symétrie de chacune de ces catégories sont

listées dans le Tableau 12.4. Pour les cristaux, les catégories sont nommées suivant la classe de Laue (définie selon la notation Hermann-Mauguin).

12.3.2 Restrictions sur les propriétés

La connaissance du groupe ponctuel de symétrie d'un matériau solide permet de préciser les restrictions auxquelles les propriétés qui le caractérisent doivent se plier. Ces restrictions traduisent le fait que, à cause des symétries matérielles, certaines propriétés doivent avoir des valeurs identiques même si elles sont prises selon des directions différentes.

Pour une propriété scalaire (e.g. masse volumique, capacité thermique), les symétries matérielles sont automatiquement respectées dans la mesure où la propriété est indépendante de la direction de mesure.

Lorsque les propriétés sont représentées par des grandeurs tensorielles, il est nécessaire d'identifier les contraintes imposées par le respect des symétries matérielles. Pour une propriété représentée par un tenseur symétrique du second ordre $\boldsymbol{\kappa}$ (e.g. tenseur de dilatation thermique, tenseur de conductivité thermique), les symétries matérielles imposent que :

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{G}^t, \forall \mathbf{G} \in \mathcal{G} \quad (12.13)$$

Pour chaque type de symétrie matérielle, il est possible d'utiliser l'égalité précédente pour préciser le nombre de constantes indépendantes requises pour la définition de la propriété $\boldsymbol{\kappa}$. En effet, si six constantes indépendantes sont généralement nécessaires à la définition du tenseur $\boldsymbol{\kappa}$, le respect des symétries matérielles, parce qu'il impose des contraintes sur la forme de $\boldsymbol{\kappa}$, conduit éventuellement à réduire ce nombre. La Figure 12.2 précise ainsi, pour les différentes catégories de symétrie matérielle, la forme des tenseurs du second ordre symétriques utilisés pour représenter certaines propriétés ainsi que le nombre de constantes indépendantes. Il est important de noter que, en général, les relations qui lient les différentes composantes ne sont observables que dans certaines bases particulières. Pour un matériau isotrope, on peut constater que le tenseur $\boldsymbol{\kappa}$ est défini à partir d'une seule constante κ :

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{1} \quad (12.14)$$

Cette dernière relation assure que, pour un matériau isotrope, la propriété représentée par $\boldsymbol{\kappa}$ est indépendante de la direction de mesure.

Catégorie	Ordre	Eléments
Isotrope	∞	tous les tenseurs orthogonaux
Isotrope transverse	∞	$\pm \mathbf{R}_k^\phi$ avec $0 \leq \phi < 2\pi$
Triclinique $\bar{1}$	2	$\pm \mathbf{1}$
Monoclinique $2/m$	4	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_k^\pi$
Orthorhombique mmm	8	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_i^\pi, \pm \mathbf{R}_j^\pi, \pm \mathbf{R}_k^\pi$
Rhomboédrique $\bar{3}m$	12	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_i^\pi, \pm \mathbf{R}_{i \pm \sqrt{3}j}^\pi, \pm \mathbf{R}_k^{2\pi/3}, \pm \mathbf{R}_k^{4\pi/3}$
Rhomboédrique $\bar{3}$	12	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_k^{2\pi/3}, \pm \mathbf{R}_k^{4\pi/3}$
Quadratique $4/mmm$	16	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_i^\pi, \pm \mathbf{R}_j^\pi, \pm \mathbf{R}_k^\pi, \pm \mathbf{R}_{i \pm j}^\pi, \pm \mathbf{R}_k^{\pi/2}, \pm \mathbf{R}_k^{3\pi/2}$
Quadratique $4/m$	8	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_k^\pi, \pm \mathbf{R}_k^{\pi/2}, \pm \mathbf{R}_k^{3\pi/2}$
Hexagonal $6/mmm$	24	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_i^\pi, \pm \mathbf{R}_j^\pi, \pm \mathbf{R}_k^\pi, \pm \mathbf{R}_k^{\pi/3}, \pm \mathbf{R}_k^{2\pi/3}, \pm \mathbf{R}_k^{4\pi/3}, \pm \mathbf{R}_k^{5\pi/3}, \pm \mathbf{R}_{i \pm \sqrt{3}j}^\pi, \pm \mathbf{R}_{\sqrt{3}i \pm j}^\pi$
Hexagonal $6/m$	12	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_k^\pi, \pm \mathbf{R}_k^{\pi/3}, \pm \mathbf{R}_k^{2\pi/3}, \pm \mathbf{R}_k^{4\pi/3}, \pm \mathbf{R}_k^{5\pi/3}$
Cubique $m\bar{3}$	24	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_i^\pi, \pm \mathbf{R}_j^\pi, \pm \mathbf{R}_k^\pi, \pm \mathbf{R}_{i \pm j \pm k}^{2\pi/3}, \pm \mathbf{R}_{i \pm j \pm k}^{4\pi/3}$
Cubique $m\bar{3}m$	48	$\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{R}_i^{\pi/2}, \pm \mathbf{R}_i^\pi, \pm \mathbf{R}_i^{3\pi/2}, \pm \mathbf{R}_j^{\pi/2}, \pm \mathbf{R}_j^\pi, \pm \mathbf{R}_j^{3\pi/2}, \pm \mathbf{R}_k^{\pi/2}, \pm \mathbf{R}_k^\pi, \pm \mathbf{R}_k^{3\pi/2}, \pm \mathbf{R}_{i \pm j \pm k}^{2\pi/3}, \pm \mathbf{R}_{i \pm j \pm k}^{4\pi/3}, \pm \mathbf{R}_{i \pm j}^\pi, \pm \mathbf{R}_{j \pm k}^\pi, \pm \mathbf{R}_{k \pm i}^\pi$

Tableau 12.4: Liste des transformations orthogonales qui composent le groupe ponctuel de symétrie d'un matériau solide selon la catégorie à laquelle il appartient. La notation \mathbf{R}_n^ϕ est utilisée pour désigner la transformation orthogonale qui correspond à une rotation d'un angle ϕ autour d'une direction n . Les vecteurs i, j et k forment une base orthonormée.

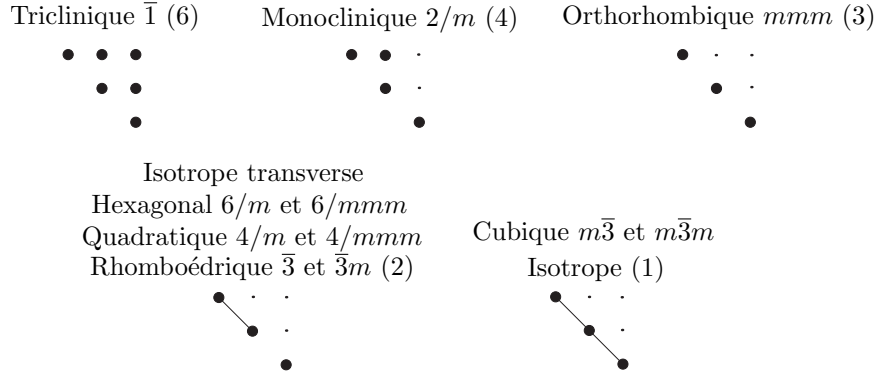


Figure 12.2: Nombre de constantes nécessaires à la définition d'une propriété représentée par un tenseur du second ordre symétrique en fonction de la classe de symétrie matérielle considérée. Le cas anisotrope général est le cas triclinique, le cas orthorhombique est parfois appelé orthotrope, le cas hexagonal est également nommé isotrope transverse. Les points représentent les valeurs nulles, les cercles pleins représentent les valeurs non-nulles, les connexions entre deux cercles pleins correspondent à des égalités.

Lorsqu'une propriété est définie par un tenseur d'ordre quatre symétrique, noté \mathbb{K} , le respect des symétries matérielles nécessite que¹ :

$$\mathbb{K} = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}) : \mathbb{K} : (\mathbf{G}^t \otimes \mathbf{G}^t), \forall \mathbf{G} \in \mathcal{G} \quad (12.15)$$

Comme précédemment, la considération des éventuelles symétries matérielles permet de préciser la forme de \mathbb{K} ainsi que le nombre de constantes qui sont nécessaires à sa construction. Ces différents aspects sont indiqués pour chaque type de symétrie matérielle sur la Figure 12.3, qui utilise la notation de Voigt (voir Annexe D). Dans le cas particulier d'un matériau isotrope, deux constantes indépendantes (notées κ et η) suffisent pour définir le tenseur \mathbb{K} :

$$\mathbb{K} = 3\kappa\mathbb{P}_{\text{sph}} + 2\eta\mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (12.16)$$

Pour un matériau isotrope, la constante κ caractérise la partie sphérique du tenseur \mathbb{K} tandis que la constante η correspond à sa partie déviatorique.

¹On utilise ici la notation $(\mathbf{G} \otimes \mathbf{G})_{ijkl} = \mathbf{G}_{ik}\mathbf{G}_{jl}$

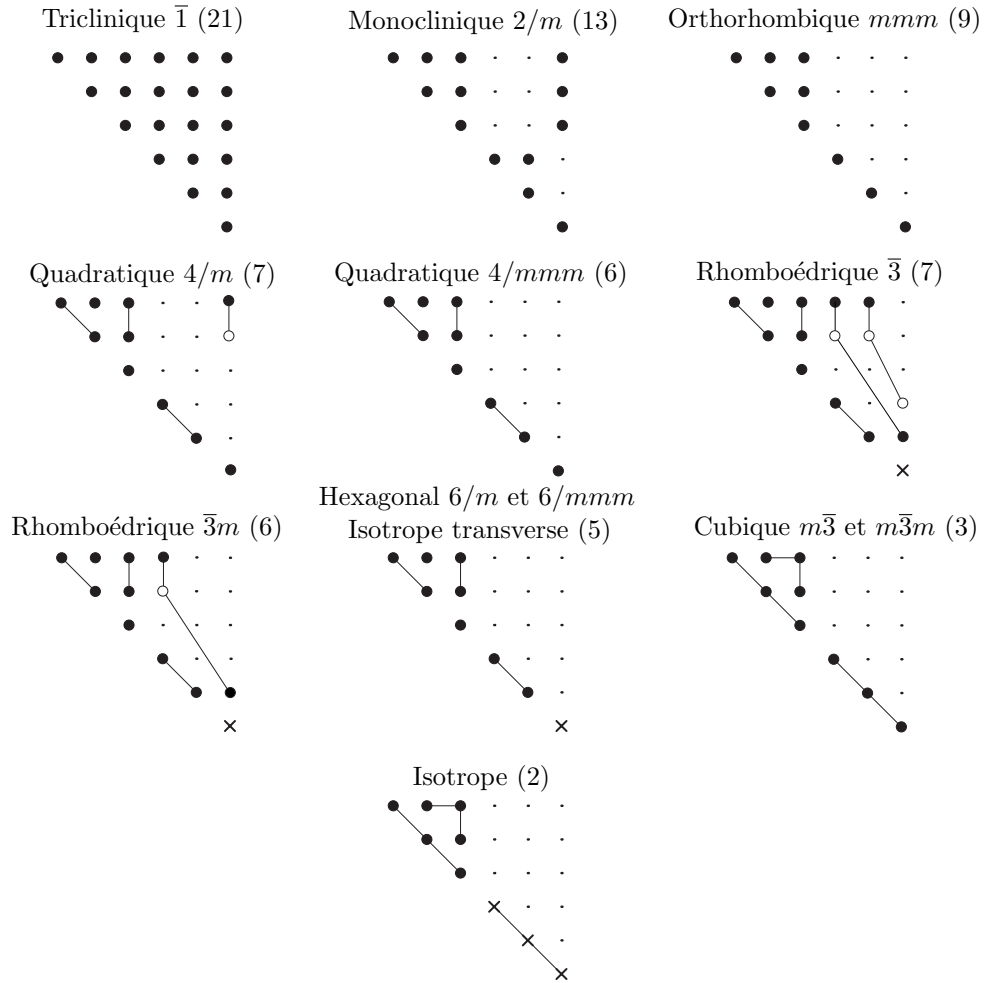


Figure 12.3: Nombre de constantes nécessaires à la définition d'un tenseur de rang quatre symétrique en fonction de la classe de symétrie considérée. Le cas anisotrope général est le cas triclinique, le cas orthorhombique est parfois appelé orthotrope. Les points représentent les valeurs nulles, les cercles pleins représentent les valeurs non-nulles, les connexions entre deux cercles pleins correspondent à des égalités, les connexions entre un cercle plein et un cercle vide correspondent à des valeurs opposées, les croix indiquent que la constante considérée est égale à $1/2 \times (\mathbb{K}_{1111} - \mathbb{K}_{1122})$.

12.4 Construction des lois de comportement

12.4.1 Choix des variables d'état

La construction d'une loi de comportement nécessite d'abord de préciser les variables d'état primales utilisées pour représenter l'état d'un point matériel. Dans le contexte de la thermomécanique, la liste des variables d'état primales inclut généralement une mesure de l'état de déformation, la température absolue, la masse volumique et des éventuelles variables internes capables de fournir une information quant à l'état de la microstructure (e.g. endommagement, plasticité). Si l'adoption d'une mesure de déformation et de la température absolue comme variables d'état primales est naturelle, cela reste un choix de modélisation. Il est ainsi tout à fait possible d'utiliser une mesure de l'état de contrainte ou l'entropie spécifique, en lieu et place de la mesure de déformation ou de la température.

Le choix de la mesure de déformation à utiliser pour décrire le comportement est libre. Il faut néanmoins garder à l'esprit que la construction des relations de comportement, en particulier de la relation d'état qui fournit l'état de contrainte s'appuie sur la notion de conjugaison présentée au 7.4.3. Dans un souci de concision, les relations de conjugaison entre les mesures de contrainte, de déformation et de taux de déformation sont rappelées dans le Tableau 12.5. Outre la condition d'isotropie discutée précédemment (voir 12.2), l'écriture d'une relation de comportement pour le tenseur des contraintes de Cauchy σ est restreinte par le simple fait qu'il n'est pas possible de construire la mesure de déformation correspondante à partir du taux de déformation eulérien \mathbf{d} . Aussi, l'utilisation du gradient de la transformation pour la description du comportement est délicate dans la mesure où, puisqu'il s'agit d'une grandeur ni objective, ni invariante, le respect du principe d'indifférence matérielle peut poser quelques difficultés.

12.4.2 Contrainte élastique et contrainte visqueuse

Une mesure de contrainte fournit une information quant aux sollicitations mécaniques appliquées à un point matériel. Du point de vue du comportement, les contraintes peuvent avoir différentes origines. D'abord, les contraintes peuvent avoir une origine élastique au sens où elles sont la conséquence des déformations appliquées au point matériel considéré. Ces

Caractéristiques	Contrainte	Déformation	Taux de déformation
Objective	$\boldsymbol{\sigma}$		\mathbf{d}
Invariante	$\boldsymbol{\Sigma}_t$	\mathbf{E}_t	$\dot{\mathbf{E}}_t$
Invariante	$\boldsymbol{\Sigma}_b$	\mathbf{E}_b	$\dot{\mathbf{E}}_b$
Invariante	$\boldsymbol{\Sigma}_g = \mathbf{S}$	\mathbf{E}_g	$\dot{\mathbf{E}}_g$
	\mathbf{P}	\mathbf{F}	$\dot{\mathbf{F}}$

Tableau 12.5: Relations de conjugaison entre différentes mesures de l'état de contrainte, de déformation et du taux de déformation. Au sens strict, le gradient de la transformation n'est pas une mesure de l'état de déformation tout comme sa dérivée temporelle n'est pas une mesure du taux de déformation.

contraintes sont généralement prépondérantes dans les matériaux solides. Par opposition, certaines contraintes ne se manifestent qu'en présence d'un taux de déformation, i.e. il faut que l'état de déformation change pour les observer. Ces contraintes, qui sont qualifiées de visqueuses, sont importantes dans les fluides. De manière générale, ces deux contributions peuvent exister ce qui conduit à décomposer une mesure de l'état de contrainte (notée $\boldsymbol{\Sigma}$) de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}, \dots) = \boldsymbol{\Sigma}_e(\mathbf{E}, \dots) + \boldsymbol{\Sigma}_v(\dot{\mathbf{E}}, \dots) \quad (12.17)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_e$ (respectivement $\boldsymbol{\Sigma}_v$) représente la contribution élastique (respectivement visqueuse) à l'état de contrainte.

Puisque les déformations qui génèrent les contraintes élastiques participent au stockage d'énergie interne, ces dernières ont une origine parfois qualifiée d'énergétique. Par opposition, les contraintes visqueuses, parce qu'elles sont le résultat de transformations irréversibles (en particulier dues au frottement interne), ont une origine dissipative. Il convient de préciser que, lorsqu'un point matériel atteint un état d'équilibre, le taux de déformation est nul, ce qui entraîne l'annulation de la contrainte visqueuse.

12.4.3 Relations d'état

Les relations d'état permettent, à partir des variables d'état primales, d'exprimer les variables duales correspondantes. Dans ce qui suit, on note \mathbf{X} le vecteur contenant l'ensemble des variables d'état primales. Par analogie, les variables duales sont regroupées au sein d'un vecteur \mathbf{Z} de dimension p égale à celle de \mathbf{X} . Les variables d'état primales, aussi bien internes qu'externes, sont indépendantes les unes des autres. Elles définissent de manière unique l'état d'un point matériel.

Dans le contexte de la thermodynamique, les relations d'état dérivent d'un potentiel d'état, qui est une fonction d'état de l'ensemble des variables d'état primales. Pour les applications thermomécaniques, le potentiel d'état le plus largement utilisé pour la construction des relations d'état est l'énergie libre spécifique (notée a). L'utilisation de ce potentiel suppose que le vecteur \mathbf{X} comprend une mesure de l'état de déformation et la température absolue. Il convient de préciser qu'il est tout à fait possible d'adopter un autre potentiel d'état (e.g. entropie spécifique, énergie interne spécifique) pour la construction des relations d'état. Comme cela a été discuté au Chapitre 6, cela revient choisir un autre ensemble de variables d'état primales pour la représentation de l'état d'un point matériel. Par exemple, l'utilisation de l'énergie interne spécifique en lieu et place de l'énergie libre spécifique revient à conférer à l'entropie spécifique, plutôt qu'à la température, le rôle de variable d'état primale.

Pour chaque variable d'état \mathbf{X}_i , la variable duale \mathbf{Z}_i s'obtient à partir du potentiel d'état (en prenant l'exemple de l'énergie libre spécifique) par une relation d'état telle que :

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{X}_i} \quad (12.18)$$

$$= \hat{\mathbf{Z}}_i(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) \quad (12.19)$$

où p désigne le nombre de variables d'état indépendantes. Pour un état donné, la connaissance des variables duales permet d'exprimer la dérivée temporelle de l'énergie libre spécifique comme suit :

$$\dot{a} = \sum_i \mathbf{Z}_i \dot{\mathbf{X}}_i \quad (12.20)$$

Une expression semblable peut être établie pour les autres fonctions d'état susceptibles d'être utilisées comme potentiel d'état. Aussi, une fois les rela-

tions d'état établies, il est possible de déterminer les autres fonctions d'état à partir de celle choisie comme potentiel d'état.

12.4.4 Relations d'évolution

Flux et forces thermodynamiques

Quelle que soit la nature (ouverte ou fermée) du système considéré, la source de dissipation est la somme de différentes contributions qui prennent toutes la forme d'un produit entre une force thermodynamique et une variable flux. Les variables flux, telles que la densité de flux de chaleur, font intervenir la notion de vitesse d'évolution. Les forces thermodynamiques, telles que le gradient du logarithme de la température absolue, constituent le moteur de l'évolution d'un point matériel vers l'état d'équilibre. Si la procédure qui conduit à identifier les variables flux et les forces thermodynamiques correspondantes n'a pas encore été détaillée (voir 12.4.5 et 12.4.6), ces grandeurs sont néanmoins d'ores et déjà listées dans le Tableau 12.6.

Dans un souci de concision, on note \mathbf{J} le vecteur des variables flux et \mathbf{F} le vecteur des forces thermodynamiques associées dans ce qui suit. Ces deux vecteurs ont une dimension égale au nombre total m de variables flux utilisées pour la construction d'une loi de comportement. Selon cette notation, la source de dissipation spécifique d s'écrit simplement :

$$d = \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{J}_i \quad (12.21)$$

En complément des relations d'état, l'écriture d'une loi de comportement requiert de préciser les relations d'évolution qui connectent les variables flux aux forces thermodynamiques. Avec la notation adoptée précédemment, les relations d'évolution sont des fonctions de la forme :

$$\mathbf{J}_i = \hat{\mathbf{J}}_i(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_m, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) \quad (12.22)$$

L'équation précédente traduit le fait que chaque variable flux dépend de l'ensemble des forces thermodynamiques qui contrôlent l'évolution du point matériel considéré et éventuellement des variables d'état.

Flux	Force thermodynamique	Équations
Taux de déformation		
\mathbf{d} ou $\dot{\mathbf{E}}$	$\boldsymbol{\sigma}_v/\varrho$ ou $\boldsymbol{\Sigma}_v/\varrho_0$	6
Densité de flux de chaleur		
$\tilde{\mathbf{j}}_q$ ou $\tilde{\mathbf{J}}_q$	$-\nabla_{\mathbf{x}} \ln T/\varrho$ ou $-\nabla_{\mathbf{x}} (\ln T)/\varrho_0$	3
Dérivées des variables internes		
\dot{x}_i ($i = 1, \dots, n$)	$-f_i$ ($i = 1, \dots, n$)	n
Sous-total (système fermé)		$9 + n$
Densité de flux de masse		
\mathbf{j}_m ou \mathbf{J}_m	$-\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T)T/\varrho$ ou $-\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T)T/\varrho_0$	3
Total (système ouvert)		$12 + n$

Tableau 12.6: Liste des variables flux et des forces thermodynamiques permettant de modéliser l'évolution d'un système.

Relations de réciprocité d'Onsager

Lorsqu'on s'éloigne peu de la situation d'équilibre, il est possible d'évaluer raisonnablement les variables flux en réalisant un développement en série de Taylor au premier ordre de la forme générale (12.22). Dans une telle situation, les équations d'évolution peuvent donc être raisonnablement représentées par des formes linéaires du type :

$$\mathbf{J}_i = \frac{1}{T} \sum_j \mathbf{L}_{ij} \mathbf{F}_j \quad (12.23)$$

où la matrice \mathbf{L} (avec $\mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1}$) regroupe l'ensemble des coefficients cinétiques qui permettent de prévoir l'évolution d'un point matériel.

Lorsque la forme linéaire est adoptée pour les relations d'évolution, la source de dissipation spécifique associée à un point régulier s'exprime :

$$d = \frac{1}{T} \sum_i \mathbf{F}_i \sum_j \mathbf{L}_{ij} \mathbf{F}_j \quad (12.24)$$

$$= T \sum_i \mathbf{J}_i \sum_j \mathbf{M}_{ij} \mathbf{J}_j \quad (12.25)$$

La température absolue étant positive, l'évolution d'un point matériel est compatible avec le second principe de la thermodynamique dès lors que la matrice des coefficients cinétiques est semi-définie positive.

Remarque La présence du facteur $1/T$ dans la forme linéaire des relations d'évolution est due au fait que la présentation classique des relations de réciprocity d'Onsager repose sur le taux de production d'entropie qui, à un facteur $1/T$ près, est égal à la source de dissipation.

La notion de réciprocity établie par Onsager [Onsager \(1931\)](#)² stipule que la matrice des coefficients cinétiques \mathbf{L} et son inverse \mathbf{M} soient symétriques :

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{L}_{ji} \quad (12.26)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{ji} \quad (12.27)$$

Cette restriction de symétrie impose des contraintes supplémentaires quant aux équations d'évolution associées à un point matériel au voisinage de l'équilibre thermodynamique.

Remarque La validité de la condition de symétrie (12.26) qui s'applique à la matrice des coefficients cinétiques a été discutée dans la littérature (voir notamment [Coleman and Truesdell \(1960\)](#)). Il est en effet possible de choisir une liste alternative de flux \mathbf{J}' et de forces thermodynamiques \mathbf{F}' qui, au voisinage de l'équilibre, restent liés par une relation linéaire :

$$\mathbf{J}'_i = \frac{1}{T} \sum_j \mathbf{L}'_{ij} \mathbf{F}'_j$$

Ce choix alternatif doit néanmoins conduire à une source de dissipation identique à celle produite par les flux \mathbf{J} et les forces thermodynamiques \mathbf{F} , ce qui implique que :

$$d = \frac{1}{T} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{J}_i = \frac{1}{T} \sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \mathbf{J}'_i$$

Il est possible de satisfaire l'égalité précédente en prenant pour la matrice \mathbf{L}' , qui donne les coefficients cinétiques alternatifs, la somme d'une

²Les relations de réciprocity d'Onsager sont parfois désignées par le terme de quatrième principe de la thermodynamique.

matrice \mathbf{L} symétrique et d'une matrice \mathbf{W} anti-symétrique :

$$\mathbf{L}'_{ij} = \mathbf{L}_{ij} + \mathbf{W}_{ij}$$

L'analyse précédente montre que, sauf si on impose une restriction supplémentaire aux forces thermodynamiques et aux flux que celle de fournir la source de dissipation, il est toujours possible de trouver des couples de flux et de forces thermodynamiques pour lesquels la matrice des coefficients cinétiques ne vérifie pas la condition de symétrie (12.26). Réciproquement, pour un ensemble de variables flux et de forces thermodynamiques pour lequel la matrice des coefficients cinétiques n'est pas symétrique, il est possible de choisir un ensemble alternatif mais néanmoins équivalent au sens de la dissipation qui conduit à une matrice symétrique.

Matériaux standards et non-standards

Pour l'établissement des relations d'évolution³, la première approche consiste à écrire les équations d'évolution sous leur forme (12.22) sans autre précaution particulière que de s'assurer qu'elles sont compatibles avec le second principe de la thermodynamique. Les relations d'évolution doivent en effet garantir que la source de dissipation est positive (éventuellement nulle). Le principal intérêt de cette approche réside dans sa grande généralité. Elle permet en effet de reproduire des phénomènes complexes (e.g. adoucissement ou durcissement non-linéaire) observés en pratique. Cette approche dispose néanmoins d'un inconvénient puisque les équations d'évolution ainsi obtenues ne satisfont *a priori* pas aux relations de réciprocity d'Onsager lorsqu'un point matériel approche de l'équilibre. Les matériaux pour lesquels les lois de comportement, en particulier les lois d'évolution, sont construites de cette manière sont qualifiés de non-standards.

Il existe une manière alternative de construire les relations d'évolution en supposant, par analogie avec les relations d'état qui dérivent d'un potentiel d'état, qu'il existe une fonction scalaire, appelée potentiel de dissipation, de laquelle dérivent les relations d'évolution. Par opposition au cas précédent, les matériaux pour lesquels les relations d'évolution dérivent d'un potentiel de dissipation sont qualifiés de standards.

³Les relations d'évolution sont parfois appelées relations complémentaires au sens où elles complètent les relations d'état.

Potentiel de dissipation

Pour un matériau standard, les relations d'évolution sont obtenues à partir de l'un ou l'autre des potentiels de dissipation ϕ ou φ par :

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{J}_i} \text{ ou } \mathbf{J}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{F}_i} \quad (12.28)$$

Le potentiel de dissipation, noté ϕ , est une fonction des variables de flux, et éventuellement de certaines variables d'état. Ce potentiel de dissipation ϕ ne fournit pas directement les relations d'évolution au sens où il ne permet pas d'exprimer directement les variables flux en fonction de l'ensemble des forces thermodynamiques mais l'inverse. Il est toutefois possible de reformuler les équations précédentes pour obtenir les variables flux en fonction des forces thermodynamiques.

Remarque Les relations de réciprocité d'Onsager correspondent au cas particulier où le potentiel de dissipation ϕ (respectivement φ) est une fonction quadratique des variables flux (respectivement forces thermodynamiques) :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{T}{2} \sum_i \mathbf{J}_i \sum_j \mathbf{M}_{ij} \mathbf{J}_j \\ \varphi &= \frac{1}{2T} \sum_i \mathbf{F}_i \sum_j \mathbf{L}_{ij} \mathbf{F}_j \end{aligned}$$

La dérivation du potentiel de dissipation ϕ (respectivement φ) par rapport à une variable flux \mathbf{J}_i (respectivement force thermodynamique \mathbf{F}_i) conduit alors à :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= T \sum_j \mathbf{M}_{ij} \mathbf{J}_j \\ \mathbf{J}_i &= \frac{1}{T} \sum_j \mathbf{L}_{ij} \mathbf{F}_j \end{aligned}$$

L'adoption d'une forme quadratique pour l'un ou l'autre des potentiels de dissipation conduit donc à des relations d'évolution linéaires.

Une approche plus directe mais néanmoins équivalente consiste à utiliser le potentiel de dissipation φ , qui est une fonction scalaire des forces thermodynamiques, plutôt que des variables flux. Comme indiqué par les relations

précédentes, la dérivation de ce potentiel de dissipation par rapport à une force thermodynamique fournit la relation d'évolution associée à la variable flux conjuguée. Les potentiels de dissipation ϕ et φ ne sont pas indépendants puisque l'un se déduit de l'autre par transformation de Legendre-Fenchel :

$$\varphi(\mathbf{F}) = \sup_{\mathbf{J}} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{J} - \phi(\mathbf{J})) \quad (12.29)$$

$$\phi(\mathbf{J}) = \sup_{\mathbf{F}} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{J} - \varphi(\mathbf{F})) \quad (12.30)$$

Pour que les relations d'évolution soient compatibles avec le second principe de la thermodynamique, les potentiels de dissipation doivent vérifier certaines conditions. D'abord, le potentiel ϕ doit être une fonction convexe des variables flux, il vérifie donc :

$$\phi(\mathbf{J}') \geq \phi(\mathbf{J}) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{J}} \bullet (\mathbf{J}' - \mathbf{J}) \quad (12.31)$$

De manière semblable, le potentiel de dissipation φ est une fonction convexe des forces thermodynamiques. Il satisfait donc à l'inégalité suivante :

$$\varphi(\mathbf{F}') \geq \varphi(\mathbf{F}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{F}} \bullet (\mathbf{F}' - \mathbf{F}) \quad (12.32)$$

Aussi, les potentiels de dissipation sont des fonctions positives :

$$\phi(\mathbf{J}) \geq 0 \quad (12.33)$$

$$\varphi(\mathbf{F}) \geq 0 \quad (12.34)$$

Enfin, les potentiels de dissipation sont des fonctions nulles à l'origine :

$$\phi(\mathbf{0}) = 0 \quad (12.35)$$

$$\varphi(\mathbf{0}) = 0 \quad (12.36)$$

Il est important de remarquer que les conditions précédentes sont des conditions suffisantes mais pas nécessaires au respect du second principe. Aussi, lorsque ces conditions sont satisfaites pour l'un des deux potentiels, elles sont par construction vérifiées pour l'autre potentiel.

Remarque Le potentiel de dissipation n'est pas systématiquement dérivable au sens classique. Néanmoins, puisqu'il s'agit d'une fonction convexe des flux ou des forces thermodynamiques, il est possible de recourir à la notion de sous-différentiel pour traiter une telle situation. Le sous-différentiel de ϕ , classiquement noté $\partial\phi$, est l'ensemble des sous-

gradients \mathbf{F} tels que :

$$\phi(\mathbf{J}) - \phi(\mathbf{J}') \geq \mathbf{F} \bullet (\mathbf{J} - \mathbf{J}')$$

Lorsque le potentiel de dissipation ϕ n'est pas une fonction dérivable des flux, les forces thermodynamiques appartiennent au sous-différentiel :

$$\mathbf{F} \in \partial\phi$$

Dès lors que l'ensemble $\partial\phi$ n'est pas vide (i.e. $\partial\phi \neq \emptyset$), le potentiel de dissipation est qualifié de sous-différentiable.

L'adoption d'un potentiel de dissipation pour la définition des relations d'évolution conduit à une forme de symétrie au sens où :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_i}{\partial \mathbf{F}_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{F}_i \partial \mathbf{F}_j} \quad (12.37)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{J}_j}{\partial \mathbf{F}_i} \quad (12.38)$$

Aussi, lorsque les flux et les forces thermodynamiques tendent vers une valeur nulle, la matrice des coefficients cinétiques \mathbf{L} et son inverse \mathbf{M} , qui caractérisent le comportement d'un point matériel au voisinage de l'équilibre, sont données par :

$$\mathbf{L}_{ij} = T \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{F}_i \partial \mathbf{F}_j} \right|_{\mathbf{0}} = \mathbf{L}_{ji} \quad (12.39)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{1}{T} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{J}_i \partial \mathbf{J}_j} \right|_{\mathbf{0}} = \mathbf{M}_{ji} \quad (12.40)$$

Le résultat précédent souligne que la dérivation des relations d'évolution à partir d'un potentiel de dissipation est compatible avec la notion de réciprocité au sens de Onsager. L'adoption d'un potentiel de dissipation constitue toutefois une généralisation de ce principe au sens où le potentiel de dissipation permet d'établir des relations d'évolution même lorsque le point matériel est éloigné de l'état d'équilibre.

12.4.5 Cas des systèmes ouverts

Relations d'état

Pour un point matériel régulier d'un système ouvert, la liste des variables d'état inclut une mesure lagrangienne de l'état de déformation \mathbf{E} , la température absolue T , la masse volumique ϱ_0 ainsi qu'un nombre fini n de variables internes x_i (avec $i = 1, \dots, n$). En s'appuyant sur les concepts introduits dans la section précédente, il est possible de construire l'ensemble des relations d'état :

$$\Sigma_e = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (12.41)$$

$$s = - \frac{\partial a}{\partial T} \quad (12.42)$$

$$\mu = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \varrho_0} \quad (12.43)$$

$$f_i = \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.44)$$

Les relations d'état présentées ci-dessus sont semblables à celles introduites au 6.6, à ceci près que la relation d'état (12.41) ne fournit que la partie élastique de l'état de contrainte. Cette différence de présentation s'explique par le fait que la contrainte visqueuse a implicitement été négligée au 6.6, auquel cas l'état de contrainte total se réduit à sa partie élastique. Aussi, le potentiel d'état permet d'établir pour chaque variable interne x_i une relation d'état qui fournit la force thermodynamique f_i qui lui est associée.

Source de dissipation

L'écriture des principes fondamentaux de la thermodynamique fait généralement intervenir la dérivée temporelle de l'énergie interne spécifique. Puisque l'énergie interne spécifique est donnée par $u = a + sT$, on en déduit que la dérivée temporelle de l'énergie interne spécifique s'exprime :

$$\dot{u} = \dot{a} + \dot{s}T + s\dot{T} \quad (12.45)$$

$$= \frac{\Sigma_e}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}} + T\dot{s} + \frac{\mu}{\varrho_0} \dot{\varrho}_0 + \sum_i f_i \dot{x}_i \quad (12.46)$$

Si on privilégie des quantités associées à la configuration actuelle, la dérivée temporelle précédente s'écrit de manière équivalente comme suit :

$$\dot{u} = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_e}{\varrho} + \mu \mathbf{1} \right) : \mathbf{d} + T \dot{s} + \frac{\mu}{\varrho} \dot{\varrho} + \sum_i f_i \dot{x}_i \quad (12.47)$$

Pour établir les équations d'évolution associées à un point matériel régulier d'un système ouvert, il convient de s'appuyer l'expression de la source de dissipation (9.41). En particulier, en utilisant la séparation d'une mesure de contrainte en parties élastique et visqueuse ainsi que l'expression (12.46) du taux de variation de l'énergie interne spécifique, la source de dissipation spécifique s'écrit :

$$\begin{aligned} d = & \frac{\boldsymbol{\Sigma}_v}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}} - \mu \left(\frac{\dot{\varrho}_0}{\varrho_0} - r_m \right) - \sum_i f_i \dot{x}_i \\ & - \frac{T}{\varrho_0} \left(\frac{\mu \mathbf{J}_m}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \end{aligned} \quad (12.48)$$

La relation précédente souligne que la contribution visqueuse, contrairement à la contribution élastique, participe à la dissipation. Aussi, en utilisant la forme locale de l'équation de conservation de la masse pour un système ouvert (4.24), l'expression de la source de dissipation devient :

$$d = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_v}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{T}{\varrho_0} \left(\frac{\mu}{T} \nabla_{\mathbf{x}} \right) \cdot \mathbf{J}_m - \sum_i f_i \dot{x}_i - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \quad (12.49)$$

Si l'approche suivie est déclinée de manière semblable avec des quantités rattachées à la configuration actuelle, la source de dissipation spécifique associée à un point régulier s'écrit de manière alternative :

$$d = \frac{\boldsymbol{\sigma}_v}{\varrho} : \mathbf{d} - \frac{T}{\varrho} \left(\frac{\mu}{T} \nabla_{\mathbf{x}} \right) \cdot \mathbf{j}_m - \sum_i f_i \dot{x}_i - \frac{1}{\varrho} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{j}}_q \quad (12.50)$$

Les relations précédentes montrent que le caractère localement irréversible d'une transformation est dû aux phénomènes de viscosité, aux transferts de masse, aux évolutions de la microstructure locale et aux transferts de chaleur par conduction.

Il est courant de décomposer additivement la puissance dissipée spécifique d'un point régulier en deux contributions de sorte que :

$$d = d_1 + d_2 \quad (12.51)$$

La contribution d_1 est usuellement appelée dissipation⁴ intrinsèque spécifique tandis que la contribution d_2 est appelée dissipation extrinsèque spécifique. Si la partie intrinsèque comprend la contribution mécanique aux phénomènes dissipatifs, la partie extrinsèque est exclusivement due aux phénomènes de transport. La partie extrinsèque de la source de dissipation est ainsi donnée par l'une ou l'autre de ces deux définitions équivalentes :

$$d_2 = -\frac{T}{\varrho_0} \left(\frac{\mu}{T} \nabla_{\mathbf{x}} \right) \cdot \mathbf{J}_m - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \quad (12.52)$$

$$= -\frac{T}{\varrho} \left(\frac{\mu}{T} \nabla_{\mathbf{x}} \right) \cdot \mathbf{j}_m - \frac{1}{\varrho} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{j}}_q \quad (12.53)$$

On déduit des définitions précédentes que la source de dissipation intrinsèque d_1 pour un point régulier est telle que :

$$d_1 = \frac{\Sigma_v}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}} - \sum_i f_i \dot{x}_i \quad (12.54)$$

$$= \frac{\sigma_v}{\varrho} : \mathbf{d} - \sum_i f_i \dot{x}_i \quad (12.55)$$

Remarque Il est légitime de se poser la question du statut du gradient de température, dont l'expérience montre qu'il contrôle largement la densité surfacique de flux de chaleur. En vertu du principe d'équiprésence, le gradient de température, s'il apparaît dans la relation d'évolution de la densité de flux de chaleur, doit *a priori* intervenir dans les autres relations de comportement. Néanmoins, si le gradient de la température est considéré comme une variable d'état à part entière (sans autre modification à la théorie), il est toujours possible d'imaginer une histoire thermique pour laquelle il varie de sorte à rendre négative la source de dissipation, ce qui entre en contradiction avec le second principe de la thermodynamique. Le gradient de la température ne peut donc pas se voir confier le statut de variable d'état qui lui permettrait d'intervenir dans les relations d'état.

⁴Bien que courante, l'utilisation faite ici du terme "dissipation" est un peu abusive. Strictement parlant, ce terme désigne un effet un phénomène plutôt qu'une puissance dissipée spécifique.

Remarque Pour s'assurer du respect du second principe de la thermodynamique, il est usuel d'adopter une hypothèse de découplage de la source de dissipation. Cette hypothèse conduit à imposer que les contributions intrinsèque et extrinsèque soient positives indépendamment l'une de l'autre :

$$d_1 \geq 0 \text{ et } d_2 \geq 0$$

Une telle hypothèse, qui garantit le respect du second principe (i.e. $d = d_1 + d_2 \geq 0$), revient à supposer que la contrainte visqueuse et les forces thermodynamiques responsables de l'évolution des variables internes sont indépendantes des densités surfaciques de flux de chaleur et de masse (et réciproquement). En d'autres termes, les phénomènes à l'origine de la dissipation intrinsèque sont découplés de ceux qui contrôlent la dissipation extrinsèque.

Relations d'évolution

L'Équation (12.49), qui fournit la source de dissipation, permet d'établir la liste des variables flux et des forces thermodynamiques pour un point régulier d'un système ouvert. Spécifiquement, les variables flux sont le taux de déformation $\dot{\mathbf{E}}$, la densité surfacique de flux de chaleur $\tilde{\mathbf{J}}_q$ (dans sa forme réduite), la densité surfacique de flux de masse \mathbf{J}_m et les dérivées temporelles des éventuelles variables internes \dot{x}_i (avec $i = 1, \dots, n$). Les forces thermodynamiques correspondantes sont listées dans le Tableau 12.6.

Dans le cas d'un matériau non-standard, les relations d'évolution associées aux différentes variables flux peuvent être établies en fonction des forces thermodynamiques et, éventuellement des variables d'état. Elles prennent donc la forme :

$$\dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\Sigma}_v, \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), \nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T), f_1, \dots, f_n, \varrho_0, T) \quad (12.56)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_q = \hat{\mathbf{J}}_q(\boldsymbol{\Sigma}_v, \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), \nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T), f_1, \dots, f_n, \varrho_0, T) \quad (12.57)$$

$$\mathbf{J}_m = \hat{\mathbf{J}}_m(\boldsymbol{\Sigma}_v, \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), \nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T), f_1, \dots, f_n, \varrho_0, T) \quad (12.58)$$

$$\dot{x}_i = \hat{x}_i(\boldsymbol{\Sigma}_v, \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), \nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T), f_1, \dots, f_n, \varrho_0, T) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.59)$$

Lorsque l'approche non-standard est adoptée, il est nécessaire de vérifier que la source de dissipation reste positive à chaque instant quel que soit l'état d'un point matériel.

Comme discuté précédemment, pour un matériau standard, les relations d'évolution dérivent d'un potentiel de dissipation. Si le potentiel ϕ , qui dépend des variables flux, est adopté pour construire les relations d'évolution, ces dernières sont déduites des équations :

$$\Sigma_v = \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (12.60)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) = -\varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{J}}_q} \quad (12.61)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T) = -\frac{\varrho_0}{T} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{J}_m} \quad (12.62)$$

$$f_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.63)$$

Pour un matériau standard, en combinant la relation d'état (12.41) et la relation d'évolution (12.60), l'état de contrainte, qui intègre la somme des contributions élastique et visqueuse, correspond à la somme :

$$\Sigma = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} + \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (12.64)$$

La relation précédente est intéressante en cela qu'elle traduit bien le fait que deux potentiels (potentiel d'état et potentiel de dissipation) sont nécessaires à la définition du comportement d'un matériau standard.

L'alternative, qui conduit directement aux relations d'évolution, consiste à utiliser le potentiel de dissipation φ . Ce dernier, qui dépend des forces thermodynamiques, conduit aux relations d'évolution suivantes :

$$\dot{\mathbf{E}} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \Sigma_v} \quad (12.65)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_q = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial (\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T))} \quad (12.66)$$

$$\mathbf{J}_m = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial (\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T)T)} \quad (12.67)$$

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial f_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.68)$$

Outre les variables de flux, les potentiels de dissipation peuvent éventuellement dépendre de la température et de la masse volumique. Ces

deux grandeurs sont à traiter comme des paramètres plutôt que des variables au sens où elles ne constituent pas des flux. Elles sont toutefois introduites pour signifier que les relations d'évolution peuvent intégrer une dépendance vis-à-vis de la température ou de la masse volumique.

12.4.6 Cas des systèmes fermés

Relations d'état

Dans le cas d'un système fermé, les variables d'état associées à un point matériel régulier sont identiques à celles utilisées pour les systèmes ouverts, à ceci près que la masse volumique, si elle est prise par unité de volume de la configuration initiale, n'est plus une variable d'état puisqu'elle est constante au cours d'un processus thermodynamique. Les relations d'état correspondantes sont donc :

$$\Sigma_e = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (12.69)$$

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (12.70)$$

$$f_i = \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.71)$$

Source de dissipation

L'établissement de l'expression de la source de dissipation requiert de préciser la dérivée temporelle de l'énergie interne spécifique. Pour le cas particulier d'un système fermé, puisque la masse volumique prise par unité de volume de la configuration initiale est constante, la vitesse à laquelle l'énergie interne spécifique d'un point régulier change s'écrit :

$$\dot{u} = \dot{a} + \dot{s}T + s\dot{T} \quad (12.72)$$

$$= \frac{\Sigma_e}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}} + T\dot{s} + \sum_i f_i \dot{x}_i \quad (12.73)$$

L'équivalent spatial de la relation précédente correspond à :

$$\dot{u} = \frac{\sigma_e}{\varrho} : \mathbf{d} + T\dot{s} + \sum_i f_i \dot{x}_i \quad (12.74)$$

Pour un point matériel régulier d'un système fermé, si on s'appuie sur les développements précédents, l'expression de la source de dissipation (9.51) devient :

$$d = \frac{\Sigma_v}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}} - \sum_i f_i \dot{x}_i - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q \quad (12.75)$$

Une écriture alternative de la source de dissipation spécifique, qui utilise des grandeurs associées à la configuration actuelle, est donnée par :

$$d = \frac{\sigma_v}{\varrho} : \mathbf{d} - \sum_i f_i \dot{x}_i - \frac{1}{\varrho} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{j}_q \quad (12.76)$$

Comme pour les systèmes ouverts, on retrouve que la source de dissipation spécifique associée à un point régulier est donnée par la somme de produits entre les variables flux et les forces thermodynamiques correspondantes. Aussi, il est également possible de séparer la source de dissipation spécifique en deux contributions (i.e. $d = d_1 + d_2$), qui correspondent à la source de dissipation intrinsèque et à la source de dissipation extrinsèque. La partie extrinsèque, qui représente la contribution des transferts de chaleur à la dissipation, s'exprime :

$$d_2 = -\frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q \quad (12.77)$$

$$= -\frac{1}{\varrho} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{j}_q \quad (12.78)$$

Ces relations ressemblent largement à celles établies pour les systèmes ouverts, à ceci près que les densités surfaciques de flux de chaleur n'apparaissent pas sous leur forme réduite en raison de l'absence de transfert de masse. Aussi, pour la partie intrinsèque, qui représente la contribution des changements de la microstructure interne d'un point matériel, on obtient que :

$$d_1 = \frac{\Sigma_v}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}} - \sum_i f_i \dot{x}_i \quad (12.79)$$

$$= \frac{\sigma_v}{\varrho} : \mathbf{d} - \sum_i f_i \dot{x}_i \quad (12.80)$$

Remarque Pour les systèmes fermés, la source de dissipation extrinsèque, parce qu'elle se limite à la contribution des transferts de chaleur par conduction, est souvent appelée source de dissipation thermique. Néanmoins, puisque cette source de dissipation inclut l'effet des transferts de masse dans le cas des systèmes ouverts, le qualificatif de source de dissipation extrinsèque est préféré à celui de source de dissipation thermique.

Relations d'évolution

Pour un point matériel régulier d'un système fermé, l'équation (12.75) indique que les variables flux sont le taux de déformation $\dot{\mathbf{E}}$, la densité surfacique de flux de chaleur \mathbf{J}_q et les dérivées temporelles des variables internes \dot{x}_i (avec $i = 1, \dots, n$). Les forces thermodynamiques correspondantes sont listées dans le Tableau 12.6.

Pour un matériau non-standard, il existe une grande liberté quant à la construction des relations d'évolution. Une forme assez générale de ces relations d'évolution correspond à :

$$\dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\Sigma}_v, \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), \nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T), f_1, \dots, f_n, \varrho_0, T) \quad (12.81)$$

$$\mathbf{J}_q = \hat{\mathbf{J}}_q(\boldsymbol{\Sigma}_v, \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), \nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T), f_1, \dots, f_n, \varrho_0, T) \quad (12.82)$$

$$\dot{x}_i = \hat{x}_i(\boldsymbol{\Sigma}_v, \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), \nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T), f_1, \dots, f_n, \varrho_0, T) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.83)$$

Parce qu'elles ne dérivent pas d'un potentiel de dissipation, il convient de s'assurer que les relations d'évolution sont compatibles avec le second principe de la thermodynamique.

Si l'approche standard est adoptée, les relations d'évolution dérivent de l'un ou l'autre des potentiels de dissipation (ϕ ou φ). Ainsi, de manière semblable à la démarche adoptée pour les systèmes ouverts, dès que le potentiel de dissipation ϕ est utilisé, les relations d'évolution peuvent être obtenues à

partir des équations suivantes :

$$\boldsymbol{\Sigma}_v = \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (12.84)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) = -\varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{J}}_q} \quad (12.85)$$

$$f_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.86)$$

L'autre option, qui *in fine* amène à des relations d'évolution similaires, repose sur le potentiel de dissipation φ . Les relations d'évolution associées à un point matériel régulier sont alors :

$$\dot{\mathbf{E}} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_v} \quad (12.87)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_q = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial (\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T))} \quad (12.88)$$

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial f_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.89)$$

Remarque Dans un contexte purement mécanique, i.e. absence de transferts de masse et de chaleur, et dès lors que la contrainte visqueuse est nulle, les seules relations d'évolution nécessaires à la construction d'une loi de comportement sont celles associées aux variables internes. Dans une telle situation, le vecteur des variables duales est, au signe près, identique au vecteur des forces thermodynamiques (i.e. $\mathbf{Z} = -\mathbf{F}$).

Chapitre 13

Transferts thermiques

Puisque le comportement des matériaux dépend largement de la température, il est souvent nécessaire de préciser comment la température évolue au sein d'un système au cours d'un processus. Dans ce chapitre, les notions introduites précédemment sont d'abord utilisées pour construire l'équation de diffusion de la chaleur, qui décrit les transferts thermiques au sein d'un système. La résolution de cette équation nécessite de préciser les conditions aux limites qui s'appliquent à la frontière des systèmes considérés. Plusieurs formes de conditions aux limites qui correspondent à différents modes de transfert de chaleur (e.g. convection, rayonnement), sont ainsi discutées. La loi de Fourier, qui constitue un modèle de comportement particulier pour la densité surfacique de flux de chaleur, est brièvement présentée dans la dernière partie.

13.1 Équation de diffusion de la chaleur

13.1.1 Cas des systèmes ouverts

L'équation de diffusion de la chaleur est une équation différentielle qui permet de décrire l'évolution du champ de température au cours du temps. Cette équation est obtenue en partant de la relation d'état qui donne l'entropie spécifique à partir des variables d'état. Plus spécifiquement, lorsqu'on utilise une mesure lagrangienne de l'état de déformation, la

température absolue et la masse volumique comme variables d'état externes pour décrire l'état d'un point matériel appartenant à un système ouvert, les relations présentées au 6.7 indiquent que l'entropie spécifique se déduit de l'énergie libre spécifique à partir de :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (13.1)$$

La dérivée par rapport au temps de la relation précédente fournit le taux de variation d'entropie spécifique d'un point matériel régulier. Lorsqu'il est exprimé à partir des dérivées temporelles des différentes variables d'état listées au 12.4.5, le taux de variation d'entropie est donné par :

$$\dot{s} = -\frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \varrho_0} \dot{\varrho}_0 - \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial x_i} \dot{x}_i \quad (13.2)$$

La multiplication de la relation précédente par la température absolue et l'utilisation de la définition (10.21) de la capacité thermique à déformation constante c_v conduisent à :

$$\dot{s}T = c_v \dot{T} - T \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - T \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \varrho_0} \dot{\varrho}_0 - T \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial x_i} \dot{x}_i \quad (13.3)$$

La définition (9.41) de la source de dissipation spécifique d permet d'exprimer le produit du taux de variation d'entropie et de la température sous la forme alternative suivante :

$$\dot{s}T = d - \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + \dot{u} - \mu r_m + \frac{T}{\varrho_0} \left(\frac{\mu \mathbf{J}_m}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) + \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \quad (13.4)$$

En utilisant la décomposition de la source de dissipation en parties intrinsèque et extrinsèque (i.e. $d = d_1 + d_2$) ainsi que la définition (12.52) de la source de dissipation extrinsèque, l'expression précédente devient :

$$\dot{s}T = d_1 - \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + \dot{u} - \mu r_m + \frac{\mu}{\varrho_0} (\mathbf{J}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \quad (13.5)$$

Remarque La construction de l'équation de la chaleur utilise la notion de conjugaison au sens de la puissance des efforts intérieurs présentée au 7.4.3. En particulier, elle s'appuie sur le fait que la puissance spécifique nécessaire à la déformation d'un point régulier est donnée de manière équivalente par l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ désigne une mesure lagrangienne de l'état de contrainte conjuguée à une mesure lagrangienne \mathbf{E} du taux de déformation.

Aussi, la forme locale du premier principe (8.19a) fournit l'expression du taux de variation d'énergie interne spécifique pour un point régulier. Cette expression permet de reformuler l'équation précédente pour aboutir à :

$$\dot{s}T = d_1 - \mu r_m + \frac{\mu}{\varrho_0} (\mathbf{J}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) + \tilde{r}_q - \frac{1}{\varrho_0} \tilde{\mathbf{J}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \quad (13.6)$$

L'équation de diffusion de la chaleur s'obtient en combinant les relations (13.3) et (13.6), soit :

$$c_v \dot{T} = r_c + d_1 - \mu r_m + \frac{\mu}{\varrho_0} (\mathbf{J}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) + \tilde{r}_q - \frac{1}{\varrho_0} \tilde{\mathbf{J}}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \quad (13.7)$$

Dans un souci de concision, la forme précédente de l'équation de la chaleur utilise une source de chaleur spécifique r_c qui inclut la contribution des couplages entre la température et les autres variables d'état à l'évolution de la température :

$$r_c = T \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} + T \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \varrho_0} \dot{\varrho}_0 + T \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial x_i} \dot{x}_i \quad (13.8)$$

En utilisant d'une part les relations d'état (12.41) à (12.44) ainsi que l'équation locale de conservation de la masse (4.24), la source de chaleur r_c s'exprime comme suit :

$$r_c = \varrho_0 T \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_e}{\partial T} : \dot{\mathbf{E}} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} \left(r_m - \frac{\mathbf{J}_m \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}{\varrho_0} \right) + T \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial T} \dot{x}_i \quad (13.9)$$

L'équation (13.7) constitue une forme matérielle de l'équation de diffusion de la chaleur. La forme spatiale de cette équation est donnée par :

$$c_v \dot{T} = r_c + d_1 - \mu r_m + \frac{\mu}{\rho} (\mathbf{j}_m \cdot \nabla \mathbf{x}) + \tilde{r}_q - \frac{1}{\rho} \tilde{\mathbf{j}}_q \cdot \nabla \mathbf{x} \quad (13.10)$$

avec :

$$r_c = \rho T \frac{\partial \sigma_e}{\partial T} : \mathbf{d} + T \frac{\partial \mu}{\partial T} \left(r_m - \frac{\mathbf{j}_m \cdot \nabla \mathbf{x}}{\rho} \right) + T \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial T} \dot{x}_i \quad (13.11)$$

L'équation de diffusion de la chaleur, quelle que soit sa forme, traduit le fait que l'évolution de la température d'un point matériel dépend :

- des transferts de chaleur, qui sont représentés par la source spécifique et par la densité surfacique de flux de chaleur;
- de la dissipation intrinsèque, qui résulte des éventuelles transformations irréversibles (e.g. plasticité, endommagement);
- des couplages, qui traduisent l'effet de la température sur l'état de déformation (e.g. thermoélasticité), la masse volumique ou sur les variables représentant l'état interne (e.g. adoucissement thermique);
- des transferts de masse inhérents à la nature ouverte du système auxquels sont associés la source spécifique et la densité surfacique de flux de masse.

13.1.2 Cas des systèmes fermés

La méthode qui conduit à l'équation de diffusion de la chaleur pour un système fermé est identique à celle adoptée pour un système ouvert, à ceci près que la contribution des transferts de masse est exclue. Ainsi, pour un point matériel régulier d'un système fermé, le taux de variation d'entropie s'écrit :

$$\dot{s} = -\frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial x_i} \dot{x}_i \quad (13.12)$$

La dérivée seconde de l'énergie libre par rapport à la température correspond (à un facteur $-T$ près) à la capacité thermique spécifique à déformation

constante. En multipliant la relation précédente par la température, on obtient donc que :

$$\dot{s}T = c_v \dot{T} - T \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - T \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial x_i} \dot{x}_i \quad (13.13)$$

Pour un point matériel régulier d'un système fermé, le produit du taux de variation d'entropie et de la température peut également s'exprimer en faisant intervenir la source de dissipation spécifique d avec la relation (9.51), ce qui conduit à :

$$\dot{s}T = d - \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + \dot{u} + \frac{1}{\varrho_0} (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q \quad (13.14)$$

La séparation de la source de dissipation spécifique en parties intrinsèque et extrinsèque (voir (12.77) et (12.79)) permet de reformuler la relation précédente comme suit :

$$\dot{s}T = d_1 - \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + \dot{u} \quad (13.15)$$

Aussi, en exprimant le taux de variation d'énergie interne à partir de la forme locale du premier principe (8.27a), l'équation précédente devient :

$$\dot{s}T = d_1 + r_q - \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{J}_q \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \quad (13.16)$$

La combinaison des équations (13.13) et (13.16) permet d'obtenir la forme matérielle de l'équation de la chaleur pour un système fermé :

$$c_v \dot{T} = r_c + d_1 + r_q - \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{J}_q \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \quad (13.17)$$

La source de chaleur spécifique r_c , qui intervient dans l'équation précédente, est le résultat des couplages entre la température et la déformation ainsi que les variables internes :

$$r_c = T \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} + T \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial T \partial x_i} \dot{x}_i \quad (13.18)$$

$$= \varrho_0 T \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_e}{\partial T} : \dot{\mathbf{E}} + T \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial T} \dot{x}_i \quad (13.19)$$

La forme spatiale de l'équation de diffusion de la chaleur, strictement équivalente à la forme matérielle, est donnée par :

$$c_v \dot{T} = r_c + d_1 + r_q - \frac{1}{\varrho} \mathbf{j}_q \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \quad (13.20)$$

avec :

$$r_c = \varrho T \frac{\partial \sigma_e}{\partial T} : \mathbf{d} + T \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial T} \dot{x}_i \quad (13.21)$$

Pour un système fermé, l'équation de la chaleur montre que l'évolution de la température est contrôlée par les transferts de chaleur, les transformations irréversibles à l'origine des phénomènes dissipatifs et les couplages entre la température et les autres variables d'état.

13.2 Conditions aux limites

La résolution de l'équation de diffusion de la chaleur nécessite de préciser les conditions aux limites qui s'appliquent à la frontière du système considéré. Ces conditions aux limites, pour qu'elles soient pertinentes, doivent représenter correctement les transferts de chaleur qui ont lieu au travers de la surface externe du système. Il convient donc de détailler, en fonction des mécanismes de transfert considérés, les stratégies couramment employées pour définir ces conditions aux limites.

13.2.1 Réservoir de température

Le premier type de conditions aux limites, dites de Dirichlet, consiste à imposer la température sur tout ou partie de la frontière du système considéré. Les points matériels associés à cette partie de la frontière, représentée par une surface notée \mathcal{S}^d ou \mathcal{S}_0^d selon la configuration considérée (voir Figure 13.1), vérifient donc les conditions :

$$T(\mathbf{x}, t) = T_0(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}^d \quad (13.22)$$

$$T(\mathbf{X}, t) = T_0(\mathbf{X}, t), \forall \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0^d \quad (13.23)$$

Les conditions précédentes correspondent au cas où le système étudié est en contact avec un réservoir de température. Un réservoir de température

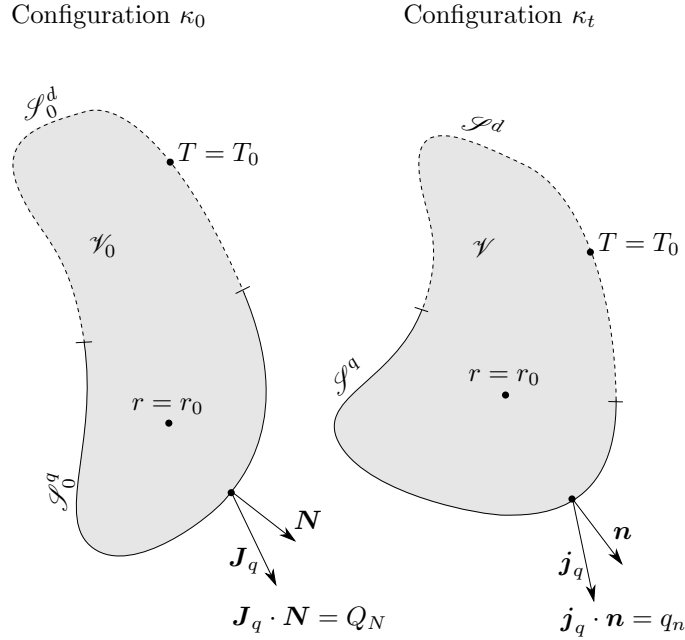


Figure 13.1: Représentation schématique des différents types de conditions aux limites applicables à un système pour la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur. La distinction entre la configuration initiale (gauche) et la configuration actuelle (droite) est faite.

représente un système (différent de celui étudié) dont la capacité thermique est suffisamment grande pour que, même s'il échange de l'énergie, sa température reste constante (égale à T_0).

13.2.2 Convection et rayonnement

Une proposition alternative consiste à fixer la densité de flux de chaleur au travers de certains des éléments de surface de la frontière du système considéré. Cela revient à écrire que, pour tous les points situés sur une partie \mathcal{S}^q ou \mathcal{S}_0^q de la frontière externe :

$$\mathbf{j}_q(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q_n(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}^q \quad (13.24)$$

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{X}, t) = Q_n(\mathbf{X}, t), \forall \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0^q \quad (13.25)$$

où \mathbf{n} et \mathbf{N} définissent la normale unitaire à la frontière du système, qui, par convention, pointe vers l'extérieur (voir Figure 13.1). Les valeurs q_n et Q_n représentent la densité surfacique de puissance transférée au travers de la frontière. Cette densité de puissance est la résultante des contributions de la convection, du rayonnement et des éventuels transferts de masse. On peut donc écrire que¹ :

$$q_n = \underbrace{q_c + q_r}_{\tilde{q}_n} + q_m \quad (13.26)$$

$$Q_n = \underbrace{Q_c + Q_r}_{\tilde{Q}_n} + Q_m \quad (13.27)$$

Dans l'équation précédente, les contributions de la convection et du rayonnement sont repérées par les quantités utilisant les indices c et r . Ces deux contributions peuvent être réunies au sein d'une densité surfacique de flux de chaleur (notée \tilde{q}_n ou \tilde{Q}_n) qui ne dépend pas de la nature ouverte ou fermée du système considéré. L'éventuelle contribution des transferts de masse, qui n'existe que pour un système ouvert, est associée aux densités surfaciques de flux de chaleur utilisant l'indice m .

Remarque Lorsque la densité surfacique de flux de chaleur est une fonction linéaire et isotrope du gradient du champ de température, les conditions aux limites définies par les équations (13.24) et (13.25) correspondent à des conditions dites de Neumann. En effet, dans ce cas particulier (mais courant), spécifier la densité surfacique de flux de chaleur sur le bord revient à imposer une valeur au gradient du champ de température.

La convection désigne l'ensemble des transferts thermiques entre un système et l'éventuel environnement fluide (i.e. gaz ou liquide). Pour représenter les transferts thermiques par convection, il est possible d'introduire un coefficient d'échange, noté h ou H , qui est homogène à une densité surfacique de puissance par unité de température. Le coefficient d'échange permet de calculer la contribution q_c de la convection au flux de chaleur comme suit:

$$q_c = h (T - T_f) \quad (13.28)$$

$$Q_c = H (T - T_f) \quad (13.29)$$

¹Dans un souci de concision, on omet la dépendance par rapport au temps et à la position dans ce qui suit.

où T_f désigne la température du fluide environnant. Les coefficients d'échange h et H , qui correspondent aux configurations actuelle et initiale, sont liés par:

$$H = J \|\mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{N}\| h \quad (13.30)$$

Le rayonnement est un mode de transfert d'énergie qui correspond à l'émission ou l'absorption de photons vers ou depuis un environnement à la température absolue T_e . La contribution du rayonnement à la densité de puissance surfacique s'exprime à partir de la température comme suit :

$$q_r = z (T^4 - T_e^4) \quad (13.31)$$

$$Q_r = Z (T^4 - T_e^4) \quad (13.32)$$

où la grandeur scalaire notée z ou Z selon la configuration considérée est le coefficient de rayonnement². De manière analogue à ce qui a été établi pour le coefficient d'échange, les coefficients de rayonnement z et Z sont reliés par:

$$Z = J \|\mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{N}\| z \quad (13.33)$$

La contribution des transferts de masse correspond à l'échange d'énergie résultant de l'échange de matière au travers de la frontière externe du système. Pour un point matériel situé à la frontière d'un système ouvert, cette contribution est donnée par :

$$q_m = u \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{n} \quad (13.34)$$

$$Q_m = u \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{N} \quad (13.35)$$

Pour le cas particulier d'un système fermé, la contribution des transferts de masse à la densité surfacique de flux de chaleur est nulle (i.e. $q_m = Q_m = 0$).

13.2.3 Sources volumiques de chaleur

Pour la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur, il est également nécessaire de préciser le champ de puissance spécifique r_q qui représente les sources de chaleur volumiques :

$$r_q(\mathbf{x}, t) = r_0(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \quad (13.36a)$$

$$r_q(\mathbf{X}, t) = r_0(\mathbf{X}, t), \forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \quad (13.36b)$$

²Le coefficient de rayonnement est égal au produit de l'émissivité, dont la valeur maximale est l'unité, par le constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

La source de chaleur r_0 est la valeur imposée à tous les points matériels situés à l'intérieur du système considéré. Elle peut par exemple représenter un apport de chaleur par effet Joule.

13.3 Loi de Fourier

Le principal mode de transfert de chaleur à l'intérieur d'un solide est la conduction thermique. La conduction thermique est un phénomène irréversible qui est à l'origine de la dissipation thermique. L'expression de la source de dissipation extrinsèque, établie au 9.3, montre que la force thermodynamique qui motive les transferts par conduction est le gradient du logarithme de la température. Pour décrire l'évolution d'un système thermomécanique, il convient de relier ces deux grandeurs par une relation de comportement. Pour de nombreux matériaux, cette relation de comportement prend la forme de la loi de Fourier présentée dans ce qui suit.

Si on se place dans le cadre des matériaux standards et que l'hypothèse de découplage des dissipations est adoptée (voir 12.4.5), il est possible de séparer le potentiel de dissipation φ en parties intrinsèque φ_1 et extrinsèque φ_2 de sorte que :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (13.37)$$

Si la partie intrinsèque contient la contribution de la contrainte visqueuse et des forces thermodynamiques associées aux différentes variables internes, les contributions des transferts de masse et de chaleur au potentiel de dissipation sont intégrées à la partie extrinsèque. La densité surfacique de flux de chaleur est alors donnée par :

$$\tilde{\mathbf{J}}_q = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T)} \quad (13.38)$$

Une approche possible consiste à définir la partie extrinsèque du potentiel de dissipation comme la somme de deux contributions quadratiques associées respectivement aux transferts de chaleur et aux transferts de masse :

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{1}{2T} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T)}{\varrho_0} \cdot \mathbf{L}_{qq} \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T)}{\varrho_0} \\ & + \frac{T}{2} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T)}{\varrho_0} \cdot \mathbf{L}_{mm} \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T)}{\varrho_0} \end{aligned} \quad (13.39)$$

où \mathbf{L}_{qq} et \mathbf{L}_{mm} sont les tenseurs qui contiennent les coefficients cinétiques caractérisant respectivement les transferts de chaleur et de masse. Ces tenseurs sont nécessairement semi-définis positifs, ce qui garantit le respect du second principe de la thermodynamique. Aussi, en vertu des relations de réciprocité d'Onsager, ces tenseurs sont également symétriques.

Remarque La partie extrinsèque du potentiel de dissipation peut également faire intervenir des termes croisés qui couplent le gradient du logarithme de la température et le gradient du rapport entre le potentiel chimique et la température. Une généralisation possible de l'expression (13.39) est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{1}{2T} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T)}{\varrho_0} \cdot \mathbf{L}_{qq} \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T)}{\varrho_0} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T)}{\varrho_0} \cdot \mathbf{L}_{qm} \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T)}{\varrho_0} \\ & + \frac{T}{2} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T)}{\varrho_0} \cdot \mathbf{L}_{mm} \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(\mu/T)}{\varrho_0} \end{aligned}$$

Les termes croisés, qui font intervenir le tenseur symétrique \mathbf{L}_{qm} , permettent de considérer des phénomènes tels que l'effet Dufour, qui induit une dépendance de la densité surfacique de flux de chaleur vis-à-vis d'un gradient de masse volumique, ou l'effet Soret, qui inclut une dépendance du flux de masse par rapport au gradient de température.

On déduit de la relation précédente que la relation de comportement qui fournit la densité surfacique de flux de chaleur est :

$$\tilde{\mathbf{J}}_q = -\frac{\mathbf{L}_{qq}}{\varrho_0 T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) \quad (13.40)$$

$$= -\frac{\mathbf{L}_{qq}}{\varrho_0 T^2} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (13.41)$$

Cette dernière relation montre que la densité surfacique de flux de chaleur est une fonction linéaire du gradient de température. Il est commode de regrouper les termes en facteur devant le gradient de la température dans la relation précédente pour définir le tenseur de conductivité thermique \mathbf{K} tel que :

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{L}_{qq}}{\varrho_0 T^2} \quad (13.42)$$

Il convient de remarquer que, selon la définition précédente, le tenseur de conductivité thermique \mathbf{K} hérite des propriétés du tenseur \mathbf{L}_{qq} , à savoir la

symétrie et le caractère semi-défini positif. Aussi, le tenseur de conductivité thermique permet de reformuler la relation de comportement (13.41) dans sa forme courante :

$$\tilde{\mathbf{J}}_q = -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (13.43)$$

Cette dernière relation, qui relie la densité surfacique de flux de chaleur, est connue sous le nom de loi de Fourier. Cette loi est en fait un modèle de comportement thermique particulier qui suppose que le flux de chaleur dépend linéairement du gradient de température.

Remarque La loi de Fourier peut être obtenue de manière équivalente à partir du potentiel de dissipation ϕ , dual du potentiel φ . En particulier, l'hypothèse de découplage des dissipations conduit à la séparation :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

De la partie extrinsèque du potentiel de dissipation ϕ_2 , qui contient la contribution des transferts thermiques, on déduit la relation d'évolution associée à la densité de flux de chaleur par :

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) = -\varrho_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{\mathbf{J}}_q}$$

Le potentiel de dissipation ϕ_2 se déduit de son homologue φ_2 par transformation de Legendre-Fenchel, ce qui conduit à :

$$\phi_2 = \frac{T}{2} \tilde{\mathbf{J}}_q \cdot \mathbf{M}_{qq} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q + \frac{T}{2} \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{M}_{mm} \cdot \mathbf{J}_m$$

avec $\mathbf{M}_{qq} = \mathbf{L}_{qq}^{-1}$ et $\mathbf{M}_{mm} = \mathbf{L}_{mm}^{-1}$. À partir de la partie extrinsèque du potentiel de dissipation, on retrouve que la relation d'évolution associée à la densité de flux de chaleur correspond à la loi de Fourier puisque :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} T &= T \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) \\ &= -\varrho_0 T^2 \mathbf{M}_{qq} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \\ &= -\mathbf{K}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q \end{aligned}$$

Si la forme spatiale est préférée à la forme matérielle, la loi de Fourier devient :

$$\tilde{\mathbf{j}}_q = -\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (13.44)$$

Le tenseur de conductivité thermique \mathbf{k} est associé à la configuration actuelle. Il est relié à son homologue de la configuration initiale \mathbf{K} par :

$$\mathbf{k} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^t \quad (13.45)$$

Bien que cela n'apparaisse pas explicitement dans les relations précédentes, il est tout à fait possible d'introduire une dépendance des tenseurs de conductivité thermique vis-à-vis des variables d'état (e.g. température, masse volumique). Cet aspect est souvent nécessaire lorsque la conductivité varie significativement au cours d'un processus thermomécanique.

Chapitre 14

Thermoélasticité

Ce chapitre se concentre sur les matériaux solides pour lesquels le comportement est supposé thermoélastique. Pour ces matériaux, la réponse en déformation sous l'action d'une contrainte ou d'une variation de température est instantanée. Les déformations sont recouvrables et, sous réserve qu'il n'y ait pas de transferts thermiques par conduction, les transformations correspondantes sont réversibles. Les modèles de comportement développés dans le cadre de la thermoélasticité sont donc caractérisés par l'absence de contribution à la dissipation intrinsèque.

De manière générale, les lois de comportement thermoélastiques sont adaptées à des conditions de chargement pour lesquelles les contraintes appliquées restent suffisamment faibles pour que les mécanismes de déformation inélastique (e.g. plasticité, viscosité) et les phénomènes d'endommagement n'aient que peu d'influence sur le comportement.

Dans ce chapitre, on s'appuie largement sur les notions exposées aux chapitres précédents pour construire une loi de comportement thermoélastique. La première partie de ce chapitre se concentre sur la présentation des relations de comportement tandis que les restrictions que doivent satisfaire les propriétés de rigidité et de dilatation thermique sont évoquées dans la seconde partie. L'effet de la température sur ces propriétés est discuté dans la dernière partie de ce chapitre.

14.1 Hypothèses de modélisation

Lorsqu'on se restreint au cas des systèmes fermés, les lois de comportement développées dans le cadre de la thermoélasticité doivent traduire l'aspect réversible des transformations associées ainsi que le caractère recouvrable de la déformation qui en découle. L'aspect réversible n'est toutefois strictement vérifié qu'en l'absence de transfert de chaleur par conduction. En d'autres termes, les comportements thermoélastiques n'engendrent pas de dissipation intrinsèque (i.e. $d_1 = 0$) mais peuvent contribuer à la dissipation extrinsèque (i.e. $d_2 \geq 0$).

L'absence de dissipation intrinsèque a deux conséquences importantes sur la démarche de modélisation adoptée dans le cadre de la thermoélasticité. D'abord, il n'est nul besoin d'introduire des variables internes pour construire les relations de comportement. Cela traduit le fait que la microstructure locale associée à un point matériel reste inchangée au cours d'un trajet de déformation. Seules les variables d'état externes étant nécessaires à la description du comportement, le choix le plus naturel consiste à utiliser la température T et une mesure de déformation comme variables d'état observables. Suivant les recommandations du Chapitre 12, il est préférable de travailler avec une mesure de déformation lagrangienne (notée \mathbf{E}) pour contourner les difficultés liées au respect du principe d'indifférence matérielle. Quand les déformations restent faibles, le choix de la mesure de déformation retenue n'a pas de réelle importance dans la mesure où il affecte peu le comportement.

Ensuite, l'absence de dissipation intrinsèque implique qu'il n'existe pas de mode de déformation capable de produire une contrainte visqueuse. La contrainte visqueuse est donc nulle quel que soit le trajet thermomécanique considéré (i.e. $\Sigma_v = \mathbf{0}$). La mesure de contrainte lagrangienne Σ , variable duale de la mesure de déformation \mathbf{E} , est donc assimilable à sa seule partie élastique :

$$\Sigma = \Sigma_e \tag{14.1}$$

Dans le cadre de la thermoélasticité, on considère que les déformations produites lors d'un trajet de chargement sont de deux types. Les déformations élastiques (indice e) apparaissent lors de l'application d'un état de contrainte, leur origine est donc mécanique. Les déformations thermiques (indice th) ont une origine différente car elles sont le résultat des variations

de température. Il est possible de construire une loi de comportement thermoélastique en supposant une décomposition additive du tenseur des déformations \mathbf{E} pour faire apparaître les différentes contributions :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_{th} \quad (14.2)$$

Si les déformations de dilatation thermique dépendent exclusivement de la température, la partie élastique dépend de l'état de contrainte et éventuellement de la température. La dépendance éventuelle de la déformation élastique vis-à-vis de la température traduit le possible effet de la température sur les propriétés de rigidité. La prise en compte de cet effet est nécessaire dès lors qu'un processus implique des variations de température importantes. Il convient néanmoins de préciser que, quelle que soit la température, la déformation élastique s'annule en l'absence de contrainte appliquée.

14.2 Relations de comportement

Si on adopte le cadre des matériaux standards généralisés, la définition d'un modèle de comportement nécessite de définir un potentiel d'état et un potentiel de dissipation. Puisque les variables d'état sont une mesure de l'état de déformation et la température absolue, il est naturel de choisir l'énergie libre spécifique a comme potentiel d'état. Pour construire les relations d'état, il convient de préciser la dépendance de cette dernière vis-à-vis du tenseur des déformations \mathbf{E} et de la température T . Une écriture simple de l'énergie libre spécifique consiste à adopter la forme suivante :

$$a = \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}_{th} - \int_{T_0}^T \int_{T_0}^{\theta} \frac{\bar{c}_v(\eta)}{\eta} d\eta d\theta + a_0 - s_0(T - T_0) \quad (14.3)$$

où \mathbb{C} est le tenseur de rigidité, \bar{c}_v est la capacité thermique spécifique à déformation nulle et a_0 (respectivement s_0) est la valeur de l'énergie libre spécifique (respectivement entropie spécifique) en l'absence de déformation lorsque la température est égale à une valeur de référence T_0 . Aussi, sous réserve que le tenseur de rigidité \mathbb{C} soit défini positif, l'énergie libre est une fonction quadratique¹, donc strictement convexe, de l'état de déformation.

¹L'utilisation d'une forme linéaire pour le potentiel d'état est exclue dans la mesure où elle conduirait à un état de contrainte qui serait indépendant de l'état de déformation.

Enfin, la positivité de \bar{c}_v est nécessaire pour garantir la concavité de a vis-à-vis de la température.

Il est possible d'évaluer la partie thermique de la déformation à partir du tenseur de dilatation thermique $\bar{\alpha}$ en utilisant la relation :

$$\mathbf{E}_{th} = \int_{T_0}^T \bar{\alpha}(\theta) d\theta \quad (14.4)$$

Quelle que soit la mesure de déformation utilisée (e.g. Green-Lagrange, Biot, Hencky), le tenseur de dilatation thermique $\bar{\alpha}$ est un tenseur d'ordre deux symétrique. La relation précédente suppose que la contribution de la dilatation thermique est nulle dès lors que la température est égale à sa valeur de référence. Comme discuté dans ce qui suit (voir 14.3), le tenseur $\bar{\alpha}$ représente le tenseur de dilatation thermique à contrainte nulle.

Suivant l'approche décrite au 12.4.6, la dérivation de l'énergie libre spécifique par rapport au tenseur des déformations fournit l'état de contrainte :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (14.5)$$

$$= \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{th}) = \mathbb{C} : \mathbf{E}_e \quad (14.6)$$

Ensuite, la relation d'état qui fournit l'entropie spécifique est donnée par la dérivation de l'énergie libre spécifique par rapport à la température :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (14.7)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E} + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{E} : \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E}_{th} + \mathbb{C} : \bar{\alpha} \right) \\ &+ \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + s_0 \end{aligned} \quad (14.8)$$

En combinant la relation d'état précédente avec celle qui donne l'énergie libre spécifique, on obtient que l'énergie interne spécifique d'un point matériel régulier s'écrit :

$$u = a + sT \quad (14.9)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E} : \left(\mathbb{C} - T \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} \right) : \mathbf{E} + \int_{T_0}^T \bar{c}_v(\theta) d\theta + u_0 \\ &+ \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{E} : \left(\left(T \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} - \mathbb{C} \right) : \mathbf{E}_{th} + T \mathbb{C} : \bar{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (14.10)$$

où $u_0 = a_0 + s_0 T_0$ est l'énergie interne spécifique obtenue pour la température de référence en l'absence de déformation.

Remarque Dans le cadre de la thermoélasticité, les contraintes associées à une température et à un état de déformation peuvent avoir une origine aussi bien énergétique qu'entropique. Il est en effet possible de décomposer le tenseur des contraintes en parties énergétique Σ_u et entropique Σ_s en remarquant que :

$$\Sigma = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} = \varrho_0 \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{E}}}_{\Sigma_u} - \varrho_0 \underbrace{\frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}}}_{\Sigma_s} T$$

Dans le cas présent, la relation d'état (14.8) montre que la dépendance de l'entropie spécifique vis-à-vis de la déformation, donc la contrainte entropique, est le seul résultat du couplage thermoélastique, i.e. l'effet de la température sur les propriétés de rigidité et la dilatation thermique. Cette contribution, en particulier à basse température, est généralement faible. On peut d'ailleurs remarquer que, du fait des restrictions induites par le troisième principe de la thermodynamique (voir 10.2.2), la contribution entropique s'annule au zéro absolu. Par opposition, la contrainte énergétique se manifeste même en l'absence de couplage thermomécanique, i.e. la seule application d'un état de déformation suffit à générer un état de contrainte, quelle que soit la température. Le modèle de comportement présenté ici est donc un modèle thermoélastique pour lequel les contraintes ont une origine plutôt énergétique qu'entropique au sens où :

$$\|\Sigma_u\| > \|\Sigma_s\|$$

Ce modèle de comportement thermoélastique est particulièrement adapté aux matériaux métalliques et céramiques pour lesquels les contraintes ont une origine essentiellement énergétique. Ce modèle n'est toutefois pas approprié pour les matériaux pour la contribution entropique est importante, en particulier les élastomères.

Du fait de l'absence de contrainte visqueuse et puisque aucune variable interne n'est utilisée, la source de dissipation spécifique se résume à la contribution des transferts de chaleur :

$$d = -\frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q \quad (14.11)$$

La relation précédente souligne que, pour le modèle de comportement thermoélastique développé ici, la seule relation d'évolution nécessaire est

celle qui fournit la densité surfacique de flux de chaleur. Comme discuté au 13.3, si la loi de Fourier est adoptée, cela revient à choisir un potentiel de dissipation φ qui est une fonction quadratique du gradient du logarithme de la température :

$$\varphi = \frac{T}{2\varrho_0} \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) \quad (14.12)$$

où \mathbf{K} est le tenseur de conductivité thermique. La relation de comportement qui définit la densité surfacique de flux de chaleur est alors donnée par :

$$\mathbf{J}_q = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T)} \quad (14.13)$$

$$= -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (14.14)$$

14.3 Propriétés thermodynamiques

Suivant la définition présentée au Chapitre 10, le tenseur de dilatation thermique $\boldsymbol{\alpha}$ est donné par la dérivée du tenseur des déformations par rapport à la température pour un état de contrainte fixé, ce qui conduit à :

$$\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial T} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (14.15)$$

où \mathbb{S} est le tenseur de souplesse (avec $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$). La relation précédente montre que le tenseur de dilatation thermique $\boldsymbol{\alpha}$ n'est égal à $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ qu'en l'absence de contrainte appliquée ou lorsque les propriétés de souplesse (donc de rigidité) ne dépendent pas de la température. Le tenseur $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ est donc mesuré lors d'une expérience de dilatation réalisée sans contrainte appliquée.

Remarque Si le tenseur de dilatation thermique $\boldsymbol{\alpha}$ est un tenseur du second ordre symétrique comme son homologue à contrainte nulle $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, il convient de remarquer que les restrictions liées aux symétries matérielles ne sont pas nécessairement explicites dans le tenseur de dilatation $\boldsymbol{\alpha}$. En particulier, quand bien même les propriétés de dilatation thermique sont isotropes, le tenseur $\boldsymbol{\alpha}$, du fait de sa dépendance vis-à-vis de l'état de contrainte, n'est pas obligatoirement sphérique (i.e. un multiple du tenseur identité).

Le tenseur de rigidité isotherme \mathbb{C}_T est obtenu en dérivant l'état de contrainte par rapport à l'état de déformation pour une température fixée. La

relation d'état (14.6) montre ainsi que le tenseur de rigidité isotherme est simplement donné par :

$$\mathbb{C}_T = \mathbb{C} \quad (14.16)$$

Son homologue isentropique \mathbb{C}_s s'obtient à partir de :

$$\mathbb{C}_s = \mathbb{C} + \frac{T}{\varrho_0 c_v} \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} \text{ avec } \boldsymbol{\beta} = -\mathbb{C} : \boldsymbol{\alpha} \quad (14.17)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\beta}$ est le tenseur de pression thermique. Il décrit l'effet d'une variation de température sur l'état de contrainte.

Aussi, la capacité thermique spécifique à déformation constante c_v s'exprime :

$$c_v = \frac{T}{2\varrho_0} \mathbf{E} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial T^2} : \mathbf{E} + \frac{T}{\varrho_0} \mathbf{E} : \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \boldsymbol{\alpha} + \mathbb{C} : \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial T} \right) + \bar{c}_v \quad (14.18)$$

La capacité thermique spécifique à déformation constante c_v contient une contribution \bar{c}_v , qui correspond à sa valeur en l'absence de déformation appliquée, à laquelle s'ajoute une contribution supplémentaire induite par le couplage thermomécanique.

L'expression de la capacité thermique spécifique à contrainte constante c_p se déduit de la relation (10.25), ce qui conduit à :

$$c_p = \frac{T}{2\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \frac{\partial^2 \mathbb{S}}{\partial T^2} : \boldsymbol{\Sigma} + \frac{T}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial T} + \bar{c}_p \quad (14.19)$$

Dans un souci de concision, la relation précédente utilise la capacité thermique spécifique à contrainte nulle (notée \bar{c}_p) telle que :

$$\begin{aligned} \bar{c}_p &= \bar{c}_v + \frac{T}{2\varrho_0} \mathbf{E}_{th} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial T^2} : \mathbf{E}_{th} + \frac{T}{\varrho_0} \mathbf{E}_{th} : \left(\mathbb{C} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial T} + 2 \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right) \\ &+ \frac{T}{\varrho_0} \bar{\boldsymbol{\alpha}} : \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned} \quad (14.20)$$

La capacité thermique spécifique à contrainte nulle est intéressante en cela qu'elle correspond à celle obtenue par les expériences de calorimétrie qui sont généralement conduites en l'absence de contrainte appliquée.

14.4 Propriétés du tenseur de rigidité

Le tenseur \mathbb{C} , qui définit la rigidité d'un matériau à une température T donnée, est obtenu à partir de l'énergie libre spécifique par :

$$\mathbb{C} = \varrho_0 \frac{\partial^2 a}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (14.21)$$

La définition précédente montre que le tenseur \mathbb{C} est symétrique au sens où :

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \varrho_0 \frac{\partial^2 a}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \varrho_0 \frac{\partial^2 a}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = \mathbb{C}_{klij} \text{ (symétrie majeure)} \quad (14.22)$$

$$= \varrho_0 \frac{\partial^2 a}{\partial E_{ji} \partial E_{kl}} = \mathbb{C}_{jikl} \text{ (symétrie mineure)} \quad (14.23)$$

$$= \varrho_0 \frac{\partial^2 a}{\partial E_{ij} \partial E_{lk}} = \mathbb{C}_{ijlk} \text{ (symétrie mineure)} \quad (14.24)$$

Les conditions de symétrie précédentes indiquent que, dans le cas anisotrope le plus général, vingt-et-une constantes indépendantes sont nécessaires à la définition du tenseur de rigidité. Toutefois, comme cela a été discuté au 12.3, ce nombre peut être réduit en considérant les éventuelles symétries matérielles. Il est important de remarquer que le tenseur de souplesse \mathbb{S} , parce qu'il est défini comme étant l'inverse du tenseur de rigidité \mathbb{C} , dispose des mêmes propriétés (i.e. symétrique et défini positif) que ce dernier.

Dans le cas courant où les propriétés de rigidité sont isotropes, les tenseurs de rigidité \mathbb{C} et de souplesse \mathbb{S} sont construits à partir de deux constantes indépendantes. Par exemple, si on utilise le module d'élasticité isostatique B et le module de cisaillement G , ces tenseurs sont donnés par :

$$\mathbb{C} = 3B\mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G\mathbb{P}_{\text{dev}} \text{ et } \mathbb{S} = \frac{1}{3B}\mathbb{P}_{\text{sph}} + \frac{1}{2G}\mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (14.25)$$

Une écriture alternative du tenseur de rigidité consiste à utiliser le premier coefficient de Lamé λ , plutôt que le module d'élasticité isostatique, et le module de cisaillement G :

$$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\mathbb{I} \quad (14.26)$$

De manière semblable, lorsque les propriétés sont isotropes, le tenseur de souplesse est couramment construit à partir du module de Young E et du coefficient de Poisson ν avec :

$$\mathbb{S} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbb{I} - \frac{\nu}{E} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (14.27)$$

14.5. PROPRIÉTÉS DU TENSEUR DE DILATATION THERMIQUE 231

Propriétés	B	G	λ	E	ν
B et G	B	G	$B - \frac{2G}{3}$	$\frac{9BG}{3B+G}$	$\frac{3B-2G}{6B+2G}$
λ et G	$\lambda + \frac{2G}{3}$	G	λ	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$
E et ν	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	E	ν

Tableau 14.1: Relations entre les grandeurs utilisées pour définir les propriétés de rigidité et de souplesse d'un matériau isotrope. B est le module d'élasticité isostatique, G est le module de cisaillement, λ est le premier coefficient de Lamé, E est le module de Young et ν est le coefficient de Poisson.

L'équivalence entre les relations précédentes est garantie dès lors que les propriétés précédentes sont liées les unes aux autres par les relations listées dans le Tableau 14.1.

Pour certaines applications, il est parfois nécessaire de mesurer le caractère anisotrope des propriétés de rigidité. À cette fin, il est possible d'utiliser le coefficient d'anisotropie A proposé par Kube (2016) dont l'expression générale est :

$$A = \sqrt{\ln((\mathbb{C} :: \mathbb{P}_{\text{sph}})(\mathbb{S} :: \mathbb{P}_{\text{sph}}))^2 + 5 \ln\left(\frac{(\mathbb{C} :: \mathbb{P}_{\text{dev}})(\mathbb{S} :: \mathbb{P}_{\text{dev}})}{25}\right)^2} \quad (14.28)$$

Selon cette définition, le coefficient d'anisotropie est une grandeur sans dimension positive dont la valeur est d'autant plus élevée que les propriétés de rigidité sont anisotropes. Dans le cas particulier où les propriétés sont isotropes, le coefficient d'anisotropie prend une valeur nulle.

14.5 Propriétés du tenseur de dilatation thermique

Le tenseur de dilatation thermique à contrainte nulle $\bar{\alpha}$ est un tenseur du second ordre qui caractérise le couplage thermomécanique. Puisqu'il permet

d'évaluer la partie thermique de la déformation, \mathbf{E}_{th} , on en déduit qu'il hérite des caractéristiques de symétrie de cette dernière à savoir :

$$\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$$

Dans le cas anisotrope général, le tenseur de dilatation thermique à contrainte nulle est donc défini à partir de six constantes indépendantes. Comme pour le tenseur de rigidité, ce nombre peut être réduit lorsque les symétries matérielles le permettent (voir 12.3). Dans le cas particulier de l'isotropie, le tenseur de dilatation thermique à contrainte nulle est construit avec une seule et unique constante $\bar{\alpha}$, appelée coefficient de dilatation thermique à contrainte nulle, à partir de :

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\alpha} \mathbf{1}$$

La relation précédente traduit le fait que, en l'absence de contrainte appliquée, la déformation d'origine thermique est indépendante de la direction considérée dans le cas isotrope.

14.6 Effet de la température sur les propriétés

La loi de comportement thermoélastique détaillée précédemment fait intervenir un certain nombre de propriétés qui dépendent possiblement de la température. Il convient donc de préciser comment traduire la dépendance à la température de ces différentes propriétés.

Remarque Pour les problèmes pour lesquels les variations de température sont limitées, il est raisonnable d'ignorer la dépendance des propriétés thermodynamiques vis-à-vis de la température, voire de négliger la déformation d'origine thermique.

L'effet de la température sur la capacité thermique à contrainte nulle \bar{c}_p peut être décrit par la somme de deux termes :

$$\bar{c}_p = C_\infty \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \int_0^{T_d/T} \frac{\theta^4 \exp \theta}{(\exp \theta - 1)^2} d\theta + \sum_{j>1} C_j T^j \quad (14.29)$$

Le premier terme, qui correspond à la contribution des phonons à la capacité thermique, est évalué à partir du modèle de Debye (1912). Il fait intervenir

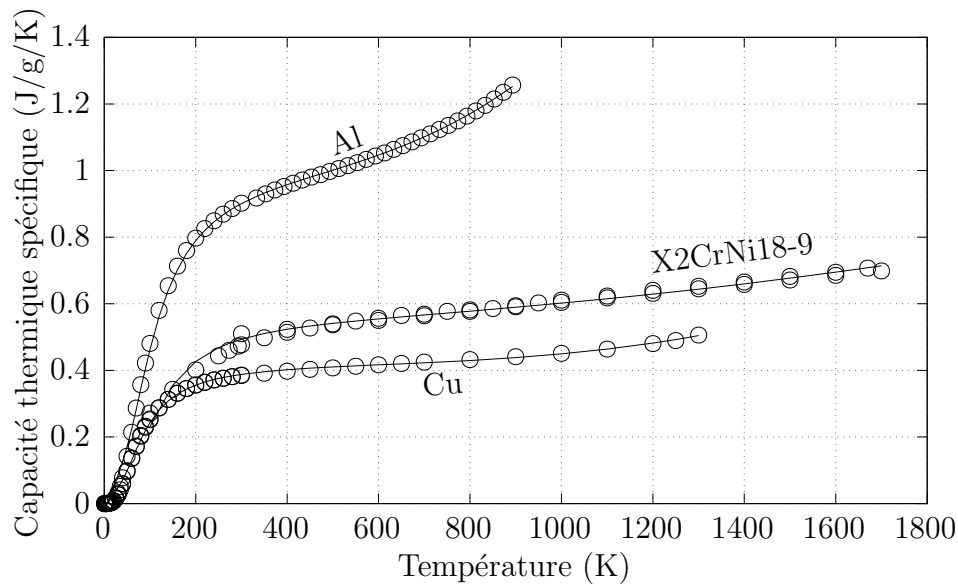


Figure 14.1: Effet de la température sur la capacité thermique spécifique à contrainte nulle de quelques matériaux. Les données expérimentales (extraites de (Brooks and Bingham, 1968), (Kim, 1975), (Touloukian and Ho, 1977) et (White and Collocott, 1984)) sont représentées par les points tandis que les courbes en trait continu correspondent à l'équation (14.29).

deux paramètres propres à chaque matériau : la température de Debye T_d et la valeur asymptotique de cette première contribution C_∞ ². Le second terme fait intervenir une fonction polynomiale qui inclut la contribution des électrons libres ainsi que les éventuels écarts au modèle de Debye. Le paramètre qui contrôle le terme d'ordre j est noté C_j pour cette contribution. Si l'ordre de ce polynôme peut être aussi élevé que nécessaire, il convient de remarquer que, pour satisfaire au troisième principe de la thermodynamique, la fonction polynomiale est nulle au zéro absolu, i.e. elle ne comprend pas de terme d'ordre zéro. À titre illustratif, l'effet de la température sur la capacité thermique spécifique de quelques matériaux est présenté sur la Figure 14.1.

Le tenseur de dilatation thermique à contrainte nulle est un tenseur du second ordre symétrique. Comme discuté au 12.3, ce tenseur peut être construit à partir d'un ensemble de coefficients indépendants dont le nombre

²Selon le modèle de Debye, la valeur asymptotique C_∞ de la capacité thermique est donnée par $C_\infty = 3R/M$ où R est la constante des gaz parfaits et M est la masse molaire.

dépend des caractéristiques de symétrie du matériau considéré (jusqu'à six au maximum). Pour considérer l'effet de la température pour chacun des coefficients (notés $\bar{\alpha}_i$) qui définissent le tenseur de dilatation thermique, il est possible d'utiliser une relation semblable à celle utilisée pour la capacité thermique spécifique :

$$\bar{\alpha}_i = A_{i\infty} \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \int_0^{T_d/T} \frac{\theta^4 \exp \theta}{(\exp \theta - 1)^2} d\theta + \sum_{j>1} A_{ij} T^j \quad (14.30)$$

où $A_{i\infty}$, T_d et les coefficients A_{ij} sont des paramètres propres à chaque matériau. Si la relation (14.30) ne constitue pas la seule possibilité pour décrire l'effet de la température sur les propriétés de dilatation thermique, elle a l'avantage d'être compatible avec le troisième principe de la thermodynamique, en particulier la restriction (10.37) dans la mesure où les coefficients de dilatation thermique s'annulent lorsque la température absolue atteint zéro. L'évolution du coefficient de dilatation thermique en fonction de la température est illustrée sur la Figure 14.2 pour différents matériaux.

Les propriétés de rigidité des matériaux dépendent largement de la température. Pour chacun des coefficients indépendants C_{ij} nécessaires à la construction du tenseur de rigidité (vingt-et-un au maximum), il est possible de décrire l'effet de la température par la relation proposée par [Varshni \(1970\)](#) :

$$C_{ij} = C_{ij0} \left(1 - \frac{Z_{ij} T_e}{\exp(T_e/T) - 1} \right) \quad (14.31)$$

Une approche alternative consiste à utiliser l'expression proposée par [Wachtman et al. \(1961\)](#) :

$$C_{ij} = C_{ij0} \left(1 - Z_{ij} T \exp \left(-\frac{T_e}{T} \right) \right) \quad (14.32)$$

Dans les relations précédentes, C_{ij0} est la valeur de la propriété de rigidité C_{ij} au zéro absolu, T_e est une température caractéristique et Z_{ij} contrôle la dérivée de C_{ij} lorsque la température tend vers l'infini. Ces relations sont compatibles avec le troisième principe de la thermodynamique au sens où la dérivée d'une propriété de rigidité par rapport à la température est nulle au zéro absolu. Il convient également de remarquer que ces deux relations supposent que l'effet de la température sur les propriétés de rigidité est décrit par une relation affine à haute température (i.e. $T \gg T_e$). Afin de montrer l'effet de la température sur les propriétés de rigidité, l'évolution du module

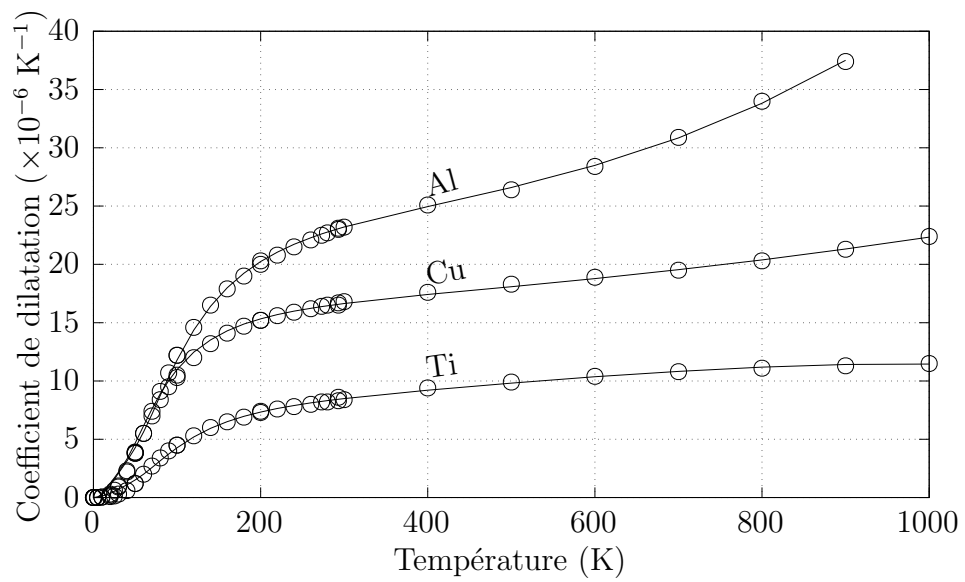


Figure 14.2: Effet de la température sur le coefficient de dilatation à contrainte nulle de quelques matériaux. Les données expérimentales (extraites de (Johnson, 1960) et (Touloukian et al., 1975)) sont représentées par les points tandis que les courbes en trait continu correspondent à l'équation (14.30).

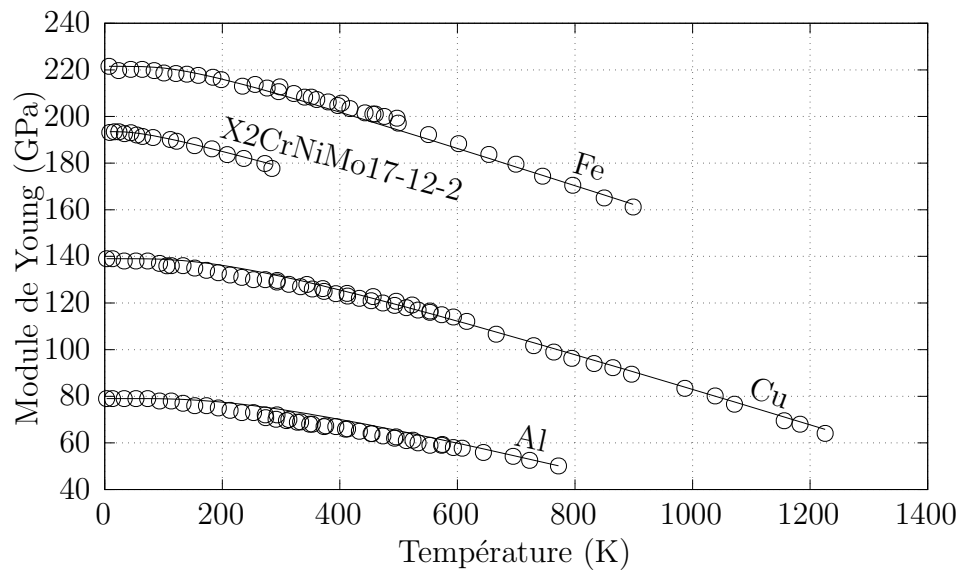


Figure 14.3: Effet de la température sur le module de Young isotherme de quelques matériaux. Les données expérimentales (extraites de (Köster, 1948a), (Köster, 1948b), (Ledbetter, 1982), (Zhang et al., 1991), (Adams et al., 2006) et (Isaak and Masuda, 1995)) sont représentées par les points tandis que les courbes en trait continu correspondent à l'équation (14.32).

de Young en fonction de la température est représentée sur la Figure 14.3 pour différents matériaux.

Enfin, pour de nombreux matériaux, en particulier les métaux purs, l'effet de la température sur la conductivité thermique peut être raisonnablement représenté par la relation suivante :

$$K = \left(\frac{1}{K_p} + \frac{1}{K_d} + \kappa_7 \frac{1}{K_d + K_p} \right)^{-1} \quad (14.33)$$

L'équation précédente comprend une contribution K_d (respectivement K_p) due aux interactions entre électrons et défauts (respectivement entre électrons et phonons). Ces deux contributions sont décrites par :

$$K_d = \frac{T}{\kappa_0} \quad (14.34)$$

$$K_p = \frac{1 + \kappa_1 \kappa_3 T^{\kappa_2 + \kappa_4} \exp[-(\kappa_5/T)^{\kappa_6}]}{\kappa_1 T^{\kappa_2}} \quad (14.35)$$

où les coefficients κ_i (avec i variant de 0 à 7) sont des paramètres propres à chaque matériau. Une option alternative pour représenter l'effet de la température consiste à utiliser la relation :

$$K = \exp \left[- \left(\frac{T}{\kappa_5} \right)^{\kappa_6} \right] \kappa_1 T^{\kappa_2} + \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{T}{\kappa_5} \right)^{\kappa_6} \right] \right) \kappa_3 T^{\kappa_4} \quad (14.36)$$

L'expression précédente suppose que l'impact de la température sur la conductivité thermique est la somme pondérée de deux fonctions puissance. Tandis que la première contrôle la conductivité à basse température (i.e. $T < \kappa_5$), la seconde est associée au comportement à haute température (i.e. $T > \kappa_5$). À titre illustratif, l'effet de la température sur la conductivité thermique de différents matériaux est présenté sur la Figure 14.4.

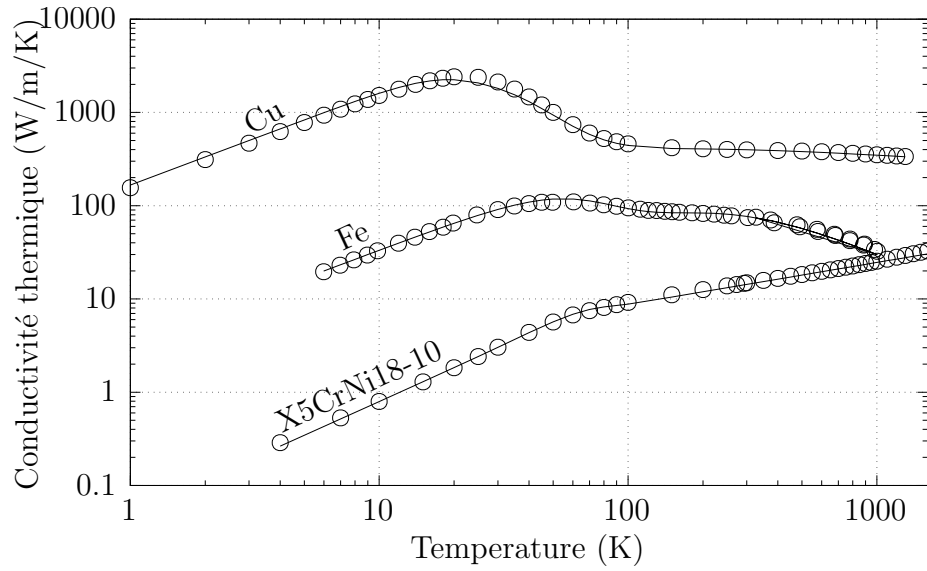


Figure 14.4: Effet de la température sur le coefficient de conductivité thermique de quelques matériaux. Les données expérimentales (extraites de (Godfrey et al., 1964), (Hust, 1969), (Touloukian and Ho, 1977) et (Hust, 1984)) sont représentées par les points tandis que les courbes en trait continu correspondent à l'équation (14.33) (cuivre et fer) ou à l'équation (14.36) (acier inoxydable X5CrNi18-10).

Chapitre 15

Viscoélasticité linéaire

Les matériaux viscoélastiques ont un comportement qui se situe entre celui des solides élastiques et celui des fluides visqueux. Ils empruntent aux premiers la dépendance de l'état de contrainte vis-à-vis de la déformation et aux seconds l'effet de la vitesse de déformation sur l'état de contrainte. Aussi, bien que les comportements viscoélastiques correspondent à des transformations irréversibles (donc accompagnées de phénomènes dissipatifs), les déformations viscoélastiques peuvent être aussi bien recouvrables que permanentes.

Dans ce chapitre, les possibilités de modélisation du comportement des solides viscoélastiques sont abordées, en se restreignant au cas particulier de la viscoélasticité linéaire. À cette fin, quelques notions relatives aux méthodes expérimentales utilisées pour caractériser le comportement viscoélastique des matériaux sont d'abord présentées. Le principe de superposition de Boltzmann et le principe d'équivalence temps-température, qui sont d'une grande utilité dans une démarche de modélisation d'un matériau viscoélastique, sont ensuite détaillés. Enfin, les modèles viscoélastiques peuvent être construits en assemblant des briques rhéologiques élémentaires. Quelques modèles viscoélastiques courants, issus de cette démarche rhéologique, sont présentés dans la dernière partie de ce chapitre.

15.1 Aspects expérimentaux

Afin d'étudier les comportements viscoélastiques, il est nécessaire d'observer l'évolution de la réponse mécanique d'un polymère au cours du temps lorsque celui-ci est soumis à un chargement extérieur. À cette fin, on utilise généralement des essais mécaniques simples, qui sont brièvement décrits aux paragraphes suivants.

15.1.1 Essais de fluage

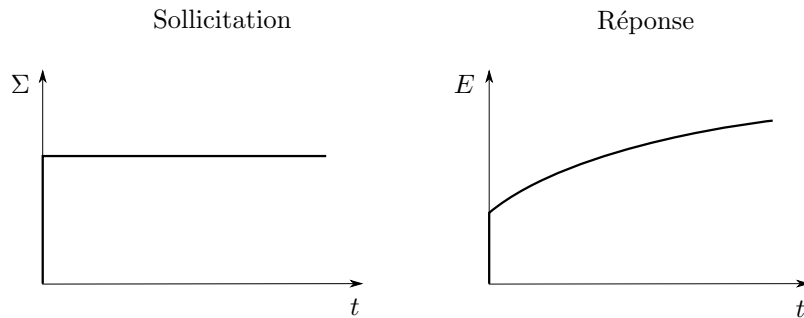


Figure 15.1: Principe d'un essai de fluage uniaxial. Une contrainte constante est imposée à une éprouvette et l'évolution au cours du temps de la déformation est mesurée.

L'essai de fluage (voir Figure 15.1) consiste à mesurer l'état de déformation \mathbf{E} dans une éprouvette à laquelle on impose un état de contrainte constant Σ_0 et une température T constante. L'état de contrainte lors d'un essai de fluage est donc de la forme :

$$\Sigma(t) = \Sigma_0 \times h(t) \quad (15.1)$$

où h est la fonction de Heaviside. Pour un matériau viscoélastique linéaire, l'état de déformation obtenu lors d'un essai de fluage est une fonction linéaire de l'état de contrainte. Il est alors possible de calculer à chaque instant t le tenseur des déformations à partir d'une fonction fluage \mathbb{J} telle que :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbb{J}(T, t) : \Sigma(t) \quad (15.2)$$

Comme indiqué par la relation précédente, la fonction fluage est représentée par un tenseur d'ordre quatre homogène à une souplesse (i.e. l'inverse d'une pression). Ce dernier traduit le fait que, au cours d'un essai de fluage, chaque composante du tenseur des déformations dépend linéairement de chaque composante du tenseur des contraintes.

Remarque Dans le cas général, la détermination de la fonction fluage \mathbb{J} nécessite de réaliser au moins six essais indépendants. Pour chacun de ces essais, il faut mesurer les six composantes du tenseur des déformations pour en déduire les trente-six composantes du tenseur \mathbb{J} . Néanmoins, pour de nombreux matériaux viscoélastiques, il est légitime de supposer que les propriétés sont isotropes. Comme discuté au 12.3, avec une telle restriction, il est possible de définir la fonction tensorielle \mathbb{J} à partir de deux fonctions scalaires B_c et G_c telles que :

$$\mathbb{J}(T, t) = \frac{1}{3B_c(T, t)} \mathbb{P}_{\text{sph}} + \frac{1}{2G_c(T, t)} \mathbb{P}_{\text{dev}}$$

La fonction B_c (respectivement G_c) caractérise la partie sphérique (respectivement déviatorique) de la réponse en déformation obtenue lors d'un essai de fluage (l'indice c est utilisé en référence au terme anglais *creep* qui signifie fluage).

15.1.2 Essais de relaxation

L'essai de relaxation (voir Figure 15.2) est complémentaire de l'essai de fluage. Pour cet essai, réalisé à une température T fixée, on impose un état de déformation constant \mathbf{E}_0 à une éprouvette et l'évolution au cours du temps de l'état de contrainte est mesurée. L'histoire de déformation est donc donnée par une fonction de la forme :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \times h(t) \quad (15.3)$$

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, la réponse en contrainte obtenue lors d'un essai de relaxation peut être obtenue à partir d'une fonction relaxation. Dans un contexte multiaxial, cette fonction prend la forme d'un tenseur d'ordre quatre \mathbb{R} tel que :

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \mathbb{R}(T, t) : \mathbf{E}(t) \quad (15.4)$$

Le tenseur \mathbb{R} est homogène à une rigidité (i.e. une pression). Il convient de remarquer que, sauf cas particulier, la fonction relaxation n'est pas l'inverse de la fonction fluage (i.e. $\mathbb{R} \neq \mathbb{J}^{-1}$).

Remarque Dès lors que les propriétés viscoélastiques sont isotropes, la fonction tensorielle \mathbb{R} qui décrit la réponse au cours d'un essai de relaxation peut s'exprimer à partir de deux fonctions scalaires qui, par analogie avec le cas du fluage, sont désignées par B_r et G_r . Ces deux fonctions scalaire permettent de construire la fonction de relaxation \mathbb{R} à partir de :

$$\mathbb{R}(T, t) = 3B_r(T, t) \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G_r(T, t) \mathbb{P}_{\text{dev}}$$

La fonction B_r (respectivement G_r) correspond à la partie sphérique (respectivement déviatorique) de la réponse en contrainte obtenue lors d'un essai de relaxation. Il convient de préciser que, en règle générale, $B_r \neq B_c$ et $G_r \neq G_c$.

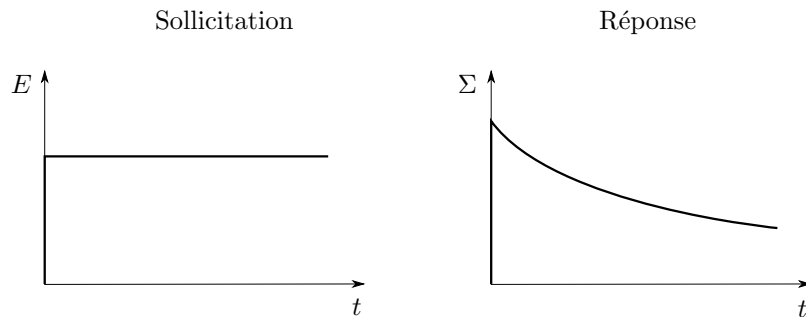


Figure 15.2: Principe d'un essai de relaxation uniaxial. Une déformation constante est imposée à une éprouvette et l'évolution au cours du temps de la contrainte est mesurée.

15.1.3 Analyse mécanique dynamique

L'analyse mécanique dynamique (DMA, voir Figure 15.3) consiste à caractériser le comportement d'un matériau sous une sollicitation périodique.

Il s'agit plus précisément d'imposer une déformation $\mathbf{E}(t)$ périodique et une température constante T de sorte que :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_a \sin(\omega t) \quad (15.5)$$

où \mathbf{E}_a et ω sont respectivement l'amplitude et la pulsation du signal de déformation. En régime permanent et dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, la contrainte Σ qui est nécessaire à la production de la déformation comprend une composante réversible Σ_r en phase avec la déformation et une composante irréversible Σ_{ir} en phase avec le taux de déformation, i.e. déphasée de 90° avec la déformation. La contrainte obtenue lors d'un essai DMA s'écrit donc comme suit :

$$\Sigma(t) = \underbrace{\mathbb{E}'(T, \omega) : \mathbf{E}_a \sin(\omega t)}_{\Sigma_r(t)} + \underbrace{\mathbb{E}''(T, \omega) : \mathbf{E}_a \cos(\omega t)}_{\Sigma_{ir}(t)} \quad (15.6)$$

Les tenseurs \mathbb{E}' et \mathbb{E}'' , qui dépendent à la fois de la température et de la pulsation, sont homogènes à une pression. Parce que la composante du signal de contrainte en phase avec la déformation est due à la partie élastique du comportement, \mathbb{E}' est usuellement appelé module de stockage (ou de conservation). À l'opposé, le déphasage de contrainte par rapport à la déformation est le résultat de la composante visqueuse du comportement. \mathbb{E}'' est donc habituellement appelé module de perte (ou de dissipation).

Pour comprendre la signification des tenseurs des modules de stockage \mathbb{E}' et de dissipation \mathbb{E}'' , il est instructif d'évaluer les conséquences énergétiques de la décomposition (15.6) de l'état de contrainte. En particulier, à chaque instant, la puissance de déformation spécifique p introduite au 7.4.3 s'exprime :

$$p = \frac{1}{\rho_0} \Sigma : \dot{\mathbf{E}}$$

En régime établi, le travail spécifique moyen par cycle (noté \bar{w}), qui correspond à la quantité d'énergie dépensée par unité de masse pour réaliser un cycle de déformation, est donné par :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \int_0^{t_0} p(t) dt \\ &= \frac{1}{\rho_0} \int_0^{t_0} \Sigma(t) : \dot{\mathbf{E}}(t) dt \end{aligned}$$

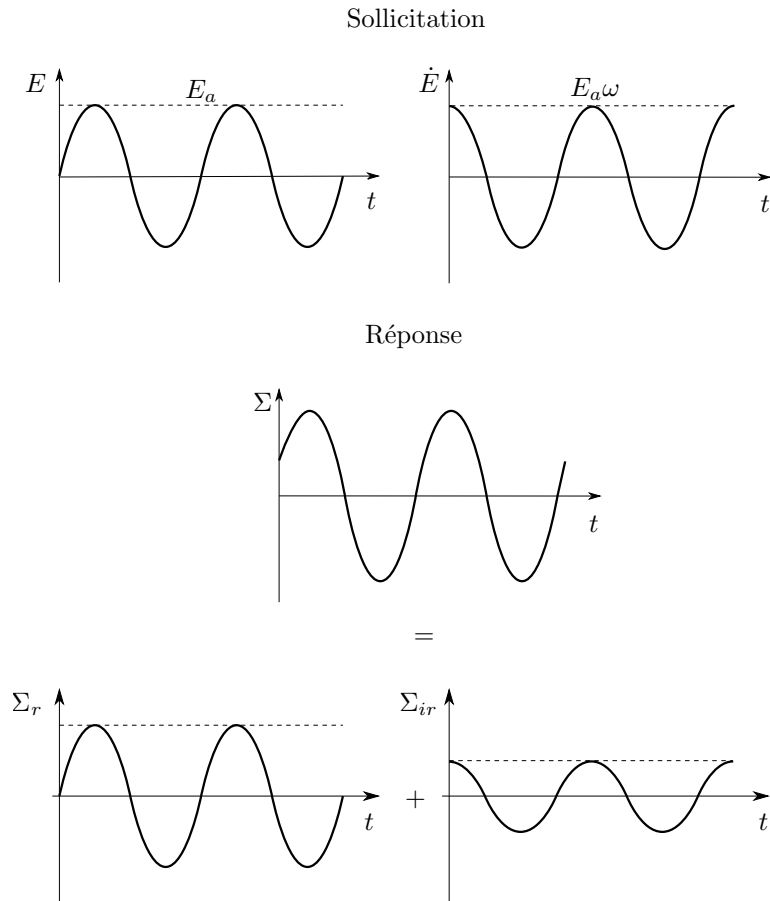


Figure 15.3: Principe de l'analyse mécanique dynamique (cas uniaxial). Une déformation périodique est imposée à une éprouvette et l'évolution au cours du temps de la contrainte est mesurée. Le signal de contrainte est ensuite décomposé en une partie réversible (en phase avec la déformation) et une partie irréversible (en phase avec le taux de déformation).

où $t_0 = 2\pi/\omega$ correspond à la période du signal de déformation imposé. La décomposition de la contrainte en parties réversible et irréversible permet de réaliser une décomposition similaire pour le travail spécifique moyen par cycle :

$$\bar{w} = \underbrace{\frac{1}{\varrho_0} \int_0^{t_0} \boldsymbol{\Sigma}_r(t) : \dot{\mathbf{E}}(t) dt}_{\bar{w}_r} + \underbrace{\frac{1}{\varrho_0} \int_0^{t_0} \boldsymbol{\Sigma}_{ir}(t) : \dot{\mathbf{E}}(t) dt}_{\bar{w}_{ir}}$$

En utilisant la définition du module de stockage, on obtient que la partie réversible du travail spécifique moyen par cycle est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{w}_r &= \frac{1}{\varrho_0} \int_0^{t_0} \mathbf{E}_a : \mathbb{E}'(T, \omega) : \mathbf{E}_a \sin(\omega t) \cos(\omega t) \omega dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le résultat précédent montre que la partie réversible du signal de contrainte ne contribue pas au travail spécifique moyen par cycle. Ce résultat est caractéristique d'un comportement élastique pour lequel la quantité d'énergie stockée n'évolue pas entre le début et la fin d'un cycle fermé. Pour une température et une pulsation donnée, le tenseur \mathbb{E}' mesure donc l'importance de l'élasticité dans le comportement d'un matériau viscoélastique.

De manière semblable, la partie irréversible du travail spécifique moyen par cycle peut être évaluée à partir du module de perte :

$$\begin{aligned} \bar{w}_{ir} &= \frac{1}{\varrho_0} \int_0^{t_0} \mathbf{E}_a : \mathbb{E}''(T, \omega) : \mathbf{E}_a \cos^2(\omega t) \omega dt \\ &= \frac{\pi}{\varrho_0} \mathbf{E}_a : \mathbb{E}''(T, \omega) : \mathbf{E}_a \end{aligned}$$

La partie irréversible du travail spécifique moyen par cycle est en fait la quantité d'énergie par unité de masse qui, à chaque cycle, est dissipée sous forme de chaleur. Cette dissipation d'énergie est associée à la partie visqueuse du comportement. Le tenseur \mathbb{E}'' renseigne donc sur l'importance de la partie visqueuse, donc de la dissipation d'énergie, dans le comportement viscoélastique.

15.2 Equivalence temps-température

D'un point de vue pratique, il est parfois nécessaire de pouvoir appréhender le comportement d'un matériau viscoélastique sur des temps longs. En ef-

fet, la durée de vie d'une structure excède souvent de plusieurs ordres de grandeurs la durée d'un essai de caractérisation. Il est donc *a priori* délicat d'extrapoler les résultats d'un essai de caractérisation aux conditions rencontrées en service. Le concept d'équivalence temps-température fournit une solution à ce problème. En effet, puisque les déformations viscoélastiques sont liées aux mouvements moléculaires, une élévation de la température produit un effet semblable à une augmentation de la durée d'essai (ou une réduction de la fréquence de sollicitation). Il est ainsi possible de formuler un principe d'équivalence temps-température sous la forme suivante :

$$\mathbb{J}(T, t) = \mathbb{J}(T_0, t_0) \quad (15.7)$$

$$\mathbb{R}(T, t) = \mathbb{R}(T_0, t_0) \quad (15.8)$$

$$\mathbb{E}'(T, \omega) = \mathbb{E}'(T_0, \omega_0) \quad (15.9)$$

$$\mathbb{E}''(T, \omega) = \mathbb{E}''(T_0, \omega_0) \quad (15.10)$$

avec :

$$t = a(T, T_0)t_0 \quad (15.11)$$

$$\omega_0 = a(T, T_0)\omega \quad (15.12)$$

Le facteur $a(T, T_0)$ introduit dans l'équation précédente est un facteur de glissement qui traduit l'équivalence entre une augmentation de la température et une contraction de l'échelle de temps. Le facteur de glissement est inférieur à l'unité si la température T est supérieure à la valeur de référence T_0 . Cela traduit le fait que le temps t nécessaire pour atteindre un certain état à la température T est plus court que celui requis (noté t_0) pour obtenir ce même état à la température de référence T_0 . À l'opposé, le facteur de glissement est supérieur à l'unité si la température T est plus faible la valeur de référence T_0 .

Lorsqu'on se situe au voisinage de la température de transition vitreuse T_g , l'évolution du facteur de glissement avec la température pour les matériaux polymères amorphes peut être évaluée avec la relation de Williams, Landel et Ferry ([Williams et al., 1955](#)). Cette relation, souvent appelée relation WLF, indique que :

$$\ln(a(T, T_0)) = -\frac{C_1^0(T - T_0)}{C_2^0 + T - T_0} \quad (15.13)$$

Les constantes C_1^0 et C_2^0 , qui interviennent dans la relation WLF, dépendent à la fois du polymère étudié et de la température de référence choisie. Si on

prend comme température de référence la température de transition vitreuse (i.e. $T_0 = T_g$), on observe généralement que, pour la plupart des polymères, les constantes C_1^0 et C_2^0 sont bornées par :

$$6 \leq C_1^0 \leq 25 \quad (15.14)$$

$$25^\circ\text{C} \leq C_2^0 \leq 80^\circ\text{C} \quad (15.15)$$

Comme le montre la Figure 15.4, le principe d'équivalence temps-température permet, à partir de données obtenues à différentes températures, de construire une courbe maîtresse à une température de référence T_0 . L'intérêt est alors de pouvoir accéder à des échelles de temps ou de fréquences qui sont difficilement accessibles expérimentalement à la température T_0 . Il convient néanmoins d'être prudent lors de la construction des courbes maîtresses. Il faut en particulier s'assurer que la microstructure reste stable sur les gammes de fréquence et de température considérées. Il faut par exemple faire attention lorsqu'un phénomène de cristallisation intervient à l'intérieur du domaine des températures observées.

15.3 Principe de superposition de Boltzmann

Le principe de superposition de Boltzmann permet d'évaluer la réponse d'un matériau viscoélastique linéaire à une histoire de chargement quelconque. Pour comprendre ce principe, il convient de remarquer que la variable de temps t dont dépendent les fonctions de fluage et de relaxation ne correspond pas à un temps absolu mais au temps écoulé depuis l'application d'un échelon de contrainte ou de déformation à un temps nul. Cette notion de temps écoulé est la base du principe de superposition de Boltzmann. Pour comprendre ce principe, on peut considérer un trajet de chargement particulier pour lequel l'histoire de contrainte imposée à un point matériel est décomposée en une somme de n échelons, chaque échelon correspondant à un incrément de contrainte $\Delta\Sigma_i$ s'appliquant à un instant t_i (avec i variant de 1 à n). Pour un tel chargement, l'état de contrainte est une fonction du temps de la forme :

$$\Sigma(t) = \sum_i^n h(t - t_i) \Delta\Sigma_i \quad (15.16)$$

Le principe de superposition de Boltzmann permet de construire la réponse en déformation à un tel trajet à partir de la fonction fluage en sommant les

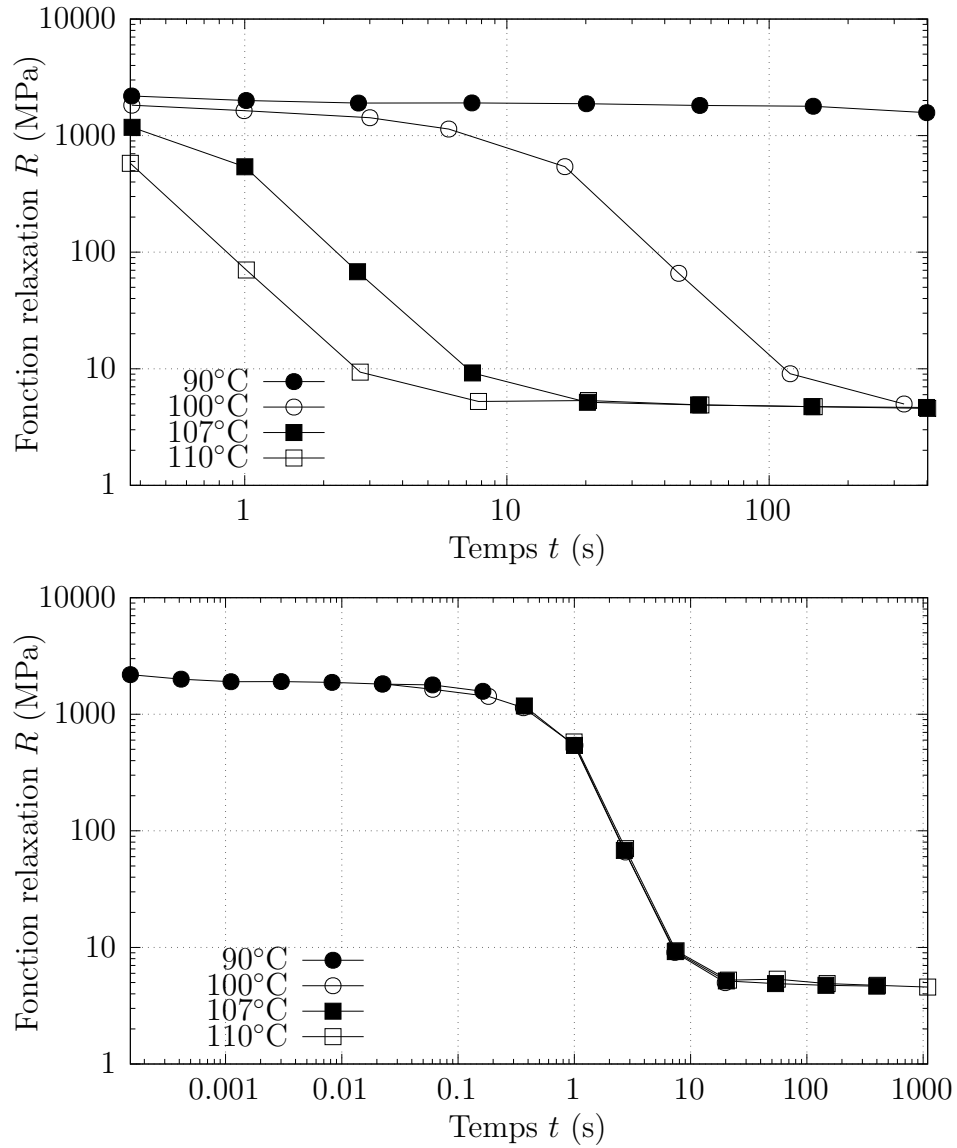


Figure 15.4: Résultats des essais de relaxation uniaxiaux pour le polystyrène à différentes températures (haut). Construction d'une courbe maîtresse en relaxation à 107°C pour le polystyrène (bas).

contributions de chacun des échelons. L'évolution de l'état de déformation au cours du temps est donc donnée par :

$$\mathbf{E}(t) = \sum_i^n \mathbb{J}(T, t - t_i) : \Delta \Sigma_i \quad (15.17)$$

La relation précédente souligne que l'état de déformation à un instant t est la résultante des effets produits par les échelons qui ont précédé cet instant. L'effet d'un échelon i dépend à la fois de l'incrément de contrainte $\Delta \Sigma_i$ correspondant ainsi que du temps écoulé $t - t_i$ depuis l'application de l'incrément.

Comme illustré par la Figure 15.5, il est possible de décomposer un trajet de chargement isotherme piloté en contrainte, aussi complexe soit-il, en une infinité d'incrément infinitésimaux de contrainte pour aboutir à :

$$\Sigma(t) = \int_{0_-}^t h(t - \tau) \dot{\Sigma}(\tau) d\tau \quad (15.18)$$

Selon le principe de superposition de Boltzmann, la réponse en déformation est alors obtenue en intégrant l'effet de chaque incrément infinitésimal de contrainte :

$$\mathbf{E}(t) = \int_{0_-}^t \mathbb{J}(T, t - \tau) : \dot{\Sigma}(\tau) d\tau \quad (15.19)$$

La relation précédente souligne l'intérêt pratique du principe de superposition de Boltzmann. Pour un matériau dont le comportement est décrit dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, il suffit de connaître la fonction fluage pour en déduire la réponse en déformation à un trajet de chargement au cours duquel l'état de contrainte est contrôlé.

Il est important de remarquer que la relation de comportement (15.19) n'est valable que pour un trajet isotherme. Néanmoins, pour certaines situations pratiques, le trajet de chargement imposé à un point matériel inclut des variations significatives de la température au cours du temps. Il est possible de considérer l'histoire thermique en s'appuyant sur la notion d'équivalence temps-température introduite au 15.2. Cela conduit à la relation de comportement :

$$\mathbf{E}(t) = \int_{0_-}^t \mathbb{J} \left(T(\tau), \int_{\tau}^t \frac{1}{a(T(\theta), T(\tau))} d\theta \right) : \dot{\Sigma}(\tau) d\tau \quad (15.20)$$

Dans la relation précédente, la durée $t - \tau$ qui sépare l'instant t , où est évalué la réponse, et l'instant τ , où un incrément de contrainte a été appliqué, est corrigée pour intégrer l'histoire thermique entre ces deux instants. En particulier, si une élévation de température a été imposée au point matériel considéré ($a < 1$), elle est assimilée à une augmentation de la durée $t - \tau$.

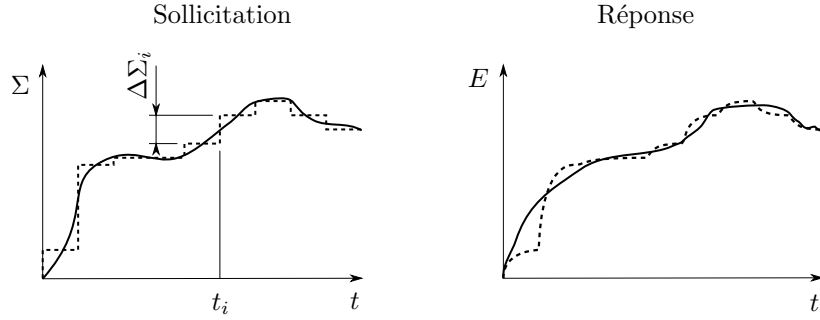


Figure 15.5: Application du principe de superposition de Boltzmann lors d'un trajet de chargement contrôlé en contrainte. Un trajet de chargement complexe (trait continu) peut être assimilé à une somme d'échelons de contrainte (trait pointillé). La réponse en déformation à ces deux trajets est obtenue par le principe de superposition de Boltzmann en considérant l'effet de chaque incrément de contrainte.

De manière semblable, il est possible d'imaginer un trajet de déformation en conditions isothermes qui consiste en une somme de n échelons. Si l'incrément de déformation associé au i ème échelon est noté $\Delta \mathbf{E}_i$ et que l'instant auquel il est appliqué est noté t_i , l'histoire des déformations est une fonction de la forme :

$$\mathbf{E}(t) = \sum_i^n h(t - t_i) \Delta \mathbf{E}_i \quad (15.21)$$

Dans le contexte de la viscoélasticité linéaire, le principe de superposition de Boltzmann permet d'établir que l'évolution de l'état de contrainte lors d'un tel trajet correspond à :

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \sum_i^n \mathbb{R}(T, t - t_i) : \Delta \mathbf{E}_i \quad (15.22)$$

Un trajet de déformation complexe peut être décomposé en une infinité d'incrément de déformation (voir Figure 15.6). Dans une telle situation, la généralisation de la relation (15.21) à des incréments infinitésimaux permet d'exprimer l'histoire de déformation à partir de :

$$\mathbf{E}(t) = \int_{0_-}^t h(t - \tau) \dot{\mathbf{E}}(\tau) d\tau \quad (15.23)$$

Pour un matériau viscoélastique linéaire, le principe de superposition conduit alors à exprimer l'évolution de l'état de contrainte induit par un trajet de déformation en conditions isothermes comme suit :

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \int_{0_-}^t \mathbb{R}(T, t - \tau) : \dot{\mathbf{E}}(\tau) d\tau \quad (15.24)$$

La relation précédente souligne que la connaissance du module de relaxation permet d'évaluer l'état de contrainte pour un trajet de déformation arbitraire. Dans le cas plus général d'un trajet de chargement qui incorpore des variations de l'état de déformation et de la température, le concept d'équivalence temps-température conduit à la relation de comportement suivante pour l'état de contrainte :

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \int_{0_-}^t \mathbb{R} \left(T(\tau), \int_{\tau}^t \frac{1}{a(T(\theta), T(\tau))} d\theta \right) : \dot{\mathbf{E}}(\tau) d\tau \quad (15.25)$$

Il convient de remarquer que les relations (15.20) et (15.25) ne sont pas indépendantes. Elles correspondent à deux méthodes différentes mais néanmoins équivalentes pour décrire le comportement mécanique d'un point matériel. En effet, la première méthode fournit l'état de déformation en se basant sur l'histoire des contraintes et des températures tandis que la seconde donne l'état de contrainte induit par l'histoire des déformations et des températures.

Remarque Lorsqu'on s'appuie sur le principe de superposition de Boltzmann, la description du comportement est réalisée dans le cadre d'une approche héréditaire. Les effets d'histoire ne sont pas représentés par des variables internes mais au travers de fonctionnelles telles que celle décrite par la relation (15.25). Ces fonctionnelles traduisent le fait que l'état courant d'un point matériel dépend de l'ensemble des sollicitations appliquées au cours de son histoire passée.

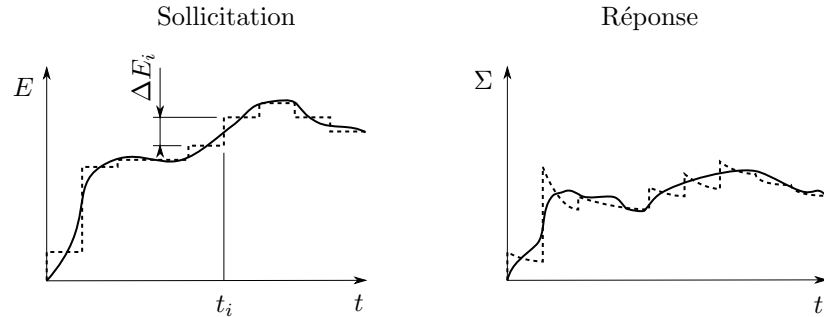


Figure 15.6: Application du principe de superposition de Boltzmann lors d'un trajet de chargement contrôlé en déformation. Un trajet de chargement complexe (trait continu) peut être assimilé à une somme d'échelons de déformation (trait pointillé). La réponse en contrainte à ces deux trajets est obtenue par le principe de superposition de Boltzmann en considérant l'effet de chaque incrémentation de déformation.

15.4 Approche rhéologique

15.4.1 Éléments rhéologiques

Dans le cadre d'une démarche de modélisation rhéologique, les lois de comportement viscoélastiques sont construites en assemblant des briques élémentaires qui représentent différents types de comportement. Si ces briques permettent de proposer une infinité de modèles de comportement viscoélastiques, on se contente dans ce qui suit de présenter à titre illustratif les modèles les plus courants.

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, on fait principalement appel à deux éléments rhéologiques qui sont le ressort et l'amortisseur (voir Figure 15.7). Le ressort est utilisé pour représenter un comportement élastique linéaire; la contrainte qui s'y applique dépend donc linéairement de la déformation qui lui est imposée. Ainsi, si on applique un état de déformation \mathbf{E} à un ressort, l'état de contrainte qui en résulte s'exprime :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (15.26)$$

où \mathbf{C} désigne le tenseur de rigidité. Le tenseur de souplesse, qui est l'inverse

du tenseur de rigidité, est noté \mathbb{S} (avec $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$) dans ce qui suit. Aussi, le ressort est un élément rhéologique qui stocke l'énergie qui lui a été transférée pour réaliser un état de déformation.

Par opposition, l'amortisseur permet de décrire des comportements de type visqueux linéaire; l'état de contrainte s'exerçant sur un amortisseur dépend donc linéairement du taux de déformation qui lui est appliqué. L'état de contrainte est donc lié au taux de déformation par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{L} : \dot{\mathbf{E}} \quad (15.27)$$

où \mathbb{L} désigne le tenseur de viscosité (homogène à une pression multipliée par un temps). Son inverse \mathbb{M} (avec $\mathbb{M} = \mathbb{L}^{-1}$) correspond au tenseur de fluidité. Du point de vue thermodynamique, la quantité d'énergie dépensée pour la déformation de l'amortisseur est intégralement dissipée sous forme de chaleur car associée à des phénomènes irréversibles.

Les propriétés de rigidité et de viscosité sont représentées par des tenseurs d'ordre quatre qui disposent des mêmes propriétés. En effet, de manière semblable à la discussion réalisée dans le contexte de la thermoélasticité (voir 14.4), ces tenseurs possèdent des caractéristiques de symétrie mineure et majeure. Ils sont également définis positifs.

Remarque Les modèles viscoélastiques linéaires sont largement utilisés pour décrire le comportement des matériaux polymères pour lesquels il est parfois raisonnable de considérer que les propriétés sont isotropes. Dès lors que l'hypothèse d'isotropie est adoptée, les tenseurs de rigidité \mathbb{C} , de souplesse \mathbb{S} , de viscosité \mathbb{L} et de fluidité \mathbb{M} peuvent s'exprimer à partir de quatre constantes de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= 3B \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad \text{et} \quad \mathbb{S} = \frac{1}{3B} \mathbb{P}_{\text{sph}} + \frac{1}{2G} \mathbb{P}_{\text{dev}} \\ \mathbb{L} &= 3\kappa \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2\eta \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad \text{et} \quad \mathbb{M} = \frac{1}{3\kappa} \mathbb{P}_{\text{sph}} + \frac{1}{2\eta} \mathbb{P}_{\text{dev}} \end{aligned}$$

où B (respectivement κ) caractérise la partie sphérique du tenseur de rigidité (respectivement viscosité) tandis que G (respectivement η) correspond à la partie déviatorique du tenseur de rigidité (respectivement viscosité). Il convient de préciser que, bien que cela ne soit pas clairement explicité dans les relations précédentes, les propriétés de rigidité et de viscosité peuvent dépendre de la température.

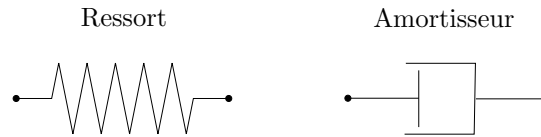


Figure 15.7: Représentations rhéologiques du ressort et de l'amortisseur.

15.4.2 Hypothèses de modélisation

Les lois de comportement présentées dans ce qui suit sont destinées aux systèmes fermés. Les variables d'état externes utilisées pour leur construction sont une mesure lagrangienne de l'état de déformation \mathbf{E} et la température absolue T . En revanche, la masse volumique ρ_0 , puisqu'elle est constante lorsqu'elle est prise par unité de volume de la configuration initiale, n'est pas à traiter comme une variable d'état.

La représentation rhéologique s'inscrit dans une approche purement mécanique dans la mesure où elle ignore les éventuelles contributions thermiques à la déformation. Pour les lois de comportement présentées dans ce qui suit, les couplages thermomécaniques, à l'exception de l'effet de la température sur les propriétés de rigidité et de viscosité, ne sont donc pas considérés.

15.4.3 Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt est utilisé pour décrire des comportements viscoélastiques pour lesquels les déformations sont recouvrables, i.e. l'annulation de la contrainte entraîne un retour progressif à déformation nulle. La représentation rhéologique du modèle de Kelvin-Voigt est donnée sur la Figure 15.8, elle associe en parallèle un ressort et un amortisseur.

La construction du modèle de comportement de Kelvin-Voigt ne nécessite pas d'introduire de variables internes. Les seules variables d'état utilisées sont une mesure lagrangienne de l'état de déformation \mathbf{E} et la température absolue T . L'assemblage en parallèle de l'amortisseur et du ressort traduit le fait que ces deux éléments se voient imposer le même état de déformation. Ainsi, conformément à la représentation rhéologique, si on considère que seul

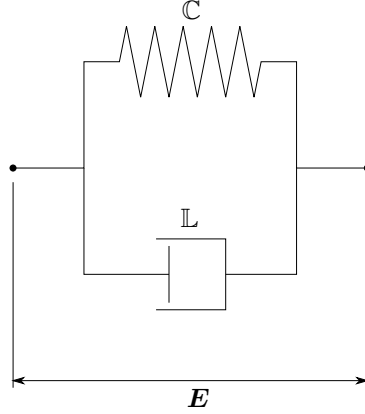


Figure 15.8: Représentation rhéologique du modèle de Kelvin-Voigt.

le ressort est capable de stocker l'énergie libre, l'énergie libre spécifique a est donnée par :

$$a = \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} - \int_{T_0}^T \int_{T_0}^{\theta} \frac{\bar{c}_v(\eta)}{\eta} d\eta d\theta + a_0 - s_0(T - T_0) \quad (15.28)$$

où \bar{c}_v est la capacité thermique spécifique à déformation nulle et a_0 (respectivement s_0) est la valeur de l'énergie libre spécifique (respectivement entropie spécifique) en l'absence de déformation à la température de référence T_0 .

L'énergie libre spécifique a , qui joue ici le rôle de potentiel d'état, permet d'établir que la partie élastique du tenseur des contraintes Σ_e s'exprime :

$$\Sigma_e = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (15.29)$$

$$= \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (15.30)$$

Aussi, l'entropie spécifique s est donnée par :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (15.31)$$

$$= -\frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E} + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + s_0 \quad (15.32)$$

Du fait de l'absence de variable interne, la source de dissipation spécifique d associée à un point matériel pour lequel le modèle de Kelvin-Voigt est adopté est donnée par :

$$d = \underbrace{\frac{\Sigma_v}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}}}_{d_1} - \underbrace{\frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q}_{d_2} \quad (15.33)$$

La relation précédente souligne que le caractère irréversible est dû à la fois à la contribution visqueuse à l'état de contrainte et aux transferts thermiques par conduction. La première contribution correspond à la partie intrinsèque de la source de dissipation tandis que la dernière est la partie extrinsèque.

L'adoption du cadre des matériaux standards ainsi que l'hypothèse de découplage de la source de dissipation conduisent à séparer le potentiel de dissipation ϕ en une contribution intrinsèque ϕ_1 due au caractère visqueux du comportement représenté par l'amortisseur et une contribution extrinsèque ϕ_2 associée à la conduction. Si la contribution extrinsèque a été discutée au Chapitre 13, il convient d'ajouter la contribution intrinsèque au potentiel de dissipation. Lorsqu'une forme quadratique est adoptée pour cette dernière, le potentiel de dissipation s'écrit :

$$\phi = \underbrace{\frac{1}{2\varrho_0} \dot{\mathbf{E}} : \mathbb{L} : \dot{\mathbf{E}}}_{\phi_1} + \underbrace{\frac{1}{2\varrho_0 T} \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{J}_q}_{\phi_2} \quad (15.34)$$

où \mathbb{L} est le tenseur d'ordre quatre qui définit les propriétés de viscosité du matériau et \mathbf{K} est le tenseur de conductivité thermique.

Remarque Conformément à la discussion au 12.4.4, la forme quadratique du potentiel de dissipation conduit à la forme linéaire des relations d'évolution.

On déduit du potentiel de dissipation que la partie visqueuse Σ_v du tenseur des contraintes est donnée par :

$$\Sigma_v = \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (15.35)$$

$$= \mathbb{L} : \dot{\mathbf{E}} \quad (15.36)$$

En combinant le relation d'état (15.30) et la relation d'évolution (15.36), on obtient la relation de comportement pour le tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_e + \boldsymbol{\Sigma}_v \quad (15.37)$$

$$= \mathbb{C} : \mathbf{E} + \mathbb{L} : \dot{\mathbf{E}} \quad (15.38)$$

La relation précédente souligne le caractère viscoélastique du comportement. Elle montre en effet que l'état de contrainte dépend à la fois de l'état de déformation et du taux de déformation.

Enfin, pour la densité surfacique de flux de chaleur, le potentiel de dissipation conduit à :

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) = -\varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{J}_q} \quad (15.39)$$

$$= -\frac{\mathbf{K}^{-1}}{T} \cdot \mathbf{J}_q \quad (15.40)$$

La relation précédente est en fait une réécriture de la loi de Fourier présentée au 13.3. Puisque $\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) = \nabla_{\mathbf{x}}(T)/T$, on trouve en effet que :

$$\mathbf{J}_q = -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(T) \quad (15.41)$$

Afin d'illustrer les caractéristiques du modèle de Kelvin-Voigt, il est possible d'établir les expressions des fonctions de fluage, de relaxation, de stockage et de dissipation pour le cas particulier (mais néanmoins courant) d'un matériau pour lequel les propriétés de viscosité et de rigidité sont isotropes. Avec l'hypothèse d'isotropie, ces différentes fonctions sont données par :

$$\mathbb{J}(t) = \frac{1}{3B} (1 - \exp(-t/\tau_{\text{sph}})) \mathbb{P}_{\text{sph}} + \frac{1}{2G} (1 - \exp(-t/\tau_{\text{dev}})) \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (15.42)$$

$$\mathbb{R}(t) = 3(B + \kappa \delta(t)) \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2(G + \eta \delta(t)) \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (15.43)$$

$$\mathbb{E}'(\omega) = 3B \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (15.44)$$

$$\mathbb{E}''(\omega) = 3\kappa\omega \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2\eta\omega \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (15.45)$$

L'expression de la fonction fluage fait intervenir deux temps caractéristiques (notés τ_{sph} et τ_{dev}) qui se déduisent des propriétés de rigidité et de viscosité par :

$$\tau_{\text{sph}} = \frac{\kappa}{B} \text{ et } \tau_{\text{dev}} = \frac{\eta}{G} \quad (15.46)$$

L'évolution des fonctions de fluage, de relaxation, de stockage et de dissipation obtenues avec le modèle de Kelvin-Voigt sont représentées schématiquement sur la Figure 15.9 dans un contexte uniaxial.

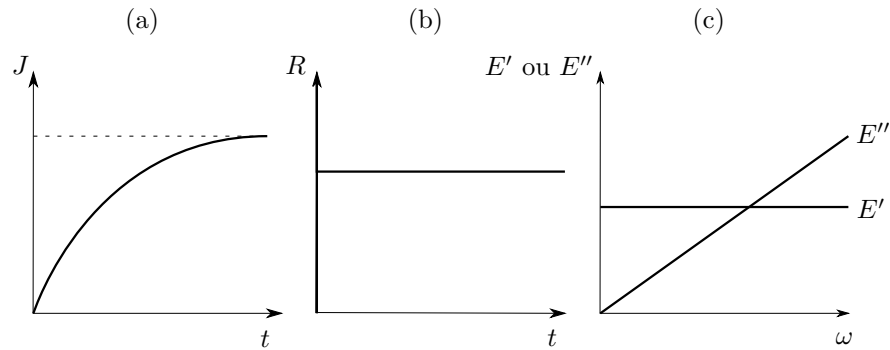


Figure 15.9: Représentation schématique des réponses obtenues en (a) fluage uniaxial, (b) relaxation uniaxiale et (c) analyse mécanique dynamique uniaxiale avec le modèle de Kelvin-Voigt.

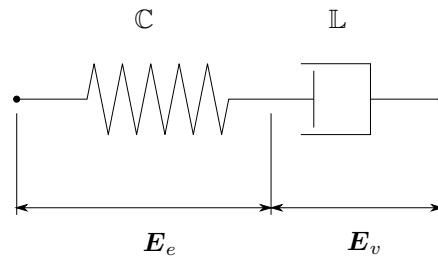


Figure 15.10: Représentation rhéologique du modèle de Maxwell.

15.4.4 Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell permet de décrire des comportements viscoélastiques pour lesquels les déformations ne sont que partiellement recouvrables. La représentation rhéologique du modèle de Maxwell (voir Figure 15.10) est semblable à celle du modèle de Kelvin-Voigt à ceci près que le ressort de rigidité \mathbb{C} et l'amortisseur de viscosité \mathbb{L} sont associés en série. Ces deux éléments subissent donc le même état de contrainte. Du fait de l'association en série, la déformation totale résulte de l'addition d'une contribution élastique \mathbf{E}_e et d'une contribution visqueuse \mathbf{E}_v , ce qui conduit à :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_v \quad (15.47)$$

Remarque Plutôt que la décomposition additive d'une mesure lagrangienne des déformations en parties élastique et visqueuse, il est possible d'adopter une décomposition multiplicative du gradient de la transformation (Sidoroff, 1974) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_v$$

où \mathbf{F}_e (respectivement \mathbf{F}_v) désigne la partie élastique (respectivement visqueuse) du gradient de la transformation.

Comme pour le modèle de Kelvin-Voigt, la déformation \mathbf{E} et la température T sont considérées comme des variables d'état observables. Aussi, puisque seul le ressort est capable de stocker l'énergie, la définition de l'énergie libre spécifique est donnée par :

$$a = \frac{1}{2\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) : \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) - \int_{T_0}^T \int_{T_0}^{\theta} \frac{\bar{c}_v(\eta)}{\eta} d\eta d\theta + a_0 - s_0(T - T_0) \quad (15.48)$$

La relation précédente souligne que la déformation visqueuse \mathbf{E}_v joue le rôle de variable d'état interne. L'évaluation de l'énergie libre spécifique nécessite en effet de connaître cette variable qui contient une information quant à la quantité de déformation visqueuse accumulée par un point matériel au cours de son histoire.

Le modèle de Maxwell est caractérisé par l'absence de contrainte visqueuse (i.e. $\Sigma_v = \mathbf{0}$) dans la mesure où, à cause de l'assemblage en série, il est impossible de produire un état de contrainte en l'absence de déformation élastique. Ainsi, puisque le tenseur des contraintes se réduit à sa partie élastique, on en déduit que :

$$\Sigma = \Sigma_e = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (15.49)$$

$$= \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) \quad (15.50)$$

L'entropie spécifique s est donnée par :

$$s = - \frac{\partial a}{\partial T} \quad (15.51)$$

$$= - \frac{1}{2\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + s_0 \quad (15.52)$$

Enfin, la force thermodynamique associée à la déformation visqueuse est, au signe près, le tenseur des contraintes puisque :

$$-\boldsymbol{\Sigma} = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}_v} \quad (15.53)$$

$$= \mathbb{C} : (\mathbf{E}_v - \mathbf{E}) \quad (15.54)$$

En l'absence de contrainte visqueuse, la source de dissipation spécifique s'exprime :

$$d = \underbrace{\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}}_v}_{d_1} - \underbrace{\frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q}_{d_2} \quad (15.55)$$

Outre la relation de comportement pour la densité surfacique de flux de chaleur, l'équation précédente souligne qu'il est également nécessaire d'établir une relation d'évolution pour la déformation visqueuse. Suivant le cadre des matériaux standards, il est possible d'obtenir ces deux relations à partir d'un potentiel de dissipation φ qui s'exprime :

$$\varphi = \underbrace{\frac{1}{2\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{M} : \boldsymbol{\Sigma}}_{\varphi_1} + \underbrace{\frac{T}{2\varrho_0} \nabla_{\mathbf{x}} (\ln T) \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (\ln T)}_{\varphi_2} \quad (15.56)$$

Comme pour le modèle de Kelvin-Voigt, la définition précédente du potentiel de dissipation repose sur l'hypothèse de découplage des contributions intrinsèque et extrinsèque.

Remarque Comme discuté au 12.4.4, les relations d'évolution peuvent s'obtenir de manière équivalente à partir du potentiel de dissipation φ , qui est une fonction des forces thermodynamiques, ou à partir du potentiel de dissipation ϕ , qui dépend des variables flux. Afin d'illustrer ces deux possibilités, les relations d'évolution associées au modèle de Maxwell ont été dérivées du potentiel de dissipation φ tandis que, pour le modèle de Kelvin-Voigt, le potentiel de dissipation dual ϕ a été utilisé.

La relation d'évolution associée à la partie visqueuse de la déformation se déduit du potentiel de dissipation par :

$$\dot{\mathbf{E}}_v = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \quad (15.57)$$

$$= \mathbb{M} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (15.58)$$

Aussi, la dérivation du potentiel de dissipation vis-à-vis du gradient du logarithme de la température conduit à la loi de Fourier :

$$\mathbf{J}_q = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nabla_{\mathbf{x}} (\ln T)} \quad (15.59)$$

$$= -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (15.60)$$

En combinant les relations (15.50) et (15.58), on obtient l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'état de contrainte pour un modèle de Maxwell :

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbb{S} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \mathbb{M} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (15.61)$$

Cette dernière équation montre que, pour le modèle de Maxwell, le caractère viscoélastique se manifeste par la dépendance du taux de déformation à l'état de contrainte et à sa dérivée temporelle.

Lorsque les propriétés de viscosité et de rigidité sont isotropes, les fonctions de fluage, de relaxation, de stockage et de dissipation pour le modèle de Maxwell sont données par :

$$\mathbb{J}(t) = (1/3B + t/3\kappa) \mathbb{P}_{\text{sph}} + (1/2G + t/2\eta) \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (15.62)$$

$$\mathbb{R}(t) = 3B \exp(-t/\tau_{\text{sph}}) \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G \exp(-t/\tau_{\text{dev}}) \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (15.63)$$

$$\mathbb{E}'(\omega) = 3B\kappa^2\omega^2/(B^2 + \kappa^2\omega^2) \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G\eta^2\omega^2/(G^2 + \eta^2\omega^2) \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (15.64)$$

$$\mathbb{E}''(\omega) = 3B^2\kappa\omega/(B^2 + \kappa^2\omega^2) \mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G^2\eta\omega/(G^2 + \eta^2\omega^2) \mathbb{P}_{\text{dev}} \quad (15.65)$$

L'expression de la fonction relaxation utilise les temps caractéristiques τ_{sph} et τ_{dev} déjà introduits précédemment pour le modèle de Kelvin-Voigt (voir Equation (15.46)). La représentation graphique de l'évolution des fonctions de fluage, de relaxation, de stockage et de dissipation en fonction du temps t ou de la pulsation ω est également présentée sur la Figure 15.11.

15.4.5 Modèle de Maxwell généralisé

Une forme plus générale du modèle de Maxwell peut être obtenue à partir d'une combinaison de différents modèles de Maxwell disposés en parallèle. Une telle combinaison, illustrée par la Figure 15.12, permet de décrire des comportements viscoélastiques plus complexes pour lesquels les déformations sont recouvrables. Si on considère un modèle de Maxwell généralisé à $n + 1$ branches, le comportement de chaque branche α (avec

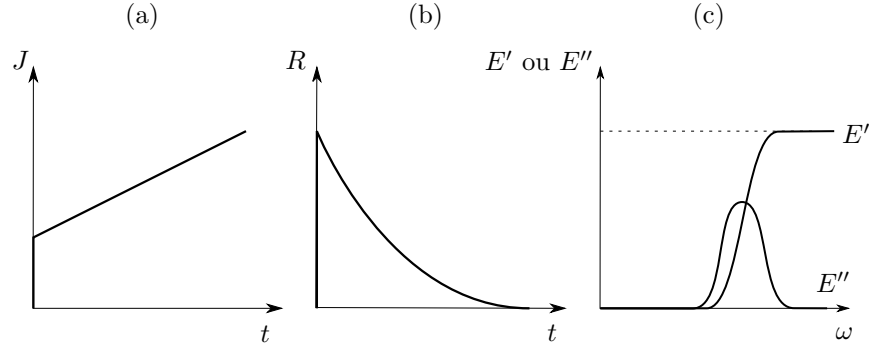


Figure 15.11: Représentation schématique des réponses obtenues en (a) fluage uniaxial, (b) relaxation uniaxiale et (c) analyse mécanique dynamique uniaxiale avec le modèle de Maxwell.

$\alpha = 1, \dots, n$) dépend du ressort de rigidité \mathbb{C}_α et de l'amortisseur de viscosité \mathbb{L}_α . La branche 0, qui ne dispose d'aucun amortisseur, a la particularité de posséder un comportement purement élastique. Puisque chaque branche est soumise au même état de déformation \mathbf{E} , il est possible d'écrire que :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{e,\alpha} + \mathbf{E}_{v,\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (15.66)$$

La relation précédente, semblable à celle utilisée pour le modèle de Maxwell, fait intervenir la déformation élastique $\mathbf{E}_{e,\alpha}$ et la déformation visqueuse $\mathbf{E}_{v,\alpha}$ de la branche α .

Comme pour les modèles viscoélastiques précédents, la définition de l'énergie libre spécifique a utilise une mesure lagrangienne de l'état de déformation \mathbf{E} et la température absolue T comme variables d'état observables, les déformations visqueuses $\mathbf{E}_{v,\alpha}$ des différentes branches intervenant en tant que variables internes. L'énergie libre spécifique s'exprime donc :

$$a = \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E} : \mathbb{C}_0 : \mathbf{E} + \sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{2\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{v,\alpha}) : \mathbb{C}_\alpha : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{v,\alpha}) - \int_{T_0}^T \int_{T_0}^\theta \frac{\bar{c}_v(\eta)}{\eta} d\eta d\theta + a_0 - s_0(T - T_0) \quad (15.67)$$

Comme pour le modèle de Maxwell, l'absence de contrainte visqueuse permet

d'écrire que la relation de comportement pour le tenseur des contraintes est :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_e = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (15.68)$$

$$= \mathbb{C}_0 : \mathbf{E} + \sum_{\alpha \geq 1} \mathbb{C}_\alpha : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{v,\alpha}) \quad (15.69)$$

Pour la déformation visqueuse $\mathbf{E}_{v,\alpha}$ associée à la branche α (avec $\alpha \geq 1$), la variable duale correspondante notée $-\boldsymbol{\Sigma}_\alpha$ est homogène à une contrainte. Elle se déduit de l'énergie libre spécifique a à partir de :

$$-\boldsymbol{\Sigma}_\alpha = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}_{v,\alpha}} \quad (15.70)$$

$$= \mathbb{C}_\alpha : (\mathbf{E}_{v,\alpha} - \mathbf{E}) \quad (15.71)$$

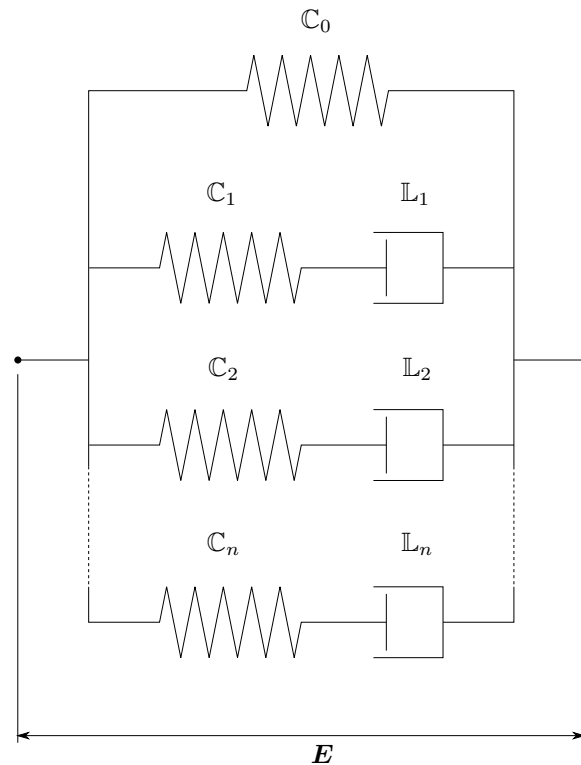


Figure 15.12: Représentation rhéologique du modèle de Maxwell généralisé.

La contrainte Σ_α représente l'état de contrainte appliqué au ressort et à l'amortisseur qui forment la branche α du modèle de Maxwell généralisé.

Enfin, la relation d'état qui fournit l'entropie spécifique s est :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (15.72)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{C}_0}{\partial T} : \mathbf{E} - \sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{2\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{v,\alpha}) : \frac{\partial \mathbf{C}_\alpha}{\partial T} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{v,\alpha}) \\ &+ \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + s_0 \end{aligned} \quad (15.73)$$

L'utilisation des relations d'état précédentes permet d'exprimer la source de dissipation spécifique d correspondant à un point matériel comme suit :

$$d = \underbrace{\sum_{\alpha \geq 1} \frac{\Sigma_\alpha}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}}_{v,\alpha}}_{d_1} - \underbrace{\frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q}_{d_2} \quad (15.74)$$

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, le taux de déformation visqueux $\dot{\mathbf{E}}_{v,\alpha}$ associé à la branche α dépend linéairement de la contrainte correspondante Σ_α . Du point de vue du potentiel de dissipation, cette dépendance linéaire se manifeste par une forme quadratique pour chaque branche. Lorsqu'on inclut la contribution extrinsèque, le potentiel de dissipation φ s'exprime :

$$\varphi = \underbrace{\sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{2\varrho_0} \Sigma_\alpha : \mathbb{M}_\alpha : \Sigma_\alpha}_{\varphi_1} + \underbrace{\frac{T}{2\varrho_0} \nabla_{\mathbf{x}} (\ln T) \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (\ln T)}_{\varphi_2} \quad (15.75)$$

où \mathbb{M}_α (avec $\mathbb{M}_\alpha = \mathbb{L}_\alpha^{-1}$) est le tenseur de fluidité associé à la branche α .

Pour chaque branche du modèle de Maxwell généralisé, on déduit du potentiel de dissipation que la dérivée temporelle de la déformation visqueuse correspondante est donnée par :

$$\dot{\mathbf{E}}_{v,\alpha} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \Sigma_\alpha} \quad (15.76)$$

$$= \mathbb{M}_\alpha : \Sigma_\alpha = \mathbb{M}_\alpha : \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{v,\alpha}) \quad (15.77)$$

Enfin, comme pour les autres modèles présentés, la loi de Fourier est dérivée du potentiel de dissipation par :

$$\mathbf{J}_q = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nabla_{\mathbf{x}} (\ln T)} \quad (15.78)$$

$$= -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (15.79)$$

Lorsque les propriétés de rigidité et de viscosité sont isotropes, les fonctions de relaxation, de stockage et de dissipation associées au modèle de Maxwell généralisé s'expriment :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(t) &= \sum_{\alpha \geq 1} (3B_\alpha \exp(-t/\tau_{\text{sph},\alpha}) + 3B_0) \mathbb{P}_{\text{sph}} \\ &+ \sum_{\alpha \geq 1} (2G_\alpha \exp(-t/\tau_{\text{dev},\alpha}) + 2G_0) \mathbb{P}_{\text{dev}} \end{aligned} \quad (15.80)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'(\omega) &= \sum_{\alpha \geq 1} (3B_\alpha \kappa_\alpha^2 \omega^2 / (B_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 \omega^2) + 3B_0) \mathbb{P}_{\text{sph}} \\ &+ \sum_{\alpha \geq 1} (2G_\alpha \eta_\alpha^2 \omega^2 / (G_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 \omega^2) + 2G_0) \mathbb{P}_{\text{dev}} \end{aligned} \quad (15.81)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}''(\omega) &= \sum_{\alpha \geq 1} (3B_\alpha^2 \kappa_\alpha \omega / (B_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 \omega^2)) \mathbb{P}_{\text{sph}} \\ &+ \sum_{\alpha \geq 1} (2G_\alpha^2 \eta_\alpha \omega / (G_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 \omega^2)) \mathbb{P}_{\text{dev}} \end{aligned} \quad (15.82)$$

Les équations précédentes utilisent des temps caractéristiques associés aux différentes branches du modèle de Maxwell généralisé. Pour chaque branche α , ces temps caractéristiques sont donnés par :

$$\tau_{\text{sph},\alpha} = \frac{\kappa_\alpha}{B_\alpha} \quad \text{et} \quad \tau_{\text{dev},\alpha} = \frac{\eta_\alpha}{G_\alpha} \quad (15.83)$$

La possibilité offerte par le modèle de Maxwell généralisé d'introduire une multitude de temps caractéristiques est intéressante en pratique. Elle permet en effet de décrire correctement la réponse d'un matériau viscoélastique (notamment en relaxation) aussi bien sur des temps longs que sur des temps courts. L'expression (15.80) est ainsi souvent utilisée pour reproduire les observations expérimentales du comportement en relaxation des matériaux viscoélastiques. Lorsque le principe de superposition de Boltzmann (voir 15.3) est appliqué, cette expression fournit la réponse d'un matériau viscoélastique linéaire à un trajet de déformation quelconque.

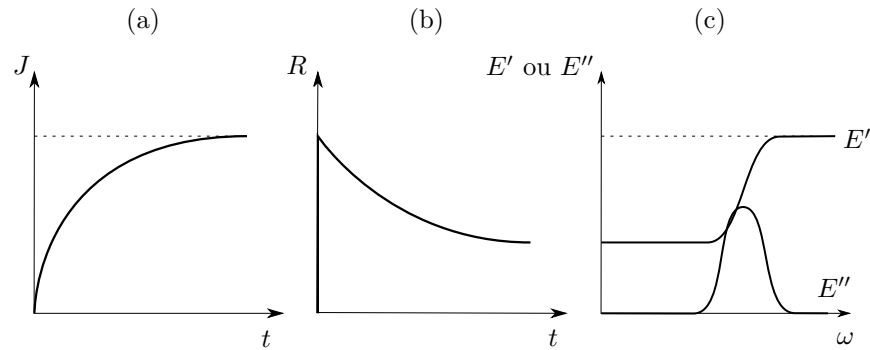


Figure 15.13: Représentation schématique des réponses obtenues en (a) fluage uniaxial, (b) relaxation uniaxiale et (c) analyse mécanique dynamique uniaxiale avec le modèle de Maxwell généralisé à deux branches.

Il convient de préciser que, pour le modèle de Maxwell généralisé, il n'est pas possible d'obtenir d'expression analytique de la fonction fluage. Cette dernière nécessite en effet une méthode numérique pour être évaluée.

À titre illustratif, l'évolution des fonctions de fluage, de relaxation, de stockage et de dissipation en fonction du temps ou de la pulsation est représentée schématiquement sur la Figure 15.13 pour le cas particulier d'un modèle de Maxwell généralisé à deux branches.

Chapitre 16

Plasticité

Lorsque les contraintes sont importantes, il devient possible pour de nombreux matériaux de se déformer plastiquement (i.e. de manière permanente). L'objectif de ce chapitre est de présenter un cadre général où le comportement d'un point matériel résulte de déformations dont l'origine est thermique, élastique et (visco)plastique¹.

Une des difficultés liées à la description des déformations plastiques est la présence d'effets d'histoire. En effet, les phénomènes physiques à l'origine de la déformation plastique impliquent souvent des transformations microstructurales faisant évoluer les propriétés d'un matériau solide lors d'un processus de déformation plastique (e.g. écrouissage, adoucissement). Ces propriétés dépendent ainsi du trajet de déformation suivi. L'introduction de variables internes qui permettent la description des transformations microstructurales et de leurs effets est donc un élément essentiel de la construction de modèles de comportement plastiques.

Dans ce chapitre, les principales caractéristiques du comportement plastique des matériaux sont d'abord rappelées à partir de quelques observations expérimentales. Les éléments essentiels pour la construction de lois de comportement plastiques (e.g. critère de plasticité, écrouissage) sont détaillés. L'intégration de ces éléments de modélisation dans un cadre thermodynamique est ensuite discutée. À titre illustratif, différents exemples de

¹Ce chapitre pourrait d'ailleurs s'intituler "Thermo-elasto-plasticité" dans la mesure où les déformations n'ont pas une origine exclusivement plastique.

modèles de comportement sont finalement présentés.

16.1 Aspects expérimentaux

16.1.1 Limite d'élasticité

Pour de nombreux matériaux, notamment métalliques, on observe que le comportement d'un point matériel est raisonnablement décrit par une loi de comportement thermoélastique linéaire (voir Chapitre 14) tant que les contraintes restent faibles. En revanche, quand l'état de contrainte devient sévère, un point matériel peut se déformer plastiquement. Au contraire des déformations élastiques ou de dilatation thermique, les déformations plastiques sont permanentes, i.e. elles subsistent même si l'état de contrainte est annulé et que la température retrouve sa valeur initiale.

La sévérité d'un état de contrainte, au sens de la plasticité, est une notion propre à chaque matériau. Il est ainsi nécessaire de disposer d'une propriété qui, pour un matériau donné, permette d'établir si un état de contrainte autorise ou non l'écoulement plastique. La propriété classiquement utilisée pour évaluer la résistance à la déformation plastique d'un matériau est la limite d'élasticité en traction uniaxiale. La limite d'élasticité est mesurée lors des essais de traction uniaxiale² au cours desquels une déformation axiale croissante est imposée à un échantillon. Les résultats d'un tel essai sont généralement présentés sur une courbe qui fournit l'évolution de la contrainte axiale (notée Σ) en fonction de la déformation axiale (notée E). Comme le montre la Figure 16.1, une telle courbe présente un domaine d'élasticité à l'intérieur duquel la contrainte axiale dépend linéairement de la déformation axiale, puis un domaine de plasticité au sein duquel le caractère linéaire disparaît. La limite d'élasticité (notée Σ_y) est la contrainte seuil qui définit la frontière entre les domaines d'élasticité et de plasticité.

Il convient de préciser que la limite d'élasticité d'un matériau n'est pas une constante. Elle dépend en effet des conditions de sollicitation, notamment la température, et de l'histoire de déformation. L'influence de l'histoire est

²Le terme "uniaxial" utilisé pour qualifier l'essai de traction fait référence au fait que l'état de contrainte est uniaxial. L'état de déformation est néanmoins généralement multiaxial au sens où le tenseur des déformations possède des composantes non-nulles non seulement dans la direction axiale, mais également selon les autres directions.

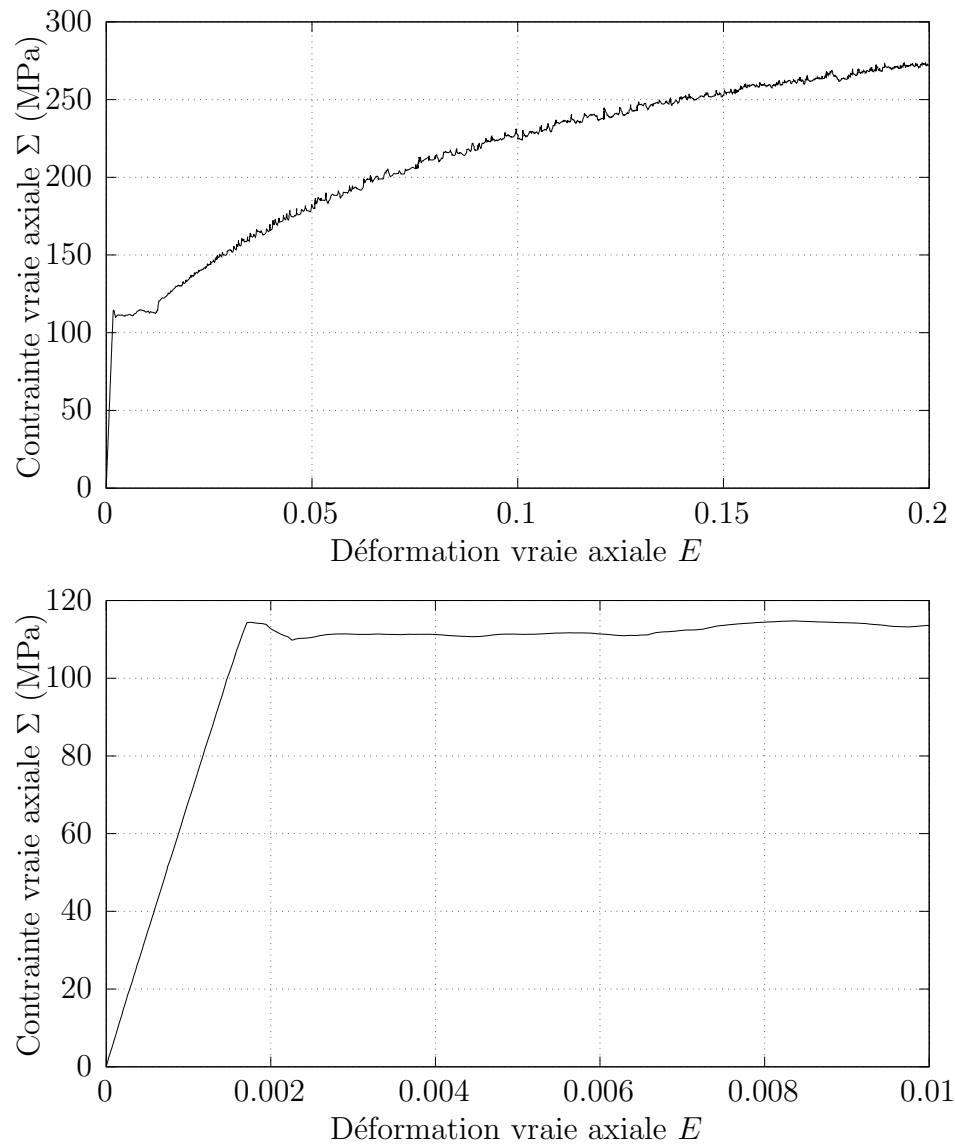


Figure 16.1: Courbe de traction uniaxiale obtenue pour un alliage d'aluminium (AlMg3) à température ambiante. Le graphique inférieur correspond à un zoom sur le domaine d'élasticité.

notamment la conséquence du phénomène d'écrouissage. Ce phénomène est observable lors d'un essai de charge-décharge uniaxiale au cours duquel on constate que, une fois la limite d'élasticité initiale dépassée, la limite d'élasticité tend à augmenter (voir Figure 16.2). Une description précise du comportement plastique d'un matériau nécessite donc de décrire l'évolution de la limite d'élasticité au cours d'un processus de déformation à partir de variables internes *ad hoc*.

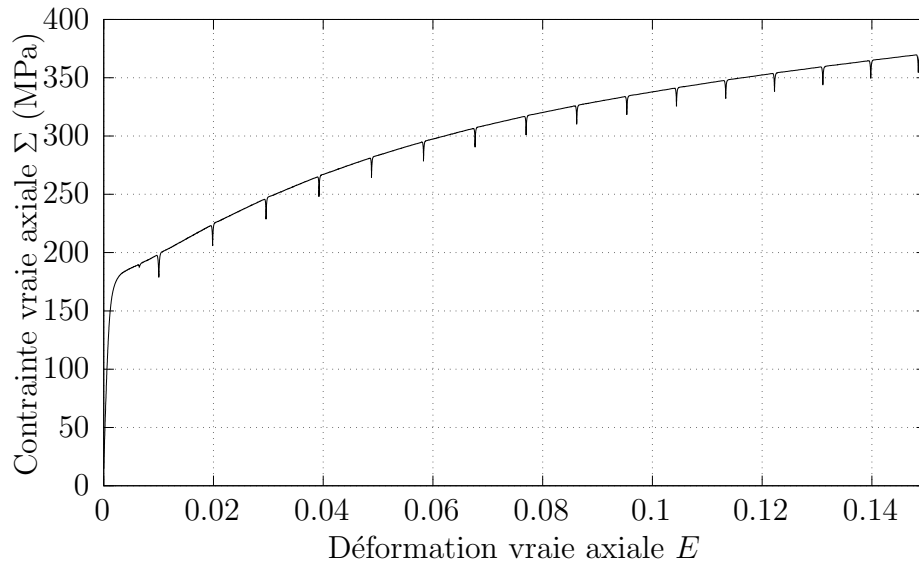


Figure 16.2: Courbe de traction uniaxiale obtenue pour un acier doux (Fe0,1C) à température ambiante. Afin de mesurer l'évolution de la limite d'élasticité, l'éprouvette est soumise à des séquences de charge-décharge. La charge correspond à la réalisation d'un incrément de déformation axiale tandis que la contrainte axiale est légèrement réduite lors de la décharge.

La limite d'élasticité est une grandeur scalaire qui permet de décider si les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont réunies ou non pour le cas particulier de la traction uniaxiale. Néanmoins, l'état de contrainte appliqué aux différents points matériels d'un système est souvent multiaxial. Le caractère possiblement multiaxial de la sollicitation nécessite de la représenter par un tenseur des contraintes. Afin de juger de la sévérité d'un état de contrainte, il est donc nécessaire de pouvoir comparer un tenseur des contraintes à la limite d'élasticité en traction uniaxiale. La notion de critère de plasticité, qui permet de réaliser cette comparaison, est détaillée au 16.3.

16.1.2 Dépendance à la vitesse de déformation

Lorsqu'un matériau se déforme de manière plastique, deux types de descriptions sont susceptibles d'être utilisées pour représenter le comportement : la plasticité et la viscoplasticité³. Ces deux descriptions se distinguent l'une de l'autre par l'absence ou la présence d'effet du taux de déformation plastique. En effet, la description viscoplastique suppose que le comportement est influencé par la vitesse de déformation plastique (d'où le qualificatif "visco"). À l'opposé, la description plastique permet de représenter le comportement des matériaux pour lesquels on considère que la vitesse de déformation plastique n'a pas d'influence. Le choix de l'une ou l'autre de ces descriptions dépend à la fois de la nature du matériau considéré et des conditions de sollicitations (e.g. température). Aussi, ce choix est guidé par les observations expérimentales, en particulier les résultats d'essais mécaniques. L'influence de la vitesse de déformation peut par exemple être mise en évidence à partir d'essais de relaxation, d'essais de fluage ou d'essais de traction réalisés pour différentes vitesses de déformation. À titre illustratif, la Figure 16.3 montre l'effet de la vitesse de déformation sur le comportement en traction uniaxiale à haute température d'un alliage d'aluminium.

Le cadre général de modélisation qui est exposé dans ce qui suit permet de traiter aussi bien la viscoplasticité que la plasticité. Les différences entre ces deux approches, qui portent sur le détail des relations d'évolution, sont abordées à travers différents exemples illustratifs.

16.2 Hypothèses de modélisation

La formulation additive d'une loi de comportement thermo-élasto-plastique suppose qu'il est possible de décomposer une mesure lagrangienne de l'état de déformation, représentée par le tenseur des déformations \mathbf{E} en une contribution élastique (indice e), une contribution thermique (indice th) et une contribution plastique (indice p) de sorte que :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_{th} + \mathbf{E}_p \quad (16.1)$$

On peut remarquer que la décomposition précédente est semblable à celle déjà utilisée au Chapitre 14 dans le cadre de la thermoélasticité, la seule

³On utilise parfois les termes de plasticité indépendante du temps et plasticité dépendante du temps pour désigner respectivement la plasticité et la viscoplasticité.

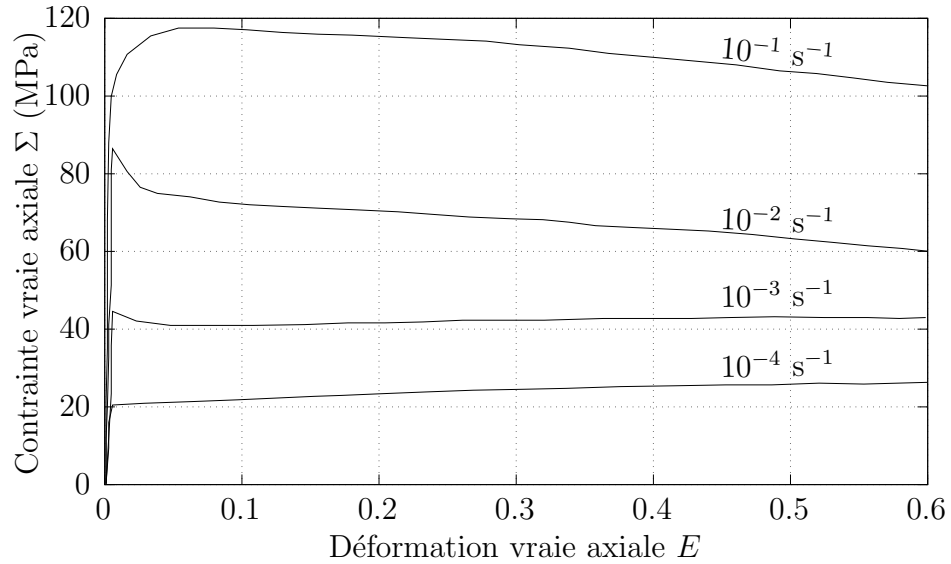


Figure 16.3: Courbes de traction uniaxiale obtenues pour un alliage d'aluminium (AlMg4,5Mn0,9) à 350°C pour différentes vitesses de déformation axiale (de 10^{-4} s^{-1} à 10^{-1} s^{-1}).

différence étant l'introduction de la contribution plastique. Les lois de comportement présentées dans ce qui suit constituent ainsi une extension du cadre de la thermoélasticité. Cette extension repose sur l'introduction de relations de comportement supplémentaires, qui permettent de décrire l'évolution de la déformation plastique \mathbf{E}_p . Le tenseur des déformations plastiques est donc à considérer comme une variable interne.

Remarque La décomposition additive d'une mesure de déformation n'est pas la seule option quand il s'agit de considérer la superposition de différents modes de déformation. Il est notamment possible de supposer une décomposition multiplicative du gradient de la transformation (Lee, 1969) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_{th} \cdot \mathbf{F}_p \quad (16.2)$$

La décomposition précédente est largement utilisée pour décrire le comportement des matériaux métalliques cristallins dans le contexte des transformations finies.

Remarque La décomposition additive (16.1) peut s'appliquer à n'importe quelle mesure lagrangienne de déformation (e.g. Green-Lagrange, Biot ou Hencky). Le choix de la mesure de déformation à utiliser constitue une hypothèse de modélisation qui peut se justifier par des observations expérimentales ou s'appuyer sur des considérations pratiques. L'adoption du tenseur des déformations de Hencky est à ce titre intéressante en cela qu'il est facile d'intégrer une éventuelle condition d'incompressibilité de l'écoulement plastique. Une telle condition suppose que les déformations plastiques ne génèrent pas de changement de volume. Lorsque le tenseur des déformations de Hencky est choisi, cela revient simplement à imposer que la partie plastique du tenseur des déformations soit purement déviatorique (voir 3.1.6).

Les lois de comportement exposées dans ce qui suit sont dédiées aux systèmes fermés. Du fait de l'absence de transfert de masse, les seules variables d'état externes nécessaires à la description du comportement d'un point matériel régulier sont la température absolue T et une mesure de l'état de déformation \mathbf{E} . Outre le tenseur des déformations plastiques \mathbf{E}_p , la liste des variables d'état internes peut également inclure des variables permettant de considérer le phénomène d'érouissage. Ces variables internes particulières sont usuellement qualifiées de variables d'érouissage.

Aussi, pour toutes les lois de comportement présentées dans ce chapitre, seule la contribution élastique à la contrainte est considérée, i.e. la contribution visqueuse est nulle. Ainsi, si on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire, le tenseur des contraintes Σ est relié à la partie élastique de la déformation par :

$$\Sigma = \mathbb{C} : \mathbf{E}_e \text{ et } \mathbf{E}_e = \mathbb{S} : \Sigma \quad (16.3)$$

où \mathbb{C} (respectivement \mathbb{S}) est le tenseur de rigidité (respectivement souplesse).

La contribution de la dilatation thermique à la déformation est évaluée à partir de la relation de comportement :

$$\mathbf{E}_{th} = \int_{T_0}^T \bar{\alpha}(\theta) d\theta \quad (16.4)$$

où $\bar{\alpha}$ est le tenseur (symétrique) de dilatation thermique à contrainte nulle. Comme pour le cas de la thermoélasticité (voir 14.3), le tenseur de dilatation

thermique effectif α est donné par :

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} : \Sigma \quad (16.5)$$

Enfin, pour la résolution des problèmes thermomécaniques, il est nécessaire de disposer d'une relation de comportement pour la densité surfacique de flux de chaleur. L'adoption de la loi de Fourier, détaillée au 13.3, suppose que la densité surfacique de flux de chaleur dépend linéairement du gradient de la température :

$$\mathbf{J}_q = -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (16.6)$$

où \mathbf{K} est le tenseur de conductivité thermique.

16.3 Critère de plasticité

16.3.1 Définition

Comme discuté précédemment, pour de nombreux solides, en particulier les matériaux métalliques, la déformation plastique n'est significative que lorsque les contraintes appliquées sont suffisantes. Il est alors commode de définir un seuil en-dessous duquel le comportement est purement élastique, l'accumulation de déformation plastique devenant possible uniquement lorsque le seuil est atteint. L'existence d'un seuil est particulièrement évidente lorsqu'on observe le comportement d'un matériau en traction monotone uniaxiale (voir Figure 16.4). Pour ce mode de sollicitation particulier, le seuil (noté Σ_y) est appelé limite d'élasticité en traction uniaxiale.

Afin d'élargir la notion de seuil à un contexte multiaxial, il est commode d'introduire une grandeur scalaire appelée contrainte équivalente Σ_{eq} . Une telle grandeur, qui dépend de l'état de contrainte, est un élément essentiel de la construction d'un critère de plasticité utilisable pour un état de contrainte quelconque. Comme le montre la Figure 16.5, la contrainte équivalente est supérieure ou égale à la limite d'élasticité lorsque l'état de contrainte est tel qu'il devient possible de déformer plastiquement le matériau. Elle est en revanche inférieure à la limite d'élasticité lorsqu'on se situe dans le domaine d'élasticité. Si on considère l'ensemble des situations possibles à partir des

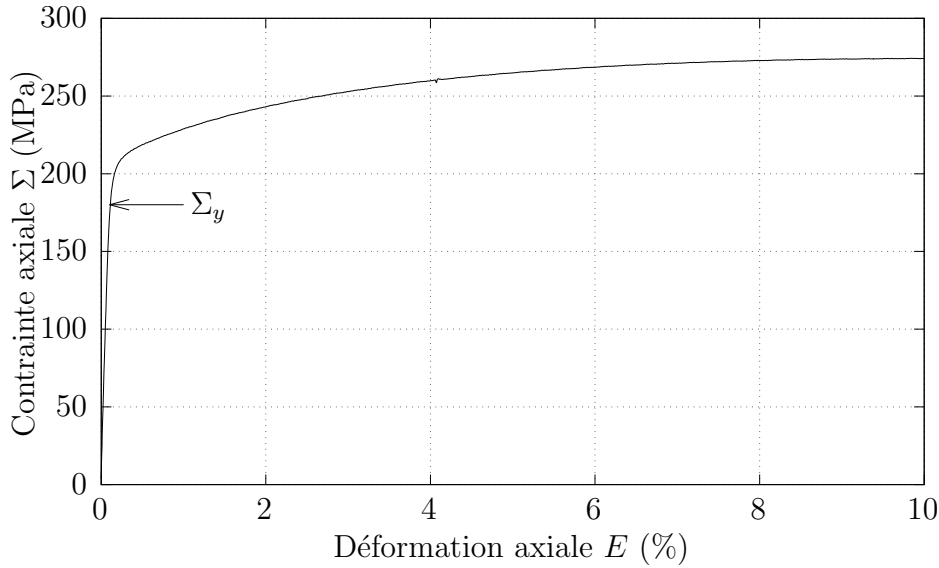


Figure 16.4: Courbe de traction obtenue pour un acier doux à température ambiante pour une vitesse de déformation nominale de 10^{-2} s^{-1} . Les déformations plastiques ne deviennent significatives que lorsque la contrainte atteint la limite d'élasticité Σ_y . La contrainte axiale correspond à la contrainte de Hencky et la déformation axiale à la déformation de Hencky.

différentes valeurs de la contrainte équivalente, on peut définir un critère de plasticité tel que :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) < \Sigma_y \rightarrow \|\dot{\mathbf{E}}_p\| = 0 \text{ (domaine d'élasticité)} \quad (16.7)$$

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) \geq \Sigma_y \rightarrow \|\dot{\mathbf{E}}_p\| \geq 0 \text{ (domaine de plasticité)} \quad (16.8)$$

Dans l'espace des contraintes, la surface définie par $\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = \Sigma_y$ représente la frontière d'un domaine convexe qui définit le domaine d'élasticité d'un point matériel. Cette surface est habituellement appelée surface de charge ou surface d'écoulement.

Comme l'illustrent les résultats de [Bui \(1966\)](#) obtenus pour du cuivre (voir Figure 16.6), ce sont les données issues d'essais mécaniques qui permettent de choisir la définition de la contrainte équivalente la plus appropriée à la description du comportement plastique d'un matériau. On présente dans ce qui suit différentes définitions susceptibles d'être utilisées pour formuler des

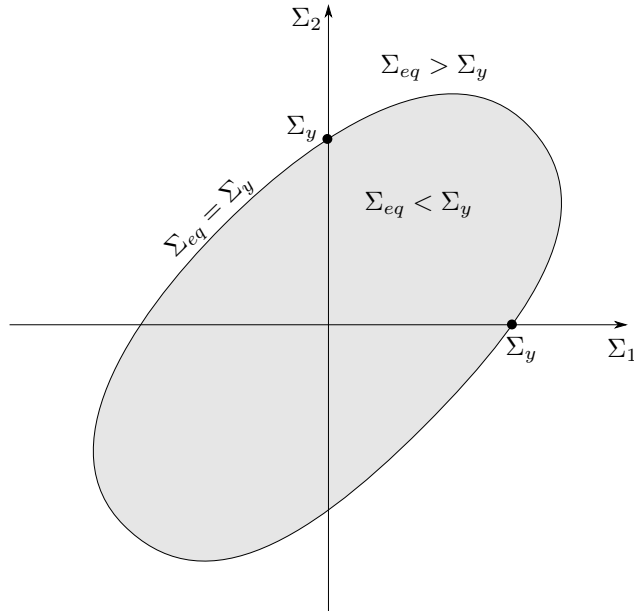


Figure 16.5: Représentation schématique de la surface de charge en fonction des contraintes principales. On se limite ici aux états de contraintes planes, cette représentation peut être généralisée sans difficulté à un état de contrainte quelconque. Aussi, lorsque les propriétés de déformation plastique sont anisotropes, les limites d'élasticité en traction uniaxiale selon les directions principales 1 et 2 ne coïncident pas nécessairement.

critères de plasticité⁴.

16.3.2 Critère de Tresca

Le critère de [Tresca \(1868\)](#) est adapté aux matériaux pour lesquels le processus de déformation plastique est indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes. Il suppose que le processus de déformation plastique peut démarrer dès lors qu'il existe au moins un plan pour lequel la contrainte tangentielle atteint une valeur critique. Ainsi, si on utilise les

⁴La liste présentée ici n'est pas exhaustive et de nombreux autres critères ont été proposés pour établir si les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont réunies.

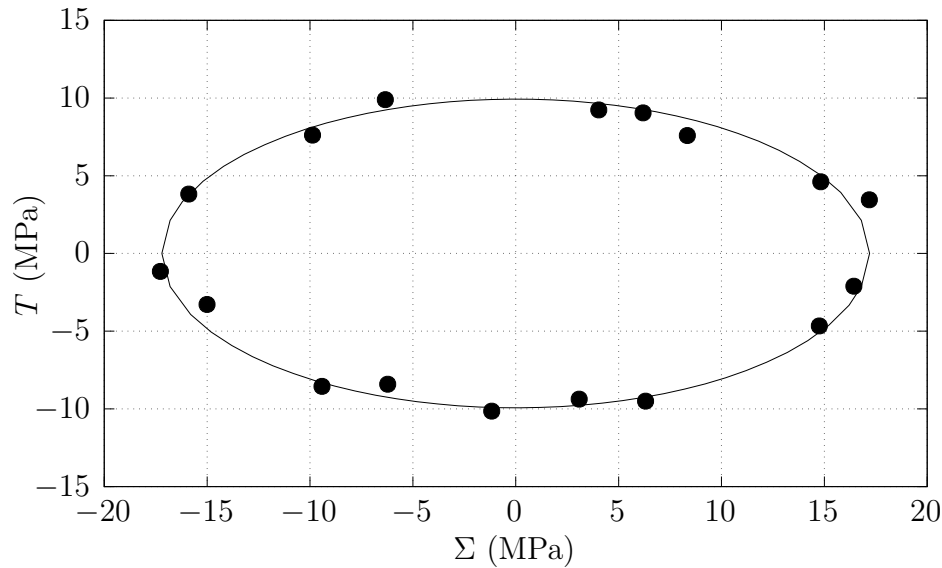


Figure 16.6: Représentation de la surface de charge dans un plan contrainte normale-contrainte de cisaillement ($\Sigma - T$). Les points expérimentaux ont été obtenus pour du cuivre par Bui (1966). La surface de charge obtenue à partir du critère de von Mises est également représentée.

résultats du 5.6, la contrainte équivalente Σ_{eq} au sens de Tresca est définie à partir des contraintes principales Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 comme suit :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = \Sigma_1 - \Sigma_3 \quad (16.9)$$

en supposant $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$. Le critère de Tresca, puisqu'il est défini à partir des seules contraintes principales (et pas des directions principales), est un critère isotrope.

Remarque Quelle que soit la mesure lagrangienne de l'état de déformation \mathbf{E} utilisée comme variable d'état, la mesure de l'état de contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$ qui lui est conjuguée au sens de la puissance de déformation spécifique est représentée par un tenseur de rang deux symétrique. Comme expliqué au 5.6 pour le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff \mathbf{S} , il est possible de décomposer le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$

en éléments propres :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \Sigma_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha} \otimes \mathbf{N}_{\alpha}$$

où les vecteurs \mathbf{N}_{α} définissent les directions principales de contrainte tandis que les valeurs Σ_{α} représentent les contraintes principales.

16.3.3 Critère de von Mises

Une autre définition possible du critère de plasticité peut être obtenue à partir du critère de [Mises \(1913\)](#). À l'instar du critère de Tresca, le critère de von Mises considère que le processus de déformation plastique est contrôlé par les contraintes tangentielles. Toutefois, à la différence du critère de Tresca, l'importance des contraintes tangentielles est mesurée à partir de la partie déviatorique $\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}}$ du tenseur des contraintes utilisé pour la construction des relations de comportement. La contrainte équivalente de von Mises s'exprime ainsi :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}}} \quad (16.10)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left((\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_1)^2 \right)} \quad (16.11)$$

Comme pour le critère de Tresca, la contrainte équivalente de von Mises est isotrope et indépendante de la pression hydrostatique.

Remarque Pour la définition de la direction d'écoulement, il est parfois nécessaire de dériver la contrainte équivalente par rapport au tenseur des contraintes (voir [16.6.2](#)). Néanmoins, pour certains critères de plasticité (e.g. critère de Tresca), la contrainte équivalente n'est pas toujours dérivable pour certains points de l'espace des contraintes. Il convient alors de faire appel à des méthodes de régularisation qui confèrent au critère une propriété de dérivabilité en tout point de l'espace des contraintes. Pour le cas particulier du critère de Tresca, il est possible de s'affranchir de la difficulté de dérivabilité en utilisant le critère proposé par [Hosford \(1972\)](#). Selon ce critère, qui contient les cas particuliers de von Mises et de Tresca, la contrainte équivalente

s'exprime :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = \left(\frac{1}{2} |\Sigma_1 - \Sigma_2|^n + \frac{1}{2} |\Sigma_2 - \Sigma_3|^n + \frac{1}{2} |\Sigma_3 - \Sigma_1|^n \right)^{1/n}$$

où n est un paramètre propre à chaque matériau. Si le cas $n = 2$ correspond au critère de von Mises, le critère de Tresca est obtenu pour le cas asymptotique $n = \infty$. Il est possible d'utiliser le critère de Hosford avec une grande valeur de n . Cela permet de s'approcher raisonnablement du critère de Tresca tout en garantissant que la contrainte équivalente est une fonction dérivable du tenseur des contraintes.

16.3.4 Critère de Drucker-Prager

Le critère de Drucker-Prager (Drucker and Prager, 1952) est semblable à celui de von Mises à ceci près qu'il inclue une influence de la pression hydrostatique. Une telle influence peut être observée lorsque les limites d'élasticité en traction uniaxiale et en compression uniaxiale sont différentes. La contrainte équivalente au sens de Drucker-Prager s'écrit :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} + A \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{sph}})} \quad (16.12)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left((\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_1)^2 \right)} + A(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) \quad (16.13)$$

où le paramètre A contrôle l'effet de la pression hydrostatique. La contrainte équivalente de Drucker-Prager est également une fonction isotrope de l'état de contrainte.

Remarque Lorsque le critère de Drucker-Prager est adopté, les limites d'élasticité en traction uniaxiale Σ_{yt} et en compression uniaxiale Σ_{yc} sont données par :

$$\Sigma_{yt} = \frac{\Sigma_y}{(1 + A)} \text{ et } \Sigma_{yc} = -\frac{\Sigma_y}{(1 - A)}$$

Ces dernières relations montrent que le paramètre A permet de contrôler l'asymétrie du comportement, i.e. la différence de comportement entre la traction et la compression. Le cas particulier $A = 0$ correspond à la

symétrie (i.e. $\Sigma_{yt} = -\Sigma_{yc}$), auquel cas le critère de Drucker-Prager est équivalent à celui de von Mises.

16.3.5 Critère quadratique de Hill

Lorsque la limite d'élasticité est anisotrope à l'état initial, il faut disposer d'un critère qui permette de reproduire cette anisotropie. Le critère quadratique de Hill (1948) est indépendant de la pression hydrostatique mais permet de traduire les variations de limite d'élasticité en fonction de la direction d'observation. Ce critère utilise la définition suivante de la contrainte équivalente :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{H} : \boldsymbol{\Sigma}} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} : \mathbb{H} : \boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}}} \quad (16.14)$$

où \mathbb{H} est un tenseur déviatorique (i.e. $\mathbb{H} : \mathbf{1} = \mathbf{0}$) construit à partir d'un ensemble de constantes dont le nombre exact dépend des caractéristiques de symétrie du matériau considéré (voir 12.3). Le cas particulier de l'isotropie consiste à choisir $\mathbb{H} = 3/2\mathbb{P}_d$, auquel cas la définition précédente de la contrainte équivalente équivaut à celle de von Mises. Il convient de remarquer qu'il n'est pas possible d'exprimer la contrainte équivalente précédente à partir des seules contraintes principales. En effet, à cause du caractère anisotrope, la contrainte équivalente selon Hill dépend non seulement des contraintes principales mais également des directions principales, i.e. de l'orientation de l'état de contrainte vis-à-vis de la matière.

Remarque Dans sa forme originale, le critère de Hill (1948) repose sur une hypothèse d'orthotropie. La construction du tenseur \mathbb{H} fait alors intervenir six constantes communément notées F , G , H , L , M et N . La représentation de Voigt comme un tenseur de souplesse (voir Annexe D) du tenseur \mathbb{H} pour le cas particulier de l'orthotropie correspond à :

$$[\mathbb{H}] = \begin{bmatrix} G + H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & H + F & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F + G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{bmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

L'utilisation de la relation précédente couplée à l'application de la

définition de la contrainte équivalente (16.14) permet d'exprimer cette dernière en fonction des différentes composantes de l'état de contrainte comme suit :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = (F(\Sigma_{22} - \Sigma_{33})^2 + G(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2 + H(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + 2L\Sigma_{23}^2 + 2M\Sigma_{31}^2 + 2N\Sigma_{12}^2)^{1/2}$$

Cette dernière relation est souvent utilisée en pratique pour définir si, pour un matériau orthotrope, les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont réunies ou non.

16.4 Ecoulement

16.4.1 Modes d'écrouissage

La description du processus de déformation plastique est complexe puisqu'il est très influencé par les transformations microstructurales qui ont lieu pendant l'histoire de chargement. En particulier, pendant un essai de traction uniaxiale, si on opère une décharge élastique suivie d'une nouvelle montée en charge (voir Figure 16.7), on observe que la limite d'élasticité a augmenté par rapport à sa valeur initiale, c'est le phénomène d'écrouissage. Il apparaît donc nécessaire de revoir la forme des critères de plasticité précédemment introduits pour intégrer les phénomènes d'écrouissage/adoucissement. Plus spécifiquement, il s'agit d'introduire des grandeurs supplémentaires qui vont constituer une représentation macroscopique des transformations microstructurales à l'origine de ces phénomènes.

Remarque Pour certaines conditions de sollicitation, l'accumulation de déformation plastique peut entraîner un phénomène d'adoucissement, i.e. une diminution de la limite d'élasticité. Ce phénomène est décrit de manière semblable à l'écrouissage dans la mesure où l'adoucissement peut être interprété comme un écrouissage négatif.

Comme le montre la Figure 16.8, on peut observer des transformations importantes de la surface de charge selon le trajet de déformation suivi. On considère généralement deux modes d'écrouissage particuliers qui offrent

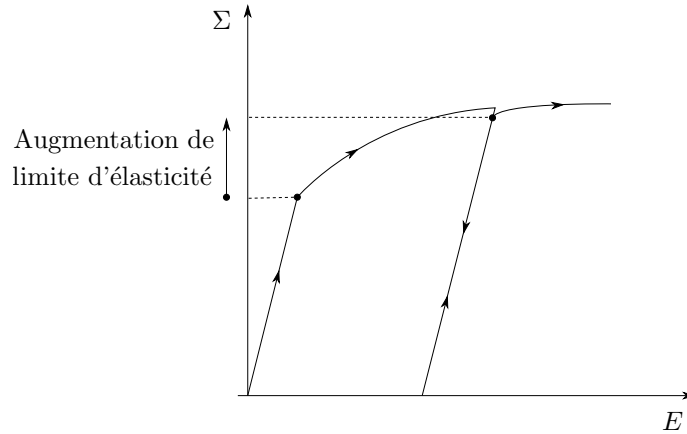


Figure 16.7: Représentation schématique du phénomène d'écrouissage en traction uniaxiale. La limite d'élasticité en traction uniaxiale est augmentée par déformation plastique.

une description simplifiée des transformations de la surface de charge. Tel qu'illustré par la Figure 16.10, on distingue ainsi :

- L'écrouissage isotrope, qui se manifeste par une expansion du domaine d'élasticité. Les conséquences de ce mode d'écrouissage, auquel on associe la contrainte scalaire R , sont donc identiques pour toutes les directions de l'espace des contraintes.
- L'écrouissage cinématique, qui se manifeste par une translation du domaine d'élasticité. Les conséquences de ce mode d'écrouissage, auquel on associe le tenseur des contraintes \mathbf{X} , dépendent donc de la direction considérée dans l'espace des contraintes.

Une méthode expérimentale permettant de mettre en évidence la nature de l'écrouissage consiste à observer le comportement mécanique lors d'essais pour lesquels le sens et/ou la direction de chargement sont inversés (essai de traction-compression par exemple). Pour ce type d'essai, comme le montre la Figure 16.9, un écouissage isotrope correspond au cas où les limites d'élasticité en traction et en compression sont affectées identiquement par l'écrouissage alors que l'écrouissage cinématique génère une asymétrie de comportement en traction et en compression.

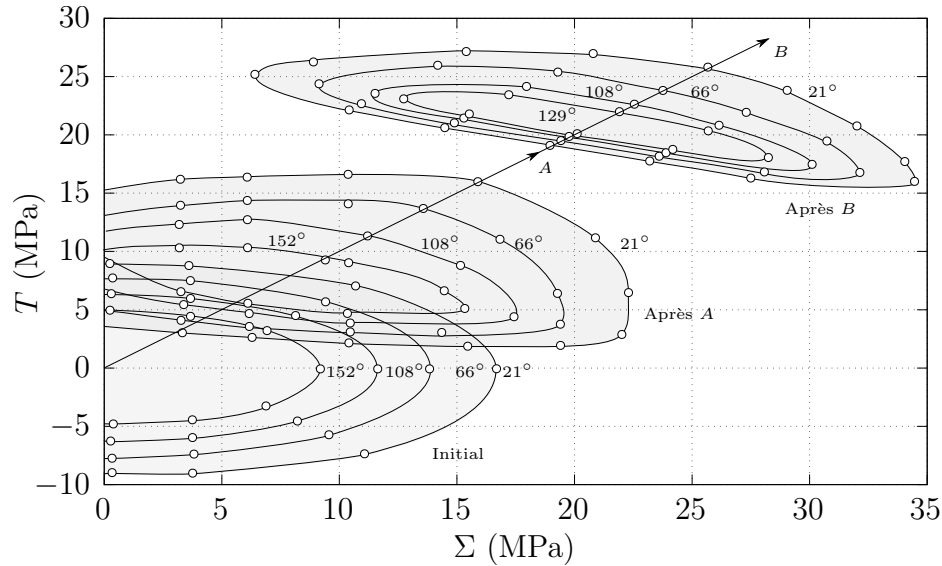


Figure 16.8: Evolution de la surface de charge dans un plan contrainte normale-contrainte de cisaillement ($\Sigma - T$) au cours d'un trajet de chargement à température ambiante (état initial, après chargement en A, après chargement en B). Les points expérimentaux ont été obtenus pour de l'aluminium pur par [Phillips and Juh-Ling \(1972\)](#). La contraction du domaine d'élasticité induite par l'augmentation de température est également représentée.

Afin de représenter les surfaces de charge de manière satisfaisante, il est souvent nécessaire de considérer une superposition de ces deux modes d'écrouissage. On parle alors d'écrouissage mixte, i.e. isotrope et cinématique. Dans certains cas, on observe des distorsions de la surface de charge qui ne peuvent être correctement décrites à partir des seules descriptions isotrope et cinématique. En effet, l'adoption d'une description mixte suppose que la forme de la surface de charge reste constante au cours d'un trajet de chargement. Lorsque des distorsions sont observées, il est donc nécessaire de recourir à des approches plus complexes que celles basées sur un mode d'écrouissage mixte uniquement.

Lorsqu'on considère la possibilité pour le matériau de s'écrouir, il faut introduire la contrainte cinématique et la contrainte isotrope dans l'expression du critère de plasticité. Ainsi, puisque l'écrouissage cinématique correspond à

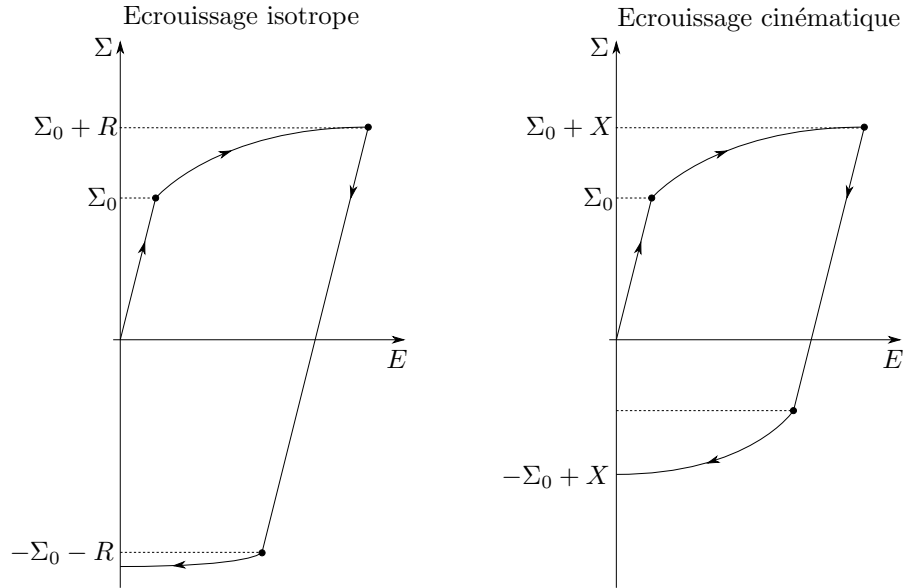


Figure 16.9: Effet de l'écroutissage isotrope (gauche) et de l'écroutissage cinématique (droite) lors d'un essai de traction-compression uniaxiale. L'écroutissage isotrope se manifeste par une expansion du domaine d'élasticité tandis que l'écroutissage cinématique conduit à une translation du domaine d'élasticité.

une translation de la surface de charge, il suffit de prendre comme argument $\Sigma - \mathbf{X}$ en lieu et place de Σ . Le critère de plasticité fait donc intervenir la contrainte appliquée Σ , la contrainte cinématique \mathbf{X} et la limite d'élasticité Σ_y de sorte que :

$$\Sigma_{eq}(\Sigma - \mathbf{X}) < \Sigma_y(R, T) \rightarrow \|\dot{\mathbf{E}}_p\| = 0 \text{ (domaine d'élasticité)} \quad (16.15)$$

$$\Sigma_{eq}(\Sigma - \mathbf{X}) \geq \Sigma_y(R, T) \rightarrow \|\dot{\mathbf{E}}_p\| \geq 0 \text{ (domaine de plasticité)} \quad (16.16)$$

Il est important de noter que, du fait de l'écroutissage isotrope, la valeur de Σ_y n'est pas une constante mais une grandeur susceptible d'évoluer au cours du temps. Puisque la contrainte isotrope représente l'augmentation de limite d'élasticité, la limite d'élasticité peut se décomposer comme suit :

$$\Sigma_y(R, T) = \Sigma_0(T) + R \quad (16.17)$$

où Σ_0 représente la limite d'élasticité initiale du matériau considéré. Si la limite d'élasticité initiale peut être une fonction de la température, elle

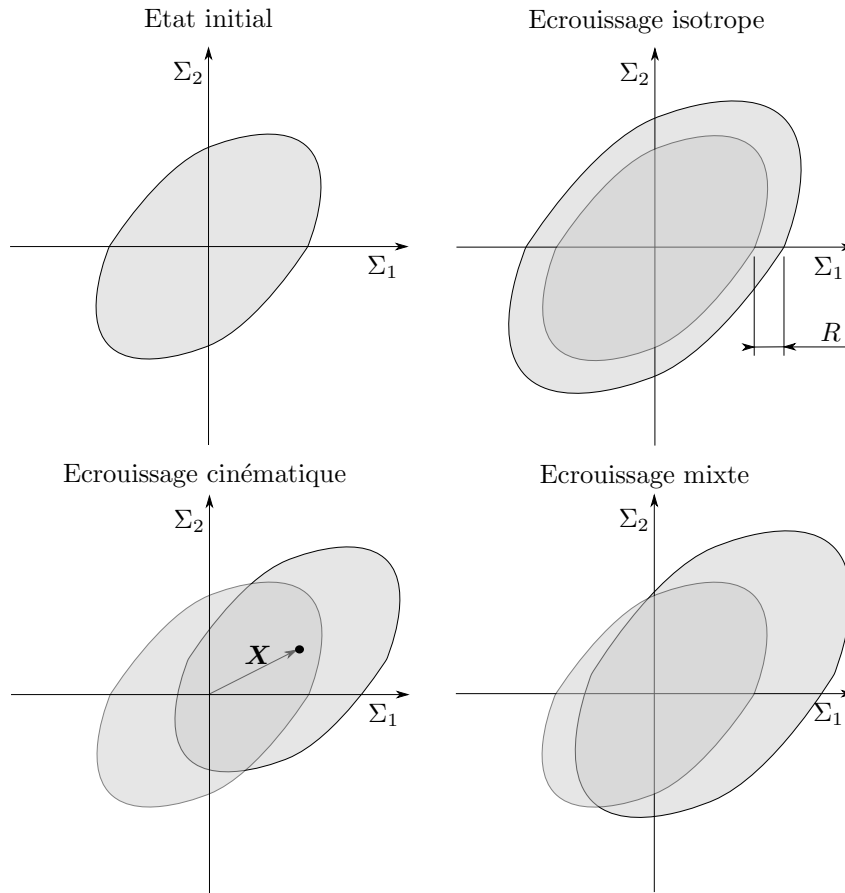


Figure 16.10: Représentation schématique des différents modes d'érouissage pour les états de contraintes planes. Cette représentation peut être généralisée sans difficulté à un état de contrainte quelconque.

ne peut en revanche pas dépendre de la quantité de déformation plastique accumulée par un point matériel.

16.4.2 Variables d'érouissage

Dès lors que les phénomènes d'érouissage cinématique et isotrope sont considérés, la description du comportement plastique d'un point matériel requiert de préciser l'évolution du tenseur des contraintes \mathbf{X} et de la

contrainte scalaire R . Dans le cadre d'une approche à variables internes, il est commode d'introduire deux variables d'état supplémentaires dites variables d'écroutissage pour appréhender les conséquences thermodynamiques de l'écroutissage. Spécifiquement, afin de représenter l'écroutissage cinématique, une variable tensorielle \mathbf{Z} est introduite pour modéliser les éventuels déplacements de la surface de charge. Pour la variable d'état interne \mathbf{Z} , qui est homogène à une déformation, le tenseur \mathbf{X} , homogène à une contrainte, joue le rôle de variable duale. Une loi d'écroutissage cinématique nécessite de spécifier une relation d'état, qui donne le tenseur \mathbf{X} comme une fonction des différentes variables d'état (en particulier la variable d'écroutissage cinématique \mathbf{Z}), ainsi qu'une relation d'évolution qui permet d'évaluer la dérivée temporelle $\dot{\mathbf{Z}}$ de la variable d'écroutissage cinématique.

De manière semblable, une variable interne Q , également homogène à une déformation, est introduite afin de considérer l'écroutissage isotrope. La variable duale de Q est la contrainte scalaire R . Comme pour la partie cinématique de l'écroutissage, la construction d'une loi d'écroutissage isotrope s'appuie sur une relation d'état, qui permet d'exprimer la contrainte scalaire R en fonction des différentes variables d'état, notamment la variable d'écroutissage isotrope Q , ainsi qu'une relation d'évolution qui fournit la dérivée temporelle \dot{Q} de la variable d'écroutissage isotrope.

Remarque Pour reproduire certaines observations expérimentales, il est parfois commode d'introduire plusieurs variables d'écroutissage cinématique ou isotrope. Chacune de ces variables ayant une relation d'évolution qui lui est propre, cela permet de construire des lois d'écroutissage plus complexes. Une telle approche est par exemple utilisée par [Chaboche \(1989\)](#). L'extension du formalisme présenté ici à de multiples variables d'écroutissage n'est pas abordée dans la suite de ce chapitre. Cela ne pose néanmoins pas de difficultés particulières dans la mesure où il s'agit simplement d'introduire des variables internes (d'écroutissage) supplémentaires.

16.5 Multiplicateur plastique et direction d'écoulement

Dans le cadre de la plasticité, le tenseur des déformations plastiques est une variable d'état interne à laquelle il est nécessaire d'associer une relation

d'évolution. Pour construire cette relation d'évolution particulière, il est commode de décomposer le taux de déformation plastique sous la forme d'un produit tel que :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{P} \mathbf{M} \quad (16.18)$$

La décomposition précédente utilise une grandeur scalaire \dot{P} appelée multiplicateur plastique et une grandeur tensorielle \mathbf{M} appelée direction d'écoulement plastique.

Le multiplicateur plastique \dot{P} est une grandeur positive (éventuellement nulle). Il est nul en l'absence d'écoulement plastique ($\Sigma_{eq} < \Sigma_y$), ce qui correspond au cas de figure où l'état de contrainte est à l'intérieur du domaine d'élasticité. Le multiplicateur plastique est en revanche positif lorsque les conditions d'écoulement plastique sont réunies ($\Sigma_{eq} \geq \Sigma_y$). Pour un point matériel, le multiplicateur plastique mesure ainsi l'intensité de l'écoulement plastique.

Aussi, puisque \dot{P} est homogène à un taux de déformation, P correspond à une déformation appelée déformation plastique cumulée. Elle représente la somme (plus exactement l'intégrale) de toutes les déformations plastiques accumulées par un point matériel sur un trajet de chargement. Puisque le multiplicateur plastique est positif, la déformation plastique cumulée ne peut qu'augmenter au cours d'un trajet de déformation.

Si le multiplicateur plastique fournit une information quant à l'intensité de l'écoulement plastique, il n'en précise pas la direction. Cette information de direction est contenue dans le tenseur du second ordre symétrique \mathbf{M} . Pour de nombreux matériaux, la plasticité est associée, auquel cas la direction d'écoulement plastique se déduit de la contrainte équivalente par :

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}$$

Le qualificatif "associé" est utilisé ici pour désigner le fait que la direction d'écoulement est associée au critère de plasticité. Il suffit en effet de connaître la définition de la contrainte équivalente pour en déduire la direction d'écoulement plastique. Comme illustré par les résultats de [Bui \(1969\)](#), la plasticité associée se manifeste par un écoulement plastique qui se produit selon une direction normale à la surface de charge.

Pour certains critères de plasticité, il peut exister des états de contrainte pour lesquels la contrainte équivalente n'est pas une fonction dérivable du

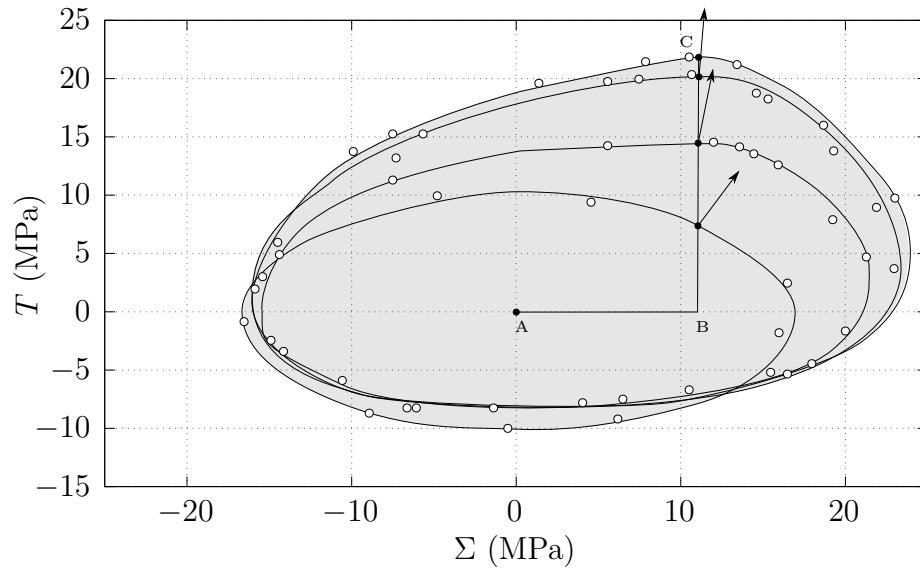


Figure 16.11: Évolutions successives de la surface de charge au cours d'un trajet de chargement A-B-C dans un plan contrainte normale-contrainte tangentielle ($\Sigma - T$) pour du cuivre polycristallin (d'après [Bui \(1969\)](#)). Les directions d'écoulement plastique sont repérées par des flèches.

tenseur des contraintes. Pour de tels états de contrainte, qui correspondent à des points anguleux de la surface de charge, l'utilisation de la notion de sous-différentiel permet d'établir que la direction d'écoulement plastique est comprise dans le cône des normales à la surface de charge (voir [16.12](#)). À titre indicatif, les directions d'écoulement plastique obtenues pour les différents critères de plasticité présentés au [16.3](#) sont listées dans le [Tableau 16.1](#).

Pour certains matériaux, le cadre de la plasticité associée est trop restrictif au sens où il ne permet pas de reproduire les observations expérimentales. Pour de tels matériaux, il faut alors se placer dans le cadre de la plasticité non-associée, i.e. la direction d'écoulement plastique doit être définie par une relation qui est indépendante du critère de plasticité.

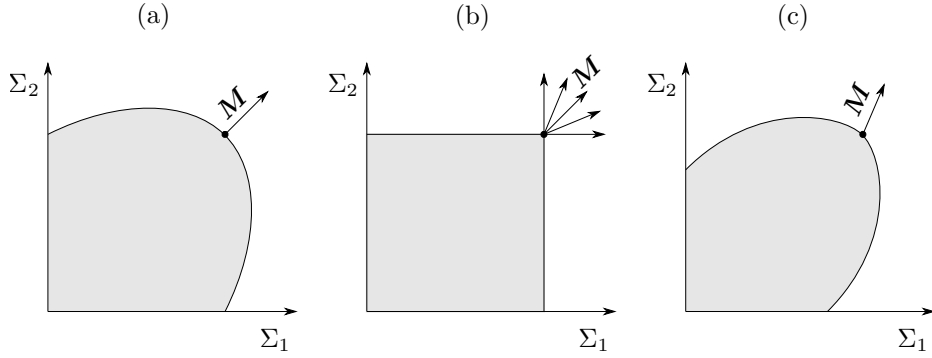


Figure 16.12: Représentation schématique de la direction d'écoulement plastique pour les cas de la plasticité associée (a-b) et non-associée (c). Lorsque la contrainte équivalente n'est pas dérivable par rapport au tenseur des contraintes (b), la direction d'écoulement plastique appartient au cône des normales à la surface de charge $\Sigma_{eq} = \Sigma_y$.

Critère	Direction d'écoulement plastique
Tresca	$\mathbf{M} = (\mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_3 \otimes \mathbf{N}_3)$
von Mises	$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}}{\ \boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}\ } = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}}{\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X})}$
Drucker et Prager	$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}}{\ \boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}\ } + A \mathbf{1}$
Hill	$\mathbf{M} = \frac{\mathbb{H}:(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}})}{\sqrt{(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}):\mathbb{H}:(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}})}} = \frac{\mathbb{H}:(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}})}{\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X})}$

Tableau 16.1: Directions d'écoulement plastique obtenues pour différents critères de plasticité courants. La direction d'écoulement plastique pour le critère de Tresca suppose que \mathbf{N}_1 et \mathbf{N}_3 sont les directions principales respectivement associées aux contraintes principales maximale et minimale.

16.6 Formulation thermodynamique

16.6.1 Relations d'état

Variables d'état internes La construction de lois de comportement nécessite de faire figurer les grandeurs utiles à la description de l'érouissage dans un cadre thermodynamique approprié. Puisque les phénomènes de plasticité et d'érouissage résultent des transformations microstructurales qui ont lieu au cours d'un trajet de chargement, il faut introduire des variables internes pour représenter l'état d'un point matériel à chaque instant. Les variables internes qu'on considère ici sont :

- Le tenseur des déformations plastiques \mathbf{E}_p , dont on a besoin pour connaître la partition de la déformation totale en contributions thermoélastique et plastique.
- Une variable tensorielle d'érouissage cinématique \mathbf{Z} , qui doit permettre de modéliser les éventuels déplacements de la surface de charge.
- Une variable scalaire d'érouissage isotrope Q , qui doit permettre de modéliser les éventuelles expansions de la surface de charge.

Avec l'ensemble des variables d'état, l'énergie libre spécifique a s'écrit donc sous la forme suivante :

$$a = \hat{a}(\mathbf{E}, T, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}, Q) \quad (16.19)$$

La liste des variables internes utilisées ici n'est absolument pas exhaustive. Si le besoin de modéliser de nouveaux phénomènes apparaît, il est tout à fait possible d'introduire de nouvelles variables internes afin d'enrichir les lois de comportement.

L'énergie libre spécifique a , parce qu'elle joue le rôle de potentiel d'état,

permet de construire les relations d'état suivantes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (16.20)$$

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (16.21)$$

$$\boldsymbol{\Xi} = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}_p} \quad (16.22)$$

$$\mathbf{X} = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{Z}} \quad (16.23)$$

$$R = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial Q} \quad (16.24)$$

où le tenseur $\boldsymbol{\Xi}$, qui est homogène à une contrainte, désigne la force thermodynamique associée à la déformation plastique \mathbf{E}_p .

Décomposition de l'énergie libre spécifique Dans le cadre de la plasticité, on utilise généralement la décomposition suivante de l'énergie libre spécifique :

$$a = \hat{a}_{te}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_p, T) + \hat{a}_{ec}(\mathbf{Z}, Q, T) \quad (16.25)$$

Cette décomposition s'appuie sur différentes hypothèses qu'il convient de souligner. D'abord, seules les déformations thermoélastiques contribuent à l'énergie libre. Du fait de la décomposition additive (16.1) du tenseur des déformations, les déformations thermoélastiques sont données par la différence entre la déformation totale \mathbf{E} et la déformation plastique \mathbf{E}_p . Il en résulte que la contribution thermoélastique a_{te} à l'énergie libre ne dépend que de la différence $\mathbf{E} - \mathbf{E}_p$ et de la température T . Ensuite, la contribution de l'écroissage à l'énergie libre est découplée de celle due à la thermoélasticité. Cela suppose que les phénomènes d'écroissage isotrope et cinématique ne sont pas influencés par l'état de déformation élastique.

Ce choix concernant la forme de l'énergie libre n'est pas sans conséquence. En particulier, la force thermodynamique $\boldsymbol{\Xi}$ qui contrôle l'évolution de la déformation plastique est, au signe près, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$. En effet, lorsqu'on dérive l'énergie libre spécifique par rapport aux variables de déformation, on obtient que :

$$\boldsymbol{\Xi} = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}_p} = -\varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} = -\boldsymbol{\Sigma} \quad (16.26)$$

Les lois de comportement présentées dans la suite de ce chapitre reposent toutes sur une même expression de la contribution thermoélastique a_{te} à l'énergie libre spécifique. En effet, si on s'appuie sur l'expression établie dans le cadre de la thermoélasticité, cette contribution s'exprime :

$$a_{te} = \frac{1}{2\varrho_0}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) - \frac{1}{\varrho_0}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \mathbb{C} : \mathbf{E}_{th} - \int_{T_0}^T \int_{T_0}^{\theta} \frac{\bar{c}_v(\eta)}{\eta} d\eta d\theta + a_0 - s_0(T - T_0) \quad (16.27)$$

où \bar{c}_v est la capacité thermique spécifique à déformation nulle et a_0 (respectivement s_0) est la valeur de l'énergie libre spécifique (respectivement entropie spécifique) en l'absence de déformation lorsque la température est égale à sa valeur de référence T_0 . L'expression précédente est cohérente avec la relation de comportement (16.3), i.e. la dérivation de l'énergie libre spécifique par rapport au tenseur des déformations conduit à une relation linéaire entre tenseur des contraintes et tenseur des déformations élastiques.

16.6.2 Relations d'évolution

Forces thermodynamiques La définition d'une loi de comportement requiert de préciser l'évolution des variables internes qui représentent l'état d'un point matériel. Puisque l'évolution de l'état interne est possiblement accompagnée de phénomènes dissipatifs, il convient de préciser l'expression de la source de dissipation spécifique pour le cas particulier de la plasticité. Avec les variables internes introduites précédemment, l'application de la relation générale (12.75) permet d'établir que la source de dissipation spécifique d'un point régulier s'exprime :

$$d = \underbrace{\frac{\Sigma}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{R}{\varrho_0} \dot{Q}}_{d_1} - \underbrace{\frac{\mathbf{X}}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{Z}} - \frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q}_{d_2} \quad (16.28)$$

L'expression précédente souligne que la partie intrinsèque de la source de dissipation est le résultat des phénomènes de plasticité et/ou d'écroutissage. Le système considéré étant fermé, la partie extrinsèque est seulement due aux transferts thermiques. Cette dernière expression indique également qu'une loi de comportement plastique requiert des relations d'évolution pour les différentes variables internes (déformation plastique et variables d'écroutissage) ainsi que pour la densité surfacique de flux de chaleur.

L'expression précédente montre également que les forces thermodynamiques, qui provoquent les transformations irréversibles, sont (à la masse volumique près) le tenseur des contraintes appliquées Σ , l'opposé du tenseur des contraintes qui représente l'écroutissage cinématique $-\mathbf{X}$, l'opposé de la contrainte scalaire qui représente l'écroutissage isotrope $-R$ et l'opposé du gradient du logarithme de la température $-\nabla_{\mathbf{x}} \ln T$.

Il est possible de proposer des relations d'évolution en considérant le second principe de la thermodynamique comme la seule restriction (i.e. la source de dissipation doit être positive). Si une telle approche offre de nombreuses possibilités de modélisation, la symétrie de la matrice des coefficients cinétiques au voisinage de l'équilibre thermodynamique, telle que spécifiée par les relations de réciprocité d'Onsager (voir 12.4.4), n'est pas nécessairement satisfaite.

L'alternative consiste à adopter le cadre des matériaux standards. Les relations d'évolution sont alors obtenues à partir d'un potentiel de dissipation dont il convient de préciser la forme. Afin d'exploiter le concept de critère de plasticité, qui fait intervenir des grandeurs de contrainte, il est commode de travailler avec le potentiel de dissipation φ qui dépend des forces thermodynamiques (voir 12.4.4). Pour le cas de la plasticité, ce potentiel s'exprime sous la forme générale suivante :

$$\varphi = \hat{\varphi}(\Sigma, \mathbf{X}, R, \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), T) \quad (16.29)$$

Dans la relation précédente, la température n'est pas une force thermodynamique mais une variable d'état introduite pour signifier que l'évolution d'un point matériel dépend possiblement de la température.

Décomposition du potentiel de dissipation L'adoption de l'hypothèse de découplage de la source de dissipation en contributions intrinsèque et extrinsèque (voir 12.4.6) conduit à décomposer le potentiel de dissipation en une partie intrinsèque φ_1 et une partie extrinsèque φ_2 de sorte que :

$$\varphi = \hat{\varphi}_1(\Sigma, \mathbf{X}, R, T) + \hat{\varphi}_2(\nabla_{\mathbf{x}}(\ln T), T) \quad (16.30)$$

Les lois de comportement présentées dans ce qui suit s'appuient sur la loi de Fourier (16.6) dont on a supposé qu'elle permettait d'évaluer la densité surfacique de flux de chaleur. Comme expliqué au Chapitre 13, la partie extrinsèque du potentiel de dissipation est alors donnée par :

$$\varphi_2 = \frac{T}{2\varrho_0} \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) \quad (16.31)$$

Aussi, dès lors que le cadre des matériaux standards est adopté, les relations de comportement qui définissent l'évolution des variables internes se déduisent de la partie intrinsèque du potentiel de dissipation par :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \quad (16.32)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}} \quad (16.33)$$

$$\dot{Q} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \quad (16.34)$$

Le cadre général présenté ici permet de construire un large éventail de lois de comportement qui intègrent à la fois l'effet des conditions de chargement, définies par la température absolue T et l'état de contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$, et de l'histoire, représentée par les grandeurs \mathbf{X} et R .

Plasticité standard et non-standard Une hypothèse de modélisation courante consiste à considérer l'effet de l'état de contrainte sur le processus de déformation plastique uniquement au travers de la contrainte équivalente. Il est en outre légitime de supposer que la dissipation associée à l'écoulement plastique ne dépend que de la distance qui sépare la contrainte équivalente de la limite d'élasticité. Cette distance est usuellement mesurée par une fonction F , appelée fonction de charge, telle que :

$$F(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{X}, R, T) = \Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}) - \Sigma_y(R, T) \quad (16.35)$$

Comme le souligne la définition précédente, la température peut intervenir dans la fonction de charge au travers de la limite d'élasticité initiale. La fonction de charge est utile en cela qu'elle permet de comparer la sévérité du chargement à la résistance qu'oppose un point matériel à l'écoulement plastique. Ce choix de modélisation, lorsqu'il est réalisé dans le cadre des matériaux standards, conduit à écrire la partie intrinsèque du potentiel de dissipation φ_1 sous la forme :

$$\varphi_1 = \hat{\varphi}_1(F(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{X}, R, T), \mathbf{X}, R, T) \quad (16.36)$$

La convexité de φ_1 par rapport aux forces thermodynamiques, condition nécessaire à la positivité de la source de dissipation, requiert que la fonction de charge F soit une fonction convexe de ces mêmes forces et que la fonction $\hat{\varphi}_1$ soit une fonction convexe et croissante de la fonction de charge. Par

dérivation en chaîne, on déduit de (16.36) que la relation d'évolution pour le tenseur des déformations plastiques prend la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \varrho_0 \underbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \Sigma_{eq}}}_{\dot{P}} \underbrace{\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \mathbf{\Sigma}}}_{\mathbf{M}} \quad (16.37)$$

La relation (16.37) montre que l'approche standard conduit à un écoulement plastique associé puisque la direction d'écoulement plastique est obligatoirement colinéaire au gradient de la contrainte équivalente par rapport au tenseur des contraintes. En revanche, un modèle de plasticité associée n'est pas nécessairement le résultat de l'utilisation du cadre des matériaux standards. Aussi, la comparaison avec la relation générale (16.18) permet d'établir que, dans le cas de la plasticité standard, le multiplicateur plastique \dot{P} est donné par :

$$\dot{P} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \Sigma_{eq}} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial F} \quad (16.38)$$

Il convient de préciser que la positivité du multiplicateur plastique est garantie par le fait que le potentiel de dissipation est une fonction croissante de la fonction de charge (donc de la contrainte équivalente). Si on sort du cadre des matériaux standards, la relation de comportement précédente, qui fournit le multiplicateur plastique, ne dérive pas d'un potentiel de dissipation. Elle est alors construite, généralement sur la base d'observations expérimentales, dans le respect du second principe de la thermodynamique.

Dans le contexte des matériaux standards, les relations d'évolution associées aux variables d'érouissage cinématique et isotrope sont données par :

$$\dot{\mathbf{Z}} = -\varrho_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \Sigma_{eq}} \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}} \right) = \dot{\mathbf{Z}}_p + \dot{\mathbf{Z}}_s \quad (16.39)$$

$$\dot{Q} = -\varrho_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \Sigma_y} \frac{\partial \Sigma_y}{\partial R} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right) = \dot{Q}_p + \dot{Q}_s \quad (16.40)$$

Ces relations soulignent que l'évolution des variables d'érouissage cinématique et isotrope peut se décomposer en deux contributions. La première contribution, à laquelle est associée l'indice p , est le résultat de la plasticité. Cette contribution traduit le fait que le développement de la déformation plastique participe à l'érouissage, ce qui est particulièrement

visible si on remarque que :

$$\dot{\mathbf{Z}}_p = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \Sigma_{eq}} \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\mathbf{E}}_p \quad (16.41)$$

$$\dot{Q}_p = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \Sigma_y} \frac{\partial \Sigma_y}{\partial R} = \dot{P} \quad (16.42)$$

La seconde contribution, à laquelle on associe l'indice s , est parfois qualifiée de statique. Elle représente le fait que l'état d'écroutissage d'un point matériel est susceptible d'évoluer sans que l'état de déformation plastique ne change. La contribution statique est souvent importante à haute température. Elle est par exemple essentielle lorsqu'on souhaite appréhender l'effet d'un traitement thermique sur le processus de déformation plastique conduit ultérieurement.

Lorsqu'on sort du cadre des matériaux standards, il est toujours possible de décomposer les dérivées temporelles des variables d'écroutissage en contributions plastique et statique :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{Z}}_p + \dot{\mathbf{Z}}_s \quad (16.43)$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_p + \dot{Q}_s \quad (16.44)$$

Il convient néanmoins de préciser que, parce qu'elles ne dérivent pas d'un potentiel de dissipation, la contribution de la plasticité à l'évolution de la variable d'écroutissage cinématique n'est pas nécessairement égale au taux de déformation plastique. De même, pour la variable d'écroutissage isotrope, la contribution plastique ne correspond pas forcément au multiplicateur plastique.

De la viscoplasticité à la plasticité Lorsque le cadre des matériaux standards est utilisé pour l'écriture des modèles de comportement de plasticité, le multiplicateur plastique est donné par la dérivée du potentiel de dissipation par rapport à la fonction de charge. Puisque le potentiel de dissipation est une fonction convexe de cette dernière, on en déduit que :

$$\frac{\partial \dot{P}}{\partial \Sigma_{eq}} = \frac{\partial \dot{P}}{\partial F} \quad (16.45)$$

$$= \varrho_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial F^2} \geq 0 \quad (16.46)$$

L'analyse précédente souligne que le multiplicateur plastique est une fonction croissante de la contrainte équivalente. Conformément aux observations expérimentales, cela indique que le multiplicateur plastique est d'autant plus élevé que, toute chose égale par ailleurs, la contrainte équivalente est importante. Aussi, on peut remarquer que la dérivée $\partial \dot{P} / \partial \Sigma_{eq}$ est une mesure de la sensibilité à la vitesse de déformation plastique. Pour un état donné, cette dérivée fournit en effet une information quant à l'impact d'une variation de contrainte sur la variation du taux de déformation plastique.

Pour les matériaux standards, la Figure 16.13 montre que la sensibilité à la vitesse de déformation plastique est contrôlée par la dépendance du potentiel de dissipation vis-à-vis de la contrainte équivalente (souvent au travers de la fonction de charge). La sensibilité à la vitesse de déformation est d'autant plus grande que la variation de contrainte équivalente induite par une variation du taux de déformation plastique (i.e. du multiplicateur plastique) est élevée. Le cas extrême où le comportement plastique est insensible à la vitesse de déformation plastique correspond à la situation asymptotique où le potentiel de dissipation est la fonction indicatrice du domaine d'élasticité :

$$\varphi_1 = \text{ind}_{\mathcal{C}} = \begin{cases} 0, & \text{si } F = \Sigma_{eq} - \Sigma_y \leq 0 \\ \infty, & \text{si } F = \Sigma_{eq} - \Sigma_y > 0 \end{cases} \quad (16.47)$$

où \mathcal{C} désigne l'ensemble des états de contrainte qui appartiennent au domaine d'élasticité. Cette forme particulière du potentiel de dissipation, qui est alors une fonction positivement homogène du premier degré de la contrainte équivalente, correspond au cas de la plasticité indépendante du temps. La sensibilité à la vitesse de déformation plastique est alors nulle. Aussi, puisque la partie intrinsèque du potentiel de dissipation ne dépend que de la fonction de charge, la contribution statique à l'évolution des variables d'écroûissage est inexistante.

Pour le cas particulier de la plasticité indépendante du temps, le potentiel de dissipation n'est pas dérivable lorsque Σ_{eq} est égal à Σ_y . L'utilisation de la notion de sous-différentiel permet néanmoins de considérer trois situations possibles pour le multiplicateur plastique :

$$\dot{P} \begin{cases} = 0, & \text{si } F = \Sigma_{eq} - \Sigma_y < 0 \\ \geq 0, & \text{si } F = \Sigma_{eq} - \Sigma_y = 0 \\ = \emptyset, & \text{si } F = \Sigma_{eq} - \Sigma_y > 0 \end{cases} \quad (16.48)$$

La première situation ci-dessus correspond au cas où l'état de contrainte est

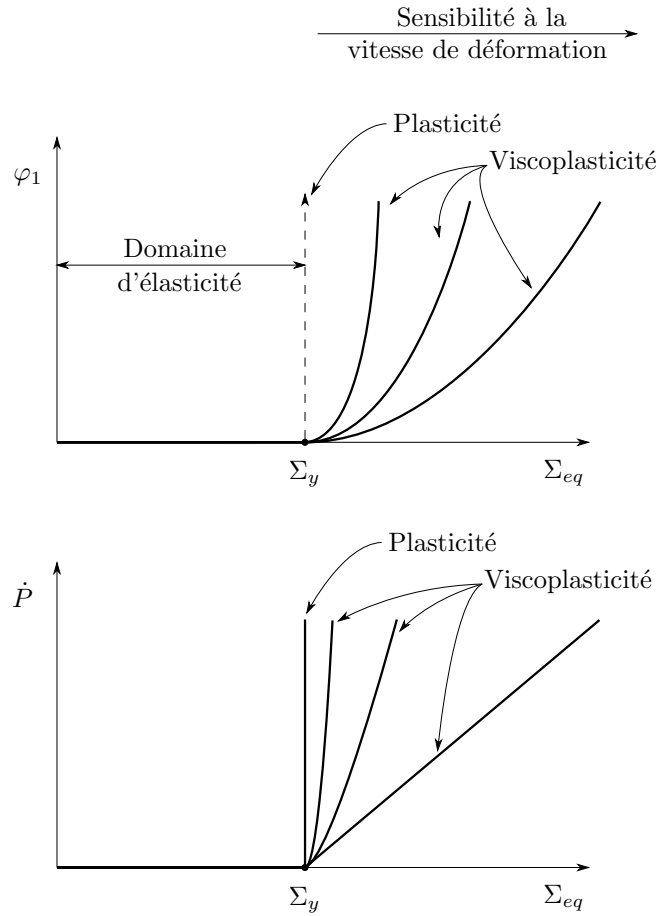


Figure 16.13: Représentation schématique de la dépendance du potentiel de dissipation vis-à-vis de la contrainte équivalente pour différentes sensibilités à la vitesse de déformation (haut). Représentation schématique de la dépendance du multiplicateur plastique vis-à-vis de la contrainte équivalente pour différentes sensibilités à la vitesse de déformation (bas). Le domaine d'élasticité d'un point matériel correspond à l'ensemble des contraintes équivalentes qui sont inférieures à la limite d'élasticité.

à l'intérieur du domaine d'élasticité, i.e. aucune nouvelle déformation plastique n'est alors produite. Le second cas est celui où la contrainte équivalente est égale à la limite d'élasticité, l'écoulement plastique est donc possible. Le multiplicateur plastique peut alors prendre n'importe quelle valeur positive. Le dernier cas montre que, pour le cas particulier de la plasticité indépendante du temps, aucun multiplicateur plastique ne permet d'obtenir une contrainte équivalente qui dépasse la limite d'élasticité. En d'autres termes, à la différence de la viscoplasticité, la contrainte équivalente ne peut excéder la limite d'élasticité dans le cadre de la plasticité indépendante du temps.

L'analyse précédente montre que, pour la plasticité indépendante du temps, la fonction de charge est négative, éventuellement nulle, mais jamais strictement positive. Cela conduit à écrire que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } F < 0, & \text{alors } \dot{P} = 0 \\ \text{si } F = 0 \text{ et } \dot{F} < 0, & \text{alors } \dot{P} = 0 \\ \text{si } F = 0 \text{ et } \dot{F} = 0, & \text{alors } \dot{P} > 0 \end{array} \right. \quad (16.49)$$

Comme illustré par la Figure 16.14, lorsque la fonction de charge est négative, le multiplicateur plastique est nul. Comme déjà évoqué précédemment, cela correspond au cas où l'état de contrainte est à l'intérieur du domaine d'élasticité. Lorsque la fonction de charge est nulle, l'état de contrainte autorise le processus de déformation plastique. Néanmoins, pour décider si la déformation plastique est effectivement réalisée, il faut distinguer deux situations à partir de la dérivée temporelle de la fonction de charge. En particulier, si cette dérivée \dot{F} est strictement négative, cela correspond à une situation de décharge élastique. L'état de contrainte retourne ainsi vers l'intérieur du domaine d'élasticité et aucune déformation plastique n'est créée. En revanche, si la fonction de charge et sa dérivée temporelle sont nulles, les déformations plastiques s'accumulent. Dans une telle situation, le multiplicateur plastique est tel que le point matériel reste sur la surface de charge. Pour un incrément de déformation et de température, le multiplicateur plastique est alors donné par la solution de l'équation $\dot{F} = 0$. Cette dernière condition, dite condition de cohérence, est importante dans le cadre de la plasticité indépendante du temps. Elle permet de préciser la valeur du multiplicateur plastique quand les conditions de l'écoulement plastique sont réunies.

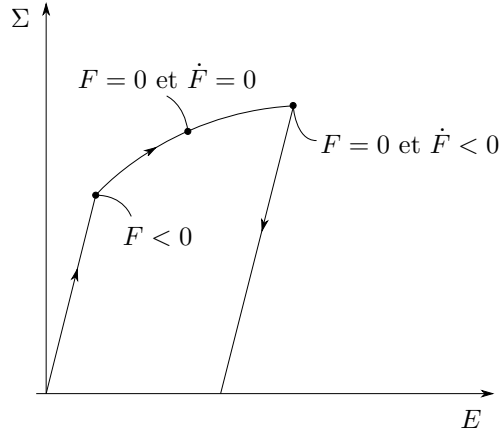


Figure 16.14: Représentation schématique des différentes situations possibles en plasticité indépendante du temps lors d'un trajet de chargement.

16.6.3 Coefficient de Taylor-Quinney

Dans le cas de la plasticité, l'utilisation de la décomposition additive du tenseur des déformations (16.1) permet d'exprimer la puissance de déformation spécifique comme suit :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}_{th} + \frac{1}{\varrho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}_p \quad (16.50)$$

Cette dernière relation montre que, au cours d'un trajet de déformation, la puissance développée par les efforts internes participe aux processus de déformation élastique, thermique et plastique. L'intégration par rapport au temps de la partie plastique de la puissance de déformation spécifique permet d'évaluer le travail plastique spécifique w_p :

$$w_p = \frac{1}{\varrho_0} \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}_p d\tau \quad (16.51)$$

Pour un point matériel régulier, le travail plastique spécifique correspond à la quantité d'énergie qui, par unité de masse, a été dépensée pour réaliser les déformations plastiques.

À cause du caractère irréversible du processus de déformation plastique, une partie de l'énergie transférée à un point matériel est dissipée sous forme

de chaleur. L'utilisation de la relation (16.28) permet d'évaluer l'énergie dissipée spécifique w_d à partir de :

$$w_d = \frac{1}{\varrho_0} \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}_p d\tau - \frac{1}{\varrho_0} \int_{t_0}^t \mathbf{X} : \dot{\mathbf{Z}} d\tau - \frac{1}{\varrho_0} \int_{t_0}^t R \dot{Q} d\tau \quad (16.52)$$

La relation précédente est intéressante en cela qu'elle montre que l'énergie dépensée pour la réalisation des déformations plastiques n'est pas intégralement dissipée sous forme de chaleur. Il existe en effet une partie du travail plastique qui, à cause des transformations microstructurales induites par l'érouissage, est stockée sous forme d'énergie interne. L'énergie stockée spécifique par érouissage w_s (avec $w_p = w_d + w_s$) est ainsi donnée par :

$$w_s = \frac{1}{\varrho_0} \int_{t_0}^t \mathbf{X} : \dot{\mathbf{Z}} d\tau + \frac{1}{\varrho_0} \int_{t_0}^t R \dot{Q} d\tau \quad (16.53)$$

Afin d'évaluer la fraction du travail plastique qui est dissipée sous forme de chaleur, Taylor and Quinney (1934) ont introduit un coefficient sans dimension β , dit coefficient de Taylor-Quinney, défini par :

$$\beta = \frac{w_d}{w_p} \quad (16.54)$$

Pour un matériau donné, le coefficient de Taylor-Quinney n'est pas une constante. Comme illustré par la Figure 16.15, il dépend notamment du mode de sollicitation et de la quantité de déformation plastique accumulée. Sous certaines conditions, le coefficient de Taylor-Quinney peut dépasser l'unité. Ceci se produit lorsque, au cours d'un trajet de déformation, une partie de l'énergie interne stockée par érouissage est libérée.

16.7 Exemples de modèles de comportement

Dans ce qui suit, quelques modèles de comportement sont présentés à titre d'exemple. Il ne s'agit pas d'être exhaustif mais plutôt de montrer les possibilités offertes par le cadre général précédemment exposé.

16.7.1 Viscoplasticité standard avec érouissage mixte

Dans cette section, les différents ingrédients permettant de construire un modèle viscoplastique avec seuil à partir du cadre des matériaux standards

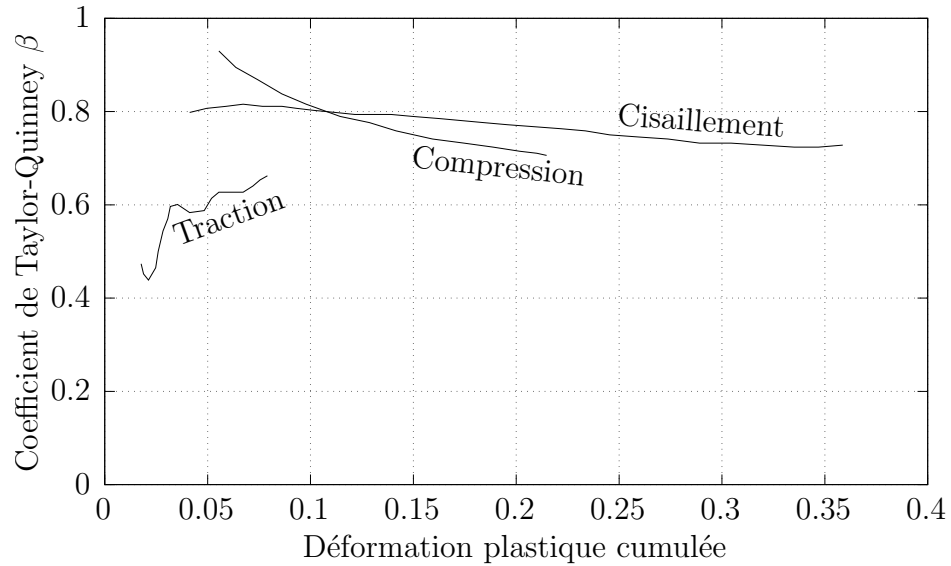


Figure 16.15: Évolution du coefficient de Taylor-Quinney en fonction de la déformation plastique cumulée pour du titane pur pour différents modes de sollicitation (d'après [Rittel et al. \(2017\)](#)).

sont présentés. Parce que ce modèle utilise un écrouissage mixte, il convient de préciser la contribution de l'écrouissage à l'énergie libre. Une expression possible pour cette contribution, qui fait intervenir les variables d'écrouissage isotrope et cinématique, consiste à adopter la forme suivante :

$$a_{ec} = \frac{1}{\varrho_0} \frac{H}{n+1} Q^{n+1} + \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{Z} : \mathbb{K} : \mathbf{Z} \quad (16.55)$$

où H est le module d'écrouissage isotrope, n est le coefficient d'écrouissage et \mathbb{K} est le tenseur des modules d'écrouissage cinématique. La relation précédente suppose que la contribution de l'écrouissage isotrope est découplée de celle due à l'écrouissage cinématique. Aussi, parce que les phénomènes d'écrouissage sont largement dépendant de la température, il est nécessaire de considérer l'éventuel effet de la température sur les modules d'écrouissage \mathbb{K} et H dès lors qu'un processus thermodynamique implique d'importantes variations de la température.

Outre la relation d'état (16.3) qui fournit l'état de contrainte, la définition

de l'énergie libre fournit également l'expression de l'entropie spécifique s :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} = -\frac{\partial a_{te}}{\partial T} - \frac{\partial a_{ec}}{\partial T} \quad (16.56)$$

$$\begin{aligned} &= s_0 + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta - \frac{1}{2\rho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \\ &+ \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E}_{th} + \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right) \quad (16.57) \\ &- \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{Z} : \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial T} : \mathbf{Z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{n+1} \frac{\partial H}{\partial T} Q^{n+1} \end{aligned}$$

La relation précédente est semblable à celle établie dans le cadre de la thermoélasticité (voir Chapitre 14), à ceci près que l'écouissage fournit une contribution supplémentaire à l'entropie. Il convient néanmoins de préciser que l'expression précédente suppose que le coefficient d'écouissage n ne dépend pas de la température.

La relation d'état associée à la contrainte cinématique \mathbf{X} , qui indique la position du domaine d'élasticité, est :

$$\mathbf{X} = \rho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{Z}} = \rho_0 \frac{\partial a_{ec}}{\partial \mathbf{Z}} \quad (16.58)$$

$$= \mathbb{K} : \mathbf{Z} \quad (16.59)$$

De manière analogue, la relation d'état qui fournit la contrainte scalaire R , qui mesure l'expansion ou la contraction du domaine d'élasticité, est :

$$R = \rho_0 \frac{\partial a}{\partial Q} = \rho_0 \frac{\partial a_{ec}}{\partial Q} \quad (16.60)$$

$$= H Q^n \quad (16.61)$$

Si on utilise le critère de von Mises, l'expression de la fonction de charge, lorsqu'elle intègre l'écouissage isotrope et l'écouissage cinématique, est donnée par :

$$F = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}) : (\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}) - \Sigma_0 - R} \quad (16.62)$$

Dans le cas d'un matériau standard, la construction des relations d'évolution pour les variables d'écouissage s'appuie sur la partie intrinsèque du potentiel

de dissipation. Une approche courante consiste à utiliser une fonction φ_1 qui ne dépend que de la seule fonction de charge :

$$\varphi_1 = \frac{1}{\varrho_0} \frac{K}{1/m + 1} \left(\frac{\langle F \rangle_+}{K} \right)^{1/m+1} \quad (16.63)$$

où K est un paramètre de viscosité et m est un coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. Ces paramètres peuvent éventuellement inclure une dépendance à la température. L'utilisation de la relation (16.38) permet d'établir que le multiplicateur plastique \dot{P} est donné par :

$$\dot{P} = \left(\frac{\langle F \rangle_+}{K} \right)^{1/m} \quad (16.64)$$

La loi d'écoulement plastique précédente correspond à un exemple de viscoplasticité à seuil. La notion de seuil est due au fait qu'il est nécessaire de dépasser la limite d'élasticité, auquel cas la fonction de charge F est strictement positive, pour qu'il y ait écoulement plastique. Ce modèle d'écoulement viscoplastique est assez similaire à celui proposé par [Perzyna \(1966\)](#) qui correspond au cas particulier où m est égal à l'unité.

Aussi, si on utilise le critère de von Mises, l'adoption du cadre des matériaux standards conduit à un écoulement plastique associé. La direction d'écoulement plastique, ainsi déduite du critère de von Mises (voir [Tableau 16.1](#)), permet d'établir que le taux de déformation plastique s'exprime :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}}{\Sigma_{eq}} \left(\frac{\langle F \rangle_+}{K} \right)^{1/m} \quad (16.65)$$

L'utilisation d'une contrainte équivalente qui ne dépende que de la partie déviatorique du tenseur des contraintes conduit à une déformation plastique purement déviatorique.

La partie intrinsèque du potentiel de dissipation ne dépendant des variables d'écoulement qu'au travers de la fonction de charge, il n'y a pas de contribution statique à l'évolution des variables d'écoulement. Les relations d'évolution associées aux variables d'écoulement sont ainsi simplement données par :

$$\dot{\mathbf{Z}} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\mathbf{E}}_p \quad (16.66)$$

$$\dot{Q} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \dot{P} \quad (16.67)$$

L'évolution de la variable d'écouissage cinématique est identique à celle de la déformation plastique. La combinaison des relations (16.59) et (16.66) montre que les choix de modélisation réalisés conduisent à un écouissage cinématique linéaire au sens où⁵ :

$$\mathbf{X} = \mathbb{K} : \mathbf{E}_p \quad (16.68)$$

Puisque la déformation plastique est purement déviatorique, on déduit de la relation précédente que seule la partie déviatorique du tenseur des modules d'écouissage cinématique affecte le comportement. Dans la cas particulier où les propriétés sont isotropes et l'écoulement plastique est purement déviatorique, le tenseur des modules d'écouissage cinématique est construit à partir d'une seule grandeur scalaire C (avec $\mathbb{K} = C \mathbb{P}_{\text{dev}}$). Aussi, le rôle de l'écouissage cinématique sur le comportement disparaît dès lors que le tenseur des modules d'écouissage cinématique est nul.

En associant les relations (16.61) et (16.67), on constate que l'écouissage isotrope est décrit par une relation de type puissance puisque⁶ :

$$R = HP^n \quad (16.69)$$

La relation précédente est souvent utilisée pour décrire l'écouissage des matériaux métalliques. L'absence de contribution isotrope à l'écouissage correspond au cas particulier où le module d'écouissage H est nul.

Lorsque l'écoulement plastique se produit, il est possible de combiner les relations de comportement pour décomposer la contrainte équivalente en une somme de différentes contributions :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}) = \Sigma_0 + HP^n + K\dot{P}^m \text{ si } \dot{P} > 0 \quad (16.70)$$

La relation précédente souligne le caractère additif du modèle de comportement présenté. En effet, la contrainte équivalente est la résultante de trois contributions : la limite d'élasticité initiale, l'écouissage et la viscosité. Il est intéressant de remarquer que, si la contribution de l'écouissage dépend

⁵On suppose que les valeurs initiales du tenseur de déformation plastique \mathbf{E}_p et de la variable d'écouissage cinématique \mathbf{Z} sont égales. Il est néanmoins possible, en particulier pour considérer une histoire de chargement préalable, de considérer une variable d'écouissage cinématique dont la valeur initiale ne coïncide pas avec la déformation plastique initiale (généralement prise nulle).

⁶De manière analogue à la loi d'écouissage cinématique, la valeur initiale de la variable d'écouissage cinématique est supposée identique à celle du multiplicateur plastique.

de la déformation plastique cumulée, la contribution d'origine visqueuse est dépendante du multiplicateur plastique, i.e. de la vitesse à laquelle la déformation plastique est accumulée. Aussi, la relation précédente illustre le fait que le comportement d'un point matériel vis-à-vis de l'écouissage est contrôlé par le module d'écouissage H et le coefficient d'écouissage n . De manière semblable, l'effet de la vitesse d'accumulation de déformation plastique sur le comportement dépend du paramètre de viscosité K et du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation m .

Dans le contexte de la plasticité standard, dès lors que la contribution statique à l'évolution des variables d'écouissage est inexistante, la partie intrinsèque de la source de dissipation spécifique s'exprime alors :

$$d_1 = \frac{1}{\varrho_0} (\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}) - R) \dot{P} \quad (16.71)$$

Démonstration Pour démontrer la relation (16.71), il faut d'abord remarquer que, quel que soit le critère utilisé, la contrainte équivalente est une fonction positivement homogène de degré un de l'état de contrainte, i.e. :

$$\Sigma_{eq}(\alpha \boldsymbol{\Sigma} - \alpha \mathbf{X}) = \alpha \Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}), \forall \alpha > 0$$

L'utilisation du théorème d'Euler pour les fonctions positivement homogènes de degré un permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}) &= \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial (\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X})} : (\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}) \\ &= \mathbf{M} : (\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{X}) \end{aligned}$$

Dans le cadre de la plasticité avec écouissage, la partie intrinsèque de la source de dissipation spécifique est donnée par:

$$d_1 = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{R}{\varrho_0} \dot{Q} - \frac{\mathbf{X}}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{Z}}$$

L'utilisation des résultats précédents ainsi que des relations d'évolution $\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{\mathbf{Z}} = \dot{P} \mathbf{M}$ et $\dot{Q} = \dot{P}$ permet de reformuler la relation précédente pour retrouver (16.71).

À titre d'illustration, le modèle viscoplastique à seuil est utilisé pour décrire

le comportement d'un acier bas carbone. Les résultats obtenus en traction uniaxiale isotherme à différentes vitesses de déformation sont présentés sur la Figure 16.16. Les différents paramètres du modèle (plasticité et écrouissage) ont été ajustés afin de reproduire les observations expérimentales en supposant que l'écrouissage est de nature purement isotrope. Afin d'illustrer les conséquences thermodynamiques d'un processus de déformation, l'évolution du coefficient de Taylor-Quinney est représentée sur la Figure 16.17.

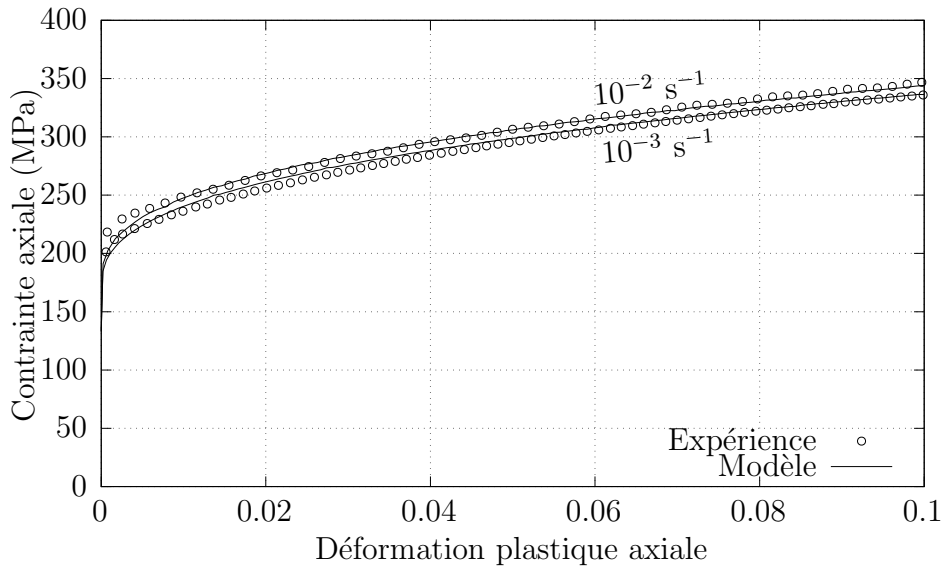


Figure 16.16: Évolution de la contrainte axiale de Hencky en fonction de la déformation plastique axiale de Hencky en traction uniaxiale pour différents taux de déformation pour un acier bas carbone. Les résultats obtenus à partir du modèle viscoplastique additif à seuil sont représentés par des traits continus. Les données expérimentales sont représentées par des points.

16.7.2 Viscoplasticité non-standard avec écrouissage isotrope

Le modèle de [Johnson and Cook \(1983\)](#) est souvent utilisé pour décrire le comportement des matériaux solides soumis à des conditions de chargement extrêmes. Il s'agit d'un modèle viscoplastique à seuil dont le développement ne s'appuie pas sur le cadre des matériaux standards. Une version modifiée de ce modèle est présentée dans les paragraphes suivants.

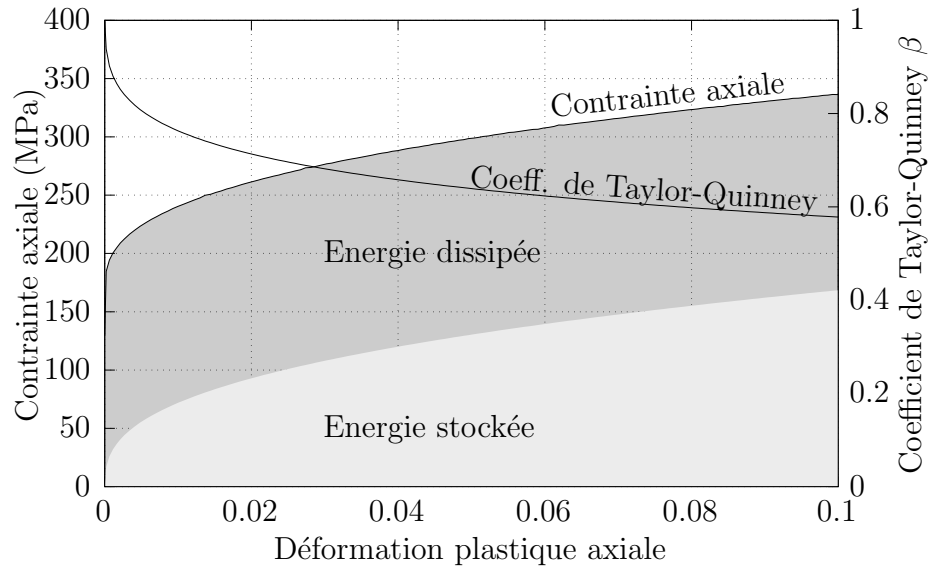


Figure 16.17: Évolution de la contrainte axiale de Hencky et du coefficient de Taylor-Quinney en fonction de la déformation plastique axiale de Hencky en traction uniaxiale pour un taux de déformation de 10^{-3} s^{-1} pour un acier bas carbone. La densité d'énergie dissipée et la densité d'énergie stockée sont représentés par les surfaces grisées. Les résultats ont été obtenus à partir du modèle viscoplastique additif à seuil.

Parce qu'il n'utilise qu'un écrouissage isotrope, la contribution de l'écrouissage à l'énergie libre ne dépend que de la variable d'écrouissage isotrope :

$$a_{ec} = \frac{1}{\rho_0} \frac{H}{n+1} Q^{n+1} \quad (16.72)$$

où H est le module d'écrouissage isotrope et n est le coefficient d'écrouissage. Comme pour le modèle précédent, le modèle de Johnson-Cook suppose que le module d'écrouissage dépend de la température alors que l'effet de la température sur le coefficient d'écrouissage n'est pas considéré.

La contribution de l'écrouissage à l'énergie libre, lorsqu'elle est additionnée à celle de la thermoélasticité, permet d'obtenir les différentes relations d'état.

L'entropie spécifique s s'exprime ainsi :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} = -\frac{\partial a_{te}}{\partial T} - \frac{\partial a_{ec}}{\partial T} \quad (16.73)$$

$$= s_0 + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + \frac{1}{\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E}_{th} + \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right) \quad (16.74)$$

$$- \frac{1}{2\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) - \frac{1}{\varrho_0} \frac{1}{n+1} \frac{\partial H}{\partial T} Q^{n+1}$$

La contrainte scalaire R , qui est la variable duale de la variable d'écouissage isotrope, est donnée par la relation d'état :

$$R = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial Q} = \varrho_0 \frac{\partial a_{ec}}{\partial Q} \quad (16.75)$$

$$= H Q^n \quad (16.76)$$

avec :

$$H = B \left(1 - \frac{T^m - T_0^m}{T_m^m - T_0^m} \right) \quad (16.77)$$

où B correspond à la valeur à la température de référence T_0 du module d'écouissage isotrope. La température de fusion du matériau considéré est notée T_m et l'exposant m est un coefficient sans dimension. Ces différents paramètres permettent d'appréhender l'adoucissement thermique induit par une élévation de température.

Le modèle de Johnson-Cook modifié suppose que l'effet de la température sur la limite d'élasticité initiale Σ_0 est décrit de manière semblable au module d'écouissage :

$$\Sigma_0 = A \left(1 - \frac{T^m - T_0^m}{T_m^m - T_0^m} \right) \quad (16.78)$$

où A est la limite d'élasticité initiale à la température de référence. En combinant les relations précédentes, on obtient que la limite d'élasticité $\Sigma_y = \Sigma_0 + R$ d'un point matériel est donnée par :

$$\Sigma_y = (A + BQ^n) \left(1 - \frac{T^m - T_0^m}{T_m^m - T_0^m} \right) \quad (16.79)$$

Dans sa version modifiée, le modèle de Johnson-Cook utilise une loi d'écoulement plastique de la forme suivante :

$$\dot{P} = \begin{cases} \dot{P}_0 \exp\left(\frac{\Sigma_{eq} - \Sigma_y}{C\Sigma_y}\right) - \dot{P}_0, & \text{si } \Sigma_{eq} \geq \Sigma_y \\ 0, & \text{si } \Sigma_{eq} < \Sigma_y \end{cases} \quad (16.80)$$

La loi d'écoulement plastique fait intervenir deux paramètres supplémentaires. Spécifiquement, C est un paramètre qui contrôle la sensibilité à la vitesse de déformation et \dot{P}_0 est une vitesse de déformation de référence.

Si le modèle de Johnson-Cook utilise généralement le critère de von Mises, il est tout à fait possible d'utiliser un autre critère pour la construction des relations de comportement. Par exemple, avec le critère de Drucker-Prager, la contrainte équivalente en l'absence de contribution cinématique à l'écrouissage est donnée par (16.12). Aussi, si l'écoulement plastique est supposé associé, la direction d'écoulement plastique (voir Tableau 16.1) s'exprime :

$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}}}{\|\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}}\|} + A \mathbf{1} \quad (16.81)$$

Le taux de déformation plastique est alors obtenu en multipliant le multiplicateur plastique par la direction d'écoulement.

Pour le modèle de Johnson-Cook, la relation d'évolution pour la variable d'écrouissage isotrope est simplement donnée par :

$$\dot{Q} = \dot{P} \quad (16.82)$$

L'intégration dans le temps de la relation précédente (avec $Q(t_0) = P(t_0)$ comme condition initiale) permet d'obtenir la forme habituelle du modèle de Johnson-Cook. En associant l'expression de la limite d'élasticité à la loi d'écoulement plastique, on obtient que, lorsque les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont réunies, la contrainte équivalente est donnée par :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = (A + BP^n) \left(1 - \frac{T^m - T_0^m}{T_m - T_0^m}\right) \left(1 + C \ln\left(1 + \frac{\dot{P}}{\dot{P}_0}\right)\right) \quad (16.83)$$

si $\dot{P} > 0$

Remarque Dans sa forme originale, le modèle de [Johnson and Cook \(1983\)](#) suppose que la contrainte équivalente est donnée par une relation de la forme :

$$\Sigma_{eq}(\boldsymbol{\Sigma}) = (A + BP^n) \left(1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^m \right) \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{P}}{\dot{P}_0} \right) \right) \text{ si } \dot{P} \geq \dot{P}_0$$

Cette relation présente deux inconvénients. D'abord, le terme qui contrôle l'adoucissement thermique n'est pas forcément calculable lorsque la température est inférieure à sa valeur de référence et que l'exposant m n'est pas entier. Ensuite, la loi d'écoulement présente une discontinuité. En effet, lorsque la contrainte équivalente atteint la limite d'élasticité, le multiplicateur plastique passe d'une valeur nulle à la valeur de référence. En d'autres termes, la forme originale du modèle de Johnson-Cook ne permet pas de décrire le comportement à faible vitesse de déformation plastique (i.e. lorsque $\dot{P} < \dot{P}_0$).

Quand bien même l'écoulement plastique est associé, le modèle de Johnson-Cook est non-standard. Ceci est particulièrement visible lorsqu'on remarque que les dérivées croisées entre certaines des variables flux et des forces thermodynamiques ne sont pas égales. Lorsque les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont réunies, on peut notamment constater que :

$$\varrho_0 \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \neq -\varrho_0 \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}_p}{\partial R} \text{ si } \dot{P} > 0 \quad (16.84)$$

L'absence de symétrie des relations d'évolution souligne que, pour le modèle de Johnson-Cook, ces dernières ne dérivent pas d'un potentiel de dissipation.

À titre d'exemple, les résultats obtenus avec le modèle de Johnson-Cook modifié pour du cuivre sollicité en cisaillement pur sont présentés sur la Figure 16.18. L'effet de la température, qui permet de souligner le phénomène d'adoucissement thermique, est visible sur les différentes courbes contrainte-déformation obtenues en cisaillement.

16.7.3 Plasticité standard avec écrouissage isotrope

Dans ce qui suit, on présente un modèle de plasticité indépendante du temps qui, en s'appuyant sur le cadre des matériaux standards, utilise la

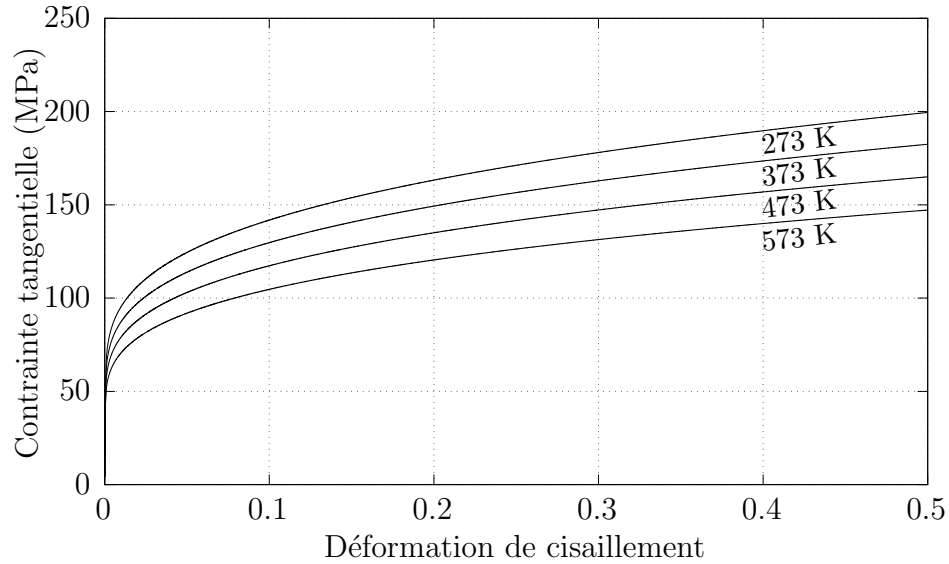


Figure 16.18: Évolution de la contrainte tangentielle de Hencky en fonction de la déformation de cisaillement de Hencky en cisaillement pur pour différentes températures pour du cuivre. Les résultats sont obtenus à partir du modèle de Johnson-Cook modifié pour un taux de déformation en cisaillement de 0.5 s^{-1} .

loi d'écroissage isotrope proposée par [Voce \(1955\)](#). Cette loi repose sur l'hypothèse que l'écroissage isotrope finit par saturer dès lors qu'un point matériel a accumulé suffisamment de déformation plastique.

Parce que l'écroissage cinématique n'est pas considéré, la contribution de l'écroissage à l'énergie libre ne dépend que de la variable d'écroissage isotrope :

$$a_{ec} = \frac{1}{\rho_0} \frac{H}{B} \left(Q + \frac{1}{B} \exp(-BQ) \right) \quad (16.85)$$

Les paramètres H et B sont introduits pour contrôler la description de l'écroissage. Dans ce qui suit, on choisit de considérer que seul le module d'écroissage H dépend de la température, le paramètre B étant indépendant de cette dernière.

On déduit de la définition précédente de l'énergie libre spécifique que

l'entropie spécifique s est donnée par la relation d'état suivante :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} = -\frac{\partial a_{te}}{\partial T} - \frac{\partial a_{ec}}{\partial T} \quad (16.86)$$

$$= s_0 + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + \frac{1}{\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E}_{th} + \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right) - \frac{1}{2\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \quad (16.87)$$

$$- \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial H}{\partial T} \left(\frac{Q}{B} + \frac{1}{B^2} \exp(-BQ) \right)$$

On peut remarquer que, du fait de la dépendance du module d'écroissage isotrope à la température, l'entropie spécifique dépend de l'état d'écroissage.

Pour la contrainte scalaire R , qui mesure l'augmentation de limite d'élasticité, la relation d'état est :

$$R = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial Q} = \varrho_0 \frac{\partial a_{ec}}{\partial Q} \quad (16.88)$$

$$= \frac{H}{B} (1 - \exp(-BQ)) \quad (16.89)$$

La relation précédente montre que le rapport H/B fixe la valeur asymptotique de la contrainte scalaire R tandis que le paramètre B contrôle la vitesse à laquelle on tend vers cette valeur asymptotique. L'utilisation de la relation d'état (16.89) permet d'exprimer la limite d'élasticité comme suit :

$$\Sigma_y = \Sigma_0 + R = \Sigma_0 + \frac{H}{B} (1 - \exp(-BQ)) \quad (16.90)$$

Si on adopte le critère de Hill pour décider si les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont satisfaites, la fonction de charge s'exprime :

$$F = \Sigma_{eq} - \Sigma_y = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{H} : \boldsymbol{\Sigma}} - \Sigma_0 - R \quad (16.91)$$

où \mathbb{H} est le tenseur d'ordre quatre qui permet de considérer l'anisotropie de déformation plastique (voir 16.3). Pour le cas particulier de la plasticité indépendante du temps, le potentiel de dissipation est la fonction indicatrice du domaine d'élasticité, il est donc donné par la relation (16.47). La relation d'évolution pour le taux de déformation plastique est alors de la forme :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \dot{P} \frac{\mathbb{H} : \boldsymbol{\Sigma}}{\Sigma_{eq}} \quad (16.92)$$

La relation d'évolution précédente souligne le caractère associé du modèle utilisé dans la mesure où direction d'écoulement plastique est colinéaire au gradient de la contrainte équivalente (voir Tableau 16.1). Aussi, pour la variable d'écrouissage isotrope, la relation d'évolution est simplement donnée par :

$$\dot{Q} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \dot{P} \quad (16.93)$$

Il est important de rappeler que, dans le cadre de la plasticité indépendante du temps, le potentiel de dissipation n'étant pas dérivable, il ne permet pas d'établir directement l'expression du multiplicateur plastique. Cette dernière se déduit de la condition dite de cohérence. Cette condition traduit le fait que, au cours d'un incrément de déformation plastique, l'état de contrainte reste sur la frontière du domaine d'élasticité. Pour le modèle présenté ici, la condition de cohérence conduit à l'équation :

$$\dot{F} = \dot{\Sigma}_{eq} - \dot{\Sigma}_y = \mathbf{M} : \dot{\Sigma} - \dot{\Sigma}_0 - \dot{R} = 0 \quad (16.94)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbb{H} : \Sigma}{\Sigma_{eq}} \quad (16.95)$$

$$\dot{\Sigma} = \mathbb{C} : \left(\dot{\mathbf{E}} - \alpha \dot{T} - \mathbf{M} \dot{P} \right) \quad (16.96)$$

$$\dot{R} = H \exp(-BQ) \dot{P} + \frac{1}{B} \frac{\partial H}{\partial T} (1 - \exp(-BQ)) \dot{T} \quad (16.97)$$

$$\dot{\Sigma}_0 = \frac{\partial \Sigma_0}{\partial T} \dot{T} \quad (16.98)$$

On en déduit que, lorsque les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont réunies, le multiplicateur plastique s'exprime :

$$\dot{P} = \frac{\mathbf{M} : \mathbb{C} : \left(\dot{\mathbf{E}} - \alpha \dot{T} \right) - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial H}{\partial T} (1 - \exp(-BQ)) + \frac{\partial \Sigma_0}{\partial T} \right) \dot{T}}{\mathbf{M} : \mathbb{C} : \mathbf{M} + H \exp(-BQ)} \quad (16.99)$$

La relation précédente indique que la vitesse de déformation plastique dépend linéairement du taux de déformation et de la vitesse d'évolution de la température. En d'autres termes, au cours d'un processus thermomécanique, l'incrément de déformation plastique dépend des incréments de déformation et de température, mais pas de l'intervalle de temps utilisé pour la réalisation de ces incréments. Cette observation souligne le caractère indépendant du temps du modèle présenté ici.

Remarque Différentes formulations peuvent conduire à des lois d'écroissage identiques avec néanmoins des conséquences thermodynamiques différentes. À titre d'exemple, la loi d'écroissage isotrope de [Voce \(1955\)](#) peut être obtenue en dehors du cadre des matériaux standards à partir des relations d'état et d'évolution suivantes :

$$a_{ec} = \frac{1}{2\rho_0} H Q^2, \quad R = H Q \quad \text{et} \quad \dot{Q} = \dot{P} - B Q \dot{P}$$

Une approche alternative, qui utilise le cadre des matériaux standards, consiste à utiliser les relations d'état et d'évolution suivantes :

$$a_{ec} = \frac{1}{\rho_0} \frac{H}{B} \left(Q + \frac{1}{B} \exp(-BQ) \right), \quad R = \frac{H}{B} (1 - \exp(-BQ)) \quad \text{et} \quad \dot{Q} = \dot{P}$$

Par intégration, en prenant comme conditions initiales $Q(0) = P(0)$, on constate que les deux formulations précédentes conduisent à la loi d'écroissage isotrope saturante de [Voce \(1955\)](#) :

$$R = \frac{H}{B} (1 - \exp(-BP))$$

Il est intéressant de remarquer que, quand bien même la loi d'écroissage est identique, la quantité d'énergie stockée par écroissage isotrope est différente. En effet, lorsque la déformation plastique cumulée tend vers l'infini, la quantité d'énergie libre stockée par écroissage tend vers une valeur finie (i.e. $1/2\rho_0 \times H/B^2$) pour la formulation non-standard tandis que la formulation standard suppose qu'un point matériel peut stocker une quantité d'énergie infinie par écroissage isotrope.

Un exemple d'application du modèle d'écroissage de [Voce \(1955\)](#), couplé avec le critère de [Hill \(1948\)](#), est présenté sur la Figure [16.19](#) pour le cas d'un alliage d'aluminium. Parce que l'alliage a été mis en forme par laminage, les propriétés de déformation plastique sont décrites avec une hypothèse d'orthotropie. Cet exemple illustre le comportement en traction uniaxiale pour différentes directions de sollicitation : direction de laminage, direction transverse et direction intermédiaire (i.e. à 45° par rapport à la direction de laminage).

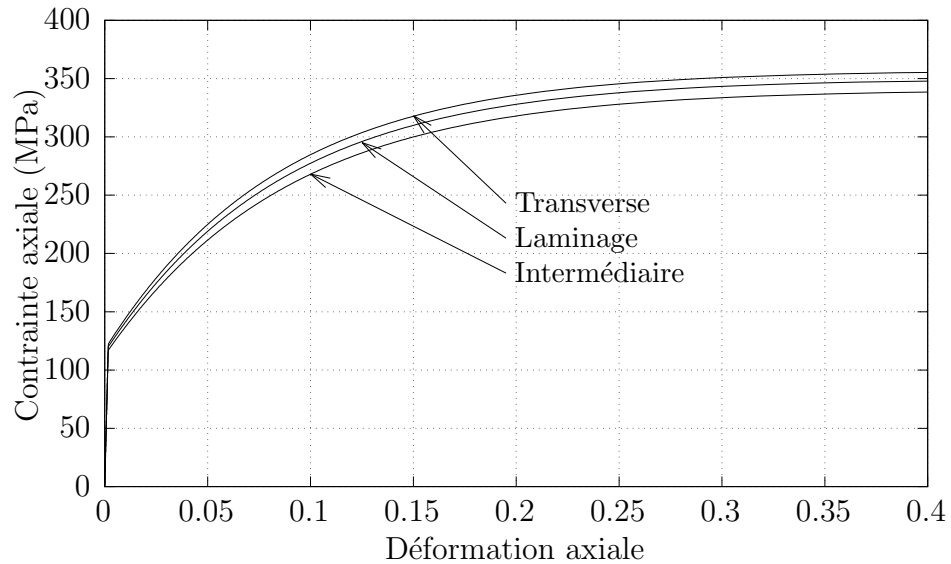


Figure 16.19: Évolution de la contrainte axiale de Hencky en fonction de la déformation axiale de Hencky en traction uniaxiale pour différentes directions de sollicitation (laminage, transverse et intermédiaire). Les résultats sont obtenus pour un alliage d'aluminium laminé à partir du modèle de Voce couplé au critère de Hill en conditions isothermes (pour une température de 293 K).

16.7.4 Plasticité non-standard avec écrouissage cinématique

Pour décrire le comportement, en particulier cyclique, de certains matériaux, il est parfois nécessaire de recourir à des modèles d'écrouissage non-linéaire. Si le cadre des matériaux standards permet de considérer le caractère non-linéaire de l'écrouissage isotrope, la prise en compte de la non-linéarité de la loi d'écrouissage cinématique dans ce cadre est plus délicate. On présente dans ce qui suit un modèle de comportement qui, construit en dehors du cadre des matériaux standards, permet de considérer un écrouissage cinématique non-linéaire qui utilise la formulation proposée par [Armstrong and Frederick \(1966\)](#).

Le point de départ de la construction de ce modèle de comportement est la spécification de l'énergie libre spécifique qui joue le rôle de potentiel d'état. La contribution de l'écrouissage cinématique à l'énergie libre spécifique est

supposée être donnée par une forme quadratique :

$$a_{ec} = \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{Z} : \mathbb{K} : \mathbf{Z} \quad (16.100)$$

où \mathbb{K} est le tenseur des modules d'écroissage cinématique. L'absence d'écroissage cinématique correspond au cas particulier où le tenseur \mathbb{K} est nul.

Dès lors que le tenseur des modules d'écroissage cinématique dépend de la température, l'entropie spécifique est donnée par :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} = -\frac{\partial a_{te}}{\partial T} - \frac{\partial a_{ec}}{\partial T} \quad (16.101)$$

$$\begin{aligned} &= s_0 + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + \frac{1}{\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E}_{th} + \mathbb{C} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right) \\ &- \frac{1}{2\varrho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) - \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{Z} : \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial T} : \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (16.102)$$

La relation d'état qui fournit le tenseur des contraintes \mathbf{X} , qui indique le centre du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes, se déduit de l'énergie libre spécifique par dérivation par rapport à la variable d'écroissage cinématique :

$$\mathbf{X} = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{Z}} = \varrho_0 \frac{\partial a_{ec}}{\partial \mathbf{Z}} \quad (16.103)$$

$$= \mathbb{K} : \mathbf{Z} \quad (16.104)$$

Si le critère de von Mises est adopté, la fonction de charge, qui permet de déterminer si les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont réunies, s'exprime :

$$F = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}) : (\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}})} - \Sigma_0 \quad (16.105)$$

Dans le cas de la plasticité associée, la relation d'évolution pour le tenseur des déformations plastiques est alors de la forme :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}}{\Sigma_{eq}} \dot{P} \quad (16.106)$$

Aussi, il est nécessaire de préciser la relation d'évolution pour la variable d'écroissage cinématique. Un choix possible de modélisation consiste à adopter la formulation proposée par Armstrong et Frederick ([Armstrong and Frederick, 1966](#); [Frederick and Armstrong, 2007](#)), auquel cas la relation d'évolution de la variable d'écroissage cinématique est de la forme :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{E}}_p - D\mathbf{Z}\dot{P} \quad (16.107)$$

Le paramètre D qui intervient dans la relation d'évolution associée à la variable d'écroissage cinématique permet de contrôler la valeur à laquelle sature cette dernière.

Pour le cas particulier de la plasticité indépendante du temps, le multiplicateur plastique est déterminé à partir de la condition de cohérence. Avec les hypothèses de modélisation faites ici, la condition de cohérence conduit à l'équation :

$$\dot{F} = \dot{\Sigma}_{eq} - \dot{\Sigma}_y = \mathbf{M} : (\dot{\Sigma} - \dot{\mathbf{X}}) - \dot{\Sigma}_0 = 0 \quad (16.108)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \frac{3}{2} \frac{\Sigma_{\text{dev}} - \mathbf{X}_{\text{dev}}}{\Sigma_{eq}(\Sigma - \mathbf{X})} \quad (16.109)$$

$$\dot{\Sigma} = \mathbb{C} : (\dot{\mathbf{E}} - \alpha \dot{T} - \mathbf{M}\dot{P}) \quad (16.110)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{K} : (\mathbf{M}\dot{P} - D\mathbf{Z}\dot{P}) + \dot{T} \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial T} : \mathbf{Z} \quad (16.111)$$

$$\dot{\Sigma}_0 = \frac{\partial \Sigma_0}{\partial T} \dot{T} \quad (16.112)$$

On en déduit que, lorsque les conditions nécessaires à l'écoulement plastique sont réunies, le multiplicateur plastique s'exprime :

$$\dot{P} = \frac{\mathbf{M} : \left(\mathbb{C} : (\dot{\mathbf{E}} - \alpha \dot{T}) - \left(\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial T} : \mathbf{Z} \right) \dot{T} \right) - \frac{\partial \Sigma_0}{\partial T} \dot{T}}{\mathbf{M} : \mathbb{C} : \mathbf{M} + \mathbf{M} : \mathbb{K} : (\mathbf{M} - D\mathbf{Z})} \quad (16.113)$$

Aussi, la source de dissipation intrinsèque spécifique est donnée par la relation :

$$d_1 = \frac{\Sigma}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{\mathbf{X}}{\varrho_0} : (\dot{\mathbf{E}}_p - D\mathbf{Z}\dot{P})$$

Puisque le modèle proposé ici est construit en dehors du cadre des matériaux standards, il convient de vérifier que les différentes relations d'évolution sont

compatibles avec le second principe de la thermodynamique. On peut notamment remarquer que la contribution intrinsèque à la source de dissipation est nécessairement positive dès lors que le paramètre D est positif.

La description du comportement cyclique de l'aluminium à partir du modèle à écrouissage cinématique non-linéaire détaillé dans cette section est illustrée par la Figure 16.20. L'évolution de la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale lors d'essais cycliques à déformation imposée est représentée pour différentes amplitudes de déformation. La saturation de l'écrouissage cinématique est particulièrement visible pour l'amplitude de déformation maximale.

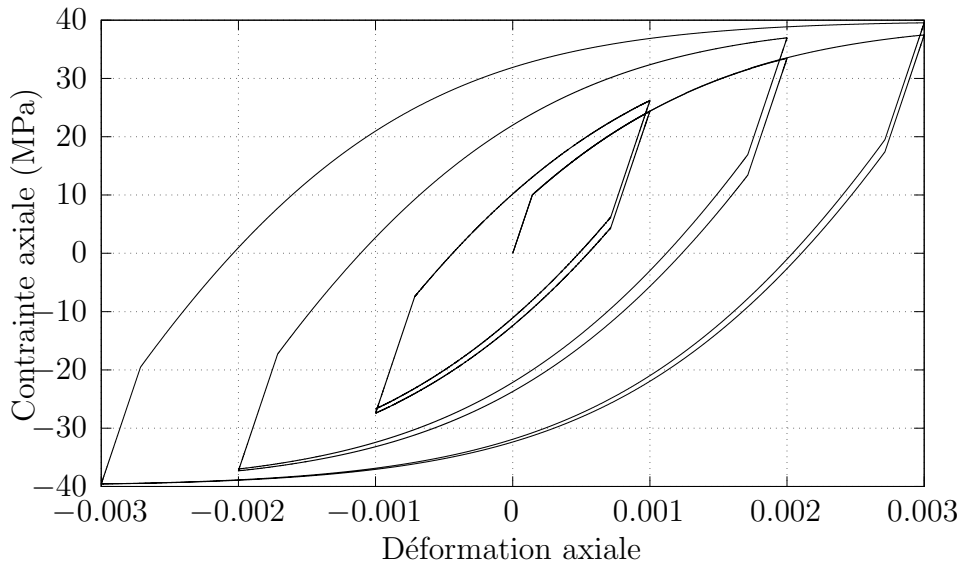


Figure 16.20: Évolution de la contrainte axiale de Hencky en fonction de la déformation axiale de Hencky en traction-compression uniaxiale lors d'essais cycliques à déformation imposée pour différentes amplitudes de déformation (de 0,1% à 0,3%). Les résultats sont obtenus pour de l'aluminium à partir du modèle d'Armstrong-Frederick couplé au critère de von Mises en conditions isothermes (pour une température de 293 K).

Chapitre 17

Rupture et endommagement

Pour de nombreuses situations pratiques, en particulier en ingénierie, il est important de pouvoir prévoir la rupture d'un système. Ceci est par exemple important dans le contexte de la mise en forme des matériaux, notamment pour optimiser les gammes de fabrication, ou lors de la conception des structures, pour estimer la durée de vie d'un composant ou déterminer les chargements limites qu'il est capable de supporter.

Dans ce chapitre, différentes approches permettant de prévoir l'endommagement et la rupture sont présentées. Ces approches sont classées en deux grandes catégories, qui font chacune l'objet d'une partie de ce chapitre. Dans la première partie, quelques critères de rupture, qui correspondent à différents modes d'endommagement (e.g. fatigue, endommagement ductile), sont détaillés. Les critères de rupture s'inscrivent dans une démarche *a posteriori* au sens où ils utilisent l'histoire des variables d'état (e.g. contraintes, déformations, température) associées à un point matériel pour déterminer si les conditions nécessaires à la rupture sont réunies ou non. Une telle approche, si elle a l'avantage de la simplicité, ne permet pas de considérer la dégradation des propriétés provoquée par l'endommagement.

La seconde partie de ce chapitre traite des modèles d'endommagement. Ces modèles forment une famille de lois de comportement qui ont en commun d'intégrer une ou plusieurs variables d'endommagement. Ces dernières sont des variables internes particulières qui permettent de représenter la dégradation des propriétés associées à un point matériel. Une telle ap-

proche permet donc de décrire de manière plus réaliste l'évolution d'un système lors d'un processus d'endommagement. Cela nécessite néanmoins un effort supplémentaire dans la mesure où il est nécessaire de préciser les relations d'état et les relations d'évolution pour les différentes variables d'endommagement.

Remarque Dans la littérature, les critères de rupture sont parfois désignés par le terme de “modèles d'endommagement découplés”. Cela traduit le fait que la description de l'endommagement est découplée de celle du comportement thermomécanique puisque les relations de comportement ne font aucunement intervenir l'endommagement. Par opposition, les modèles d'endommagement qui utilisent des variables internes pour représenter l'endommagement sont qualifiés de “modèles d'endommagement couplés”.

17.1 Critères de rupture

17.1.1 Modes d'endommagement

Le choix d'un critère de rupture adapté à une situation donnée nécessite de préalablement déterminer le mode d'endommagement responsable de la ruine du système étudié. Il existe en effet différents mécanismes physiques susceptibles de conduire à la rupture d'un système. Ces mécanismes dépendent à la fois du matériau considéré et des conditions de chargement appliquées (e.g. température, taux de déformation). Dans ce qui suit, quatre principaux modes d'endommagement sont abordés :

- L'endommagement fragile peut être le résultat de différents mécanismes physiques tels que le clivage ou la décohérence intergranulaire (matériaux cristallins) ou la rupture de fibres (matériaux composites). L'endommagement fragile conduit souvent à des ruptures brutales et les déformations à rupture sont généralement faibles.
- L'endommagement ductile est le résultat de la nucléation puis de la coalescence de cavités. Il se produit lorsque, au cours d'un processus, un point matériel a accumulé de grandes déformations plastiques.
- L'endommagement de fatigue est observé lors de processus impliquant des sollicitations variables dans le temps. La répétition de ces sollicita-

tions conduit à l'amorçage (souvent superficiel) puis à la propagation de fissures. Les observations expérimentales de l'endommagement par fatigue sont généralement réalisées lors d'essais conduit avec des sollicitations périodiques.

- L'endommagement de fluage se produit lorsque la température est élevée. Sous de telles conditions, l'état de contrainte peut être à l'origine d'un lent processus de déformation viscoplastique qui, s'il est permis trop longtemps, aboutit à la formation de fissures.

Dans certaines situations, plusieurs mécanismes physiques (e.g. fatigue et fluage) peuvent participer à la dégradation des propriétés, auquel cas il convient de considérer les interactions entre les différents modes d'endommagement. Ceci est d'autant plus important que ces interactions favorisent parfois le développement de l'endommagement.

17.1.2 Critères de rupture fragile

Critère de Rankine

Le critère de [Rankine \(1857\)](#) suppose que la rupture intervient dès lors que la contrainte principale maximale associée à une mesure tensorielle Σ de l'état de contrainte excède une valeur seuil $\Sigma_t > 0$. Si la possibilité de rupture en compression est également considérée, il faut également s'intéresser à la contrainte principale minimale. La rupture en compression se produit lorsque cette dernière est inférieure à la valeur seuil $\Sigma_c < 0$. Ainsi, lorsque ces deux possibilités sont considérées, le critère de [Rankine \(1857\)](#) s'écrit :

$$\text{Rupture si } \max_{\alpha}(\Sigma_{\alpha}) \geq \Sigma_t \text{ ou } \min_{\alpha}(\Sigma_{\alpha}) \leq \Sigma_c \quad (17.1)$$

En règle générale, on observe que la résistance à la rupture fragile est meilleure en compression qu'en traction (donc $|\Sigma_c| > \Sigma_t$).

Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de [Coulomb \(1776\)](#) stipule que la rupture se produit dès lors qu'il existe une facette pour laquelle la contrainte tangentielle excède une valeur seuil. Toutefois, le critère de [Coulomb \(1776\)](#) suppose que le seuil dépend

de la contrainte normale appliquée sur la facette considérée. Les conditions de rupture selon le critère de **Coulomb (1776)** sont donc données par :

$$\text{Rupture si } \max_{\alpha,\beta} \left(\frac{\Sigma_\alpha - \Sigma_\beta}{2} + A \frac{\Sigma_\alpha + \Sigma_\beta}{2} \right) \geq B \quad (17.2)$$

où A (avec $A > 1$) et B sont des paramètres qui contrôlent la rupture. Plus spécifiquement, le paramètre B correspond à la contrainte tangentielle à rupture en cisaillement pur. Le paramètre A contrôle l'asymétrie du comportement, en particulier le rapport entre les contraintes à rupture en traction et en compression uniaxiale. Ces deux contraintes (notées Σ_t et Σ_c) sont liées aux paramètres A et B par :

$$\Sigma_t = \frac{2B}{1+A} \quad (17.3)$$

$$\Sigma_c = \frac{2B}{A-1} \quad (17.4)$$

La Figure 17.1 montre un exemple d'application du critère de **Coulomb (1776)** dans le cas particulier d'un état de contrainte plan.

Critère de Tsai-Wu

Le critère de **Tsai and Wu (1971)** a été originellement développé pour les matériaux composites afin de rendre compte non seulement du caractère asymétrique de l'endommagement, mais également du caractère anisotrope. Le critère de **Tsai and Wu (1971)** fait intervenir deux tenseurs \mathbf{A} (de rang deux) et \mathbb{Z} (de rang quatre) tels que :

$$\text{Rupture si } \mathbf{A} : \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{Z} : \boldsymbol{\Sigma} \geq 1 \quad (17.5)$$

Le tenseur \mathbf{A} est un tenseur de rang deux symétrique qui contrôle l'asymétrie. Le tenseur de rang quatre \mathbb{Z} possède les symétries mineure et majeure. Ces deux tenseurs peuvent être construits à partir d'un ensemble de constantes dont le nombre dépend des caractéristiques de symétrie du matériau considéré.

Exemple Pour le cas d'un matériau isotrope transverse, le tenseur \mathbf{A} du critère de **Tsai and Wu (1971)** fait intervenir deux constantes indépendantes. La représentation matricielle de ce tenseur est en effet

donnée par :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

De manière analogue, les symétries matérielles imposent que le tenseur \mathbb{Z} soit construit à partir de cinq constantes indépendantes. La représentation de Voigt de ce tenseur, suivant la convention utilisée pour les propriétés de souplesse (voir Annexe D), est telle que :

$$[\mathbb{Z}] = \begin{bmatrix} Z_{1111} & Z_{1122} & Z_{3311} & 0 & 0 & 0 \\ Z_{1122} & Z_{1111} & Z_{3311} & 0 & 0 & 0 \\ Z_{3311} & Z_{3311} & Z_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4Z_{3131} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4Z_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4Z_{1212} \end{bmatrix}$$

avec :

$$Z_{1212} = \frac{1}{2} (Z_{1111} - Z_{1122})$$

Pour le cas isotrope transverse, il faut donc disposer d'un minimum de sept données expérimentales indépendantes pour déterminer les tenseurs \mathbf{A} et \mathbb{Z} . Ces différentes constantes doivent être déduites des contraintes à rupture obtenues pour différents cas de chargement. À cette fin, on peut remarquer que les contraintes à rupture en traction uniaxiale sont données par :

$$\Sigma_{11,t} = \frac{-A_{11} + \sqrt{A_{11}^2 + 4Z_{1111}}}{2Z_{1111}} = \Sigma_{22,t}$$

$$\Sigma_{33,t} = \frac{-A_{33} + \sqrt{A_{33}^2 + 4Z_{3333}}}{2Z_{3333}}$$

Pour le cas de la compression uniaxiale, on obtient que la contrainte à rupture :

$$\Sigma_{11,c} = \frac{-A_{11} - \sqrt{A_{11}^2 + 4Z_{1111}}}{2Z_{1111}} = \Sigma_{22,c}$$

$$\Sigma_{33,c} = \frac{-A_{33} - \sqrt{A_{33}^2 + 4Z_{3333}}}{2Z_{3333}}$$

Les contraintes à rupture en cisaillement sont identiques quel que soit le sens de chargement, elles sont reliées aux composantes du tenseur \mathbb{Z} par :

$$\Sigma_{12,s} = \frac{1}{\sqrt{Z_{1212}}}$$

$$\Sigma_{31,s} = \frac{1}{\sqrt{Z_{3131}}} = \Sigma_{23,s}$$

Enfin, les contraintes à rupture en traction équi-biaxiale sont données par :

$$\Sigma_{11/22,b} = \frac{-A_{11} - A_{22} + \sqrt{(A_{11} + A_{22})^2 + 4(Z_{1111} + Z_{2222} + 2Z_{1122})}}{2(Z_{1111} + Z_{2222} + 2Z_{1122})}$$

$$\Sigma_{33/11,b} = \frac{-A_{33} - A_{11} + \sqrt{(A_{33} + A_{11})^2 + 4(Z_{3333} + Z_{1111} + 2Z_{3311})}}{2(Z_{3333} + Z_{1111} + 2Z_{3311})}$$

Critère de Mazars

Certains critères préfèrent utiliser des grandeurs de déformation plutôt que de contrainte pour décider si les conditions conduisant à la rupture sont réunies. Le critère de [Mazars \(1986\)](#) s'appuie sur les déformations principales positives pour construire une déformation équivalente qui peut ensuite être comparée à une déformation à rupture. Ce critère particulier s'écrit :

$$\text{Rupture si } \sqrt{\sum_{\alpha} \langle E_{\alpha} \rangle_+^2} \geq E_r \quad (17.6)$$

où E_r est un paramètre qui correspond à une déformation à rupture. Les résultats obtenus pour un matériau élastique linéaire isotrope avec ce critère sont présentés sur la Figure [17.1](#).

17.1.3 Critères de rupture ductile

Puisque l'endommagement ductile est le résultat de l'accumulation excessive de déformation plastique, les critères de rupture ductile utilisent la notion de déformation plastique cumulée (voir [16.5](#)) pour décider si les conditions

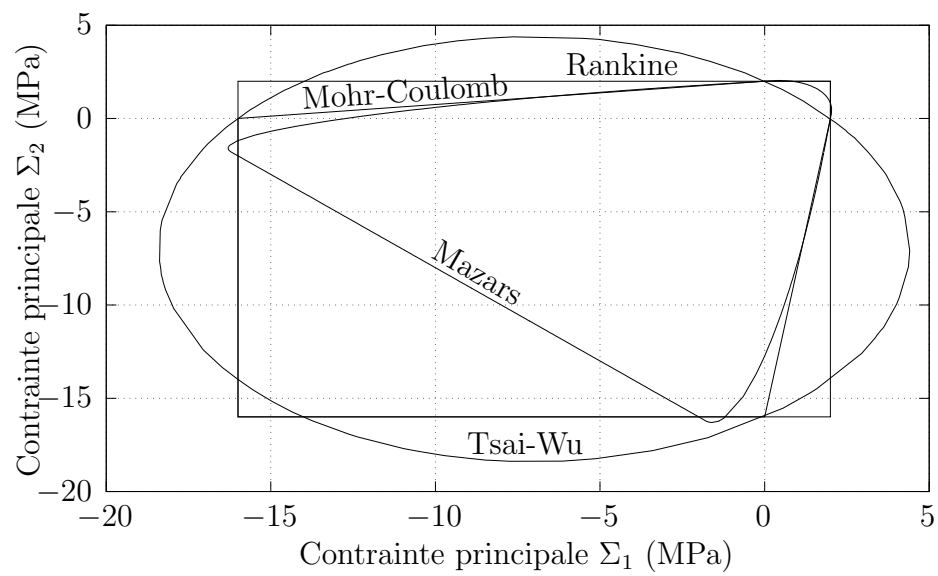


Figure 17.1: Surfaces de rupture obtenues en contraintes planes pour différents critères de rupture fragile. Pour l'application du critère de [Mazars \(1986\)](#), le comportement est supposé élastique linéaire isotrope. Cette hypothèse d'isotropie est également adoptée pour le critère de [Tsai and Wu \(1971\)](#).

nécessaires à la rupture sont réunies ou non. La déformation plastique cumulée (notée P) est intéressante en cela qu'elle mesure l'intensité du processus déformation plastique pour un point matériel. Néanmoins, l'expérience montre que la prise en compte de la seule déformation plastique cumulée ne permet pas de construire un critère de rupture ductile pertinent. En effet, le processus d'endommagement ductile dépend également de l'état de contrainte appliqué, et éventuellement de la température atteinte, lors du processus de déformation plastique. La construction d'un critère de rupture ductile nécessite donc de considérer l'histoire mécanique et thermique des différents points matériels au cours d'un trajet de chargement. Pour ce faire, la plupart des critères de rupture ductile utilisent un indicateur d'endommagement D (avec $D \geq 0$) tel que :

$$\text{Rupture si } D \geq 1 \quad (17.7)$$

L'indicateur d'endommagement D est une variable scalaire dont la valeur est nulle en l'absence d'endommagement ductile. Aussi, la valeur unité est arbitrairement choisie pour correspondre à la situation où l'endommagement ductile est critique, auquel cas les conditions nécessaires à la rupture ductile sont réunies.

Remarque La grandeur scalaire D est désignée par le terme d'indicateur, plutôt que de variable, d'endommagement. Cela permet de souligner que cette grandeur n'est pas une variable d'état, i.e. sa valeur n'affecte en rien l'état d'un point matériel.

Pour prendre en compte le fait que l'état de contrainte et la température varient au cours d'un trajet de chargement, l'évolution de l'indicateur d'endommagement est donnée par une relation de la forme suivante :

$$\dot{D} = \frac{\dot{P}}{P_r(\boldsymbol{\Sigma}, T)} \quad (17.8)$$

où P_r représente la déformation à rupture. La mise en œuvre d'un critère d'endommagement ductile requiert d'évaluer cette dernière en chaque point et à chaque instant afin de calculer l'indicateur d'endommagement pour *in fine* déterminer si la rupture ductile a lieu.

Remarque Dans le cas particulier où l'état de contrainte et la température sont constants au cours d'un trajet de chargement,

l'intégration par rapport au temps de la relation (17.8) conduit à :

$$D = 1 \Leftrightarrow P = P_r$$

Le résultat précédent est obtenu en prenant comme conditions initiales $D(t_0) = 0$ et $P(t_0) = 0$, ce qui correspond à l'absence d'endommagement et de déformation plastique à l'état initial. Aussi, ce résultat indique que, si l'état de contrainte et la température sont constants, la rupture intervient lorsque la déformation plastique cumulée P atteint la déformation à rupture P_r .

Afin de représenter la sévérité de l'état de contrainte (au sens de l'endommagement ductile), différentes grandeurs sont couramment utilisées. Plus spécifiquement, de nombreux critères de rupture ductile (voir ci-après) utilisent le taux de triaxialité η , l'angle de Lode θ ou le paramètre de Lode μ . Ces différentes grandeurs sont données par :

$$\eta = \frac{p}{q} \quad (17.9)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{r^3}{q^3} \right) \quad (17.10)$$

$$\mu = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\Sigma_1 - \Sigma_3} \quad (17.11)$$

avec $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$. Aussi, les définitions précédentes du taux de triaxialité η et l'angle de Lode θ utilisent les invariants suivants :

$$p = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3}{3} \quad (17.12)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_1)^2 \right)} \quad (17.13)$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{27}{2} (\Sigma_1 - p) (\Sigma_2 - p) (\Sigma_3 - p)} \quad (17.14)$$

où p , q et r sont trois invariants de la mesure tensorielle de l'état de contrainte Σ utilisée pour construire un critère de rupture. Les valeurs de ces invariants, ainsi que celles du taux de triaxialité, de l'angle de Lode et du paramètre de Lode, pour différents cas de chargement particuliers sont présentés dans le Tableau 17.1.

État de contrainte	p	q	r	η	θ	μ
Traction uniaxiale						
$\Sigma_1 = \Sigma > 0$ et $\Sigma_2 = \Sigma_3 = 0$	$\Sigma/3$	Σ	Σ	$1/3$	$\pi/6$	-1
Traction équibiaxiale						
$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma > 0$ et $\Sigma_3 = 0$	$2\Sigma/3$	Σ	$-\Sigma$	$2/3$	$-\pi/6$	1
Cisaillement pur						
$\Sigma_1 = -\Sigma_3 = \Sigma > 0$ et $\Sigma_2 = 0$	0	$\Sigma\sqrt{3}$	0	0	0	0
Compression uniaxiale						
$\Sigma_1 = \Sigma_2 = 0$ et $\Sigma_3 = \Sigma < 0$	$\Sigma/3$	$-\Sigma$	Σ	$-1/3$	$-\pi/6$	1
Compression équibiaxiale						
$\Sigma_1 = 0$ et $\Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma < 0$	$2\Sigma/3$	$-\Sigma$	$-\Sigma$	$-2/3$	$\pi/6$	-1

Tableau 17.1: Taux de triaxialité η , angle de Lode θ et paramètre de Lode μ pour quelques états de contrainte particuliers.

Critère de Cockcroft-Latham

Le critère de [Cockcroft \(1968\)](#) s'appuie sur les contraintes principales pour prendre en compte l'effet de l'état de contrainte sur le développement de l'endommagement. Selon la version normalisée de ce critère, la déformation à rupture P_r est donnée par :

$$P_r(\boldsymbol{\Sigma}) = \begin{cases} C q/\Sigma_{\max}, & \text{si } \Sigma_{\max} > 0 \\ \infty, & \text{si } \Sigma_{\max} \leq 0 \end{cases} \quad (17.15)$$

où C est un paramètre qui contrôle la ductilité. Comme l'indique la relation précédente, le critère de [Cockcroft \(1968\)](#) utilise la contrainte principale maximale pour évaluer la déformation à rupture :

$$\Sigma_{\max} = \max_{\alpha}(\Sigma_{\alpha}) \quad (17.16)$$

En particulier, le critère de [Cockcroft \(1968\)](#) considère que la déformation à rupture est infinie, auquel cas l'endommagement ne progresse pas, dès lors que la contrainte principale maximale est négative. Cela suppose qu'un point matériel ne peut pas s'endommager pour certains modes chargement (e.g. compression uniaxiale, compression biaxiale, voir Figure 17.2).

Critère de Johnson-Cook

Le critère de [Johnson and Cook \(1983\)](#) a été développé pour considérer l'effet conjoint de l'état de contrainte et de la température sur l'endommagement ductile. L'effet de l'état de contrainte est pris en compte au travers du taux de triaxialité qui intervient dans l'expression de la déformation à rupture :

$$P_r(\boldsymbol{\Sigma}, T) = (C_1 + C_2 \exp(C_3 \eta)) \left(1 + C_4 \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right) \quad (17.17)$$

où C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont des paramètres propres à chaque matériau. Aussi, les températures T_0 et T_m correspondent respectivement à une température de référence (souvent la température ambiante) et à la température de fusion du matériau. Comme le montre la Figure 17.2, le critère de [Johnson and Cook \(1983\)](#) suppose que la déformation à rupture est une fonction monotone (généralement décroissante) du taux de triaxialité.

Remarque Dans sa forme originale, le critère de [Johnson and Cook \(1983\)](#) inclut une contribution du taux de déformation au travers du multiplicateur plastique \dot{P} . Ce terme est ignoré ici car il peut conduire à des valeurs aberrantes de la déformation à rupture dans le domaine des faibles taux de déformation.

Critère de Mohr-Coulomb modifié

[Bai and Wierzbicki \(2010\)](#) ont proposé un critère de rupture ductile qui intègre l'effet de l'état de contrainte au travers du taux de triaxialité et de l'angle de Lode. Selon ce critère, la déformation à rupture est donnée par :

$$P_r(\boldsymbol{\Sigma}) = \left(C_0 \left(\sqrt{\frac{1 + C_1^2}{3}} \cos(\theta) + C_1 \left(\eta + \frac{1}{3} \sin(\theta) \right) \right) \right)^{-1/N} \quad (17.18)$$

où C_0 , C_1 et N sont des paramètres positifs. Dans le cas particulier où le paramètre C_1 prend une valeur nulle, le critère de Mohr-Coulomb modifié considère que la déformation à rupture ne dépend pas du taux de triaxialité. La déformation à rupture est alors minimale pour un chargement de cisaillement pur. Un exemple d'application du critère de Mohr-Coulomb modifié est présenté sur la Figure 17.2.

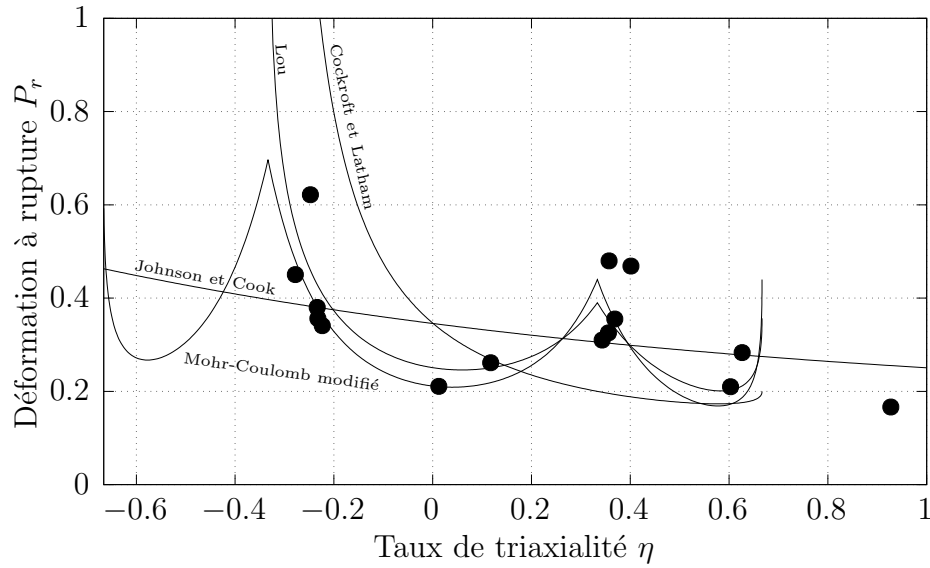


Figure 17.2: Évolution de la déformation à rupture en fonction du taux de triaxialité pour différents critères de rupture ductile. Les points correspondent aux données expérimentales obtenues par [Bai and Wierzbicki \(2010\)](#) pour un alliage d'aluminium.

Critère de Lou

Afin de faire la distinction entre les différents modes de chargement d'un point matériel, le critère de [Lou et al. \(2012\)](#) utilise le paramètre de Lode μ plutôt que l'angle de Lode θ . Selon ce critère, la déformation à rupture s'exprime :

$$P_r(\Sigma) = C_0 \left(\frac{2}{\sqrt{\mu^2 + 3}} \right)^{-C_1} \left(\frac{\langle 1 + 3\eta \rangle_+}{2} \right)^{-C_2} \quad (17.19)$$

où C_0 , C_1 et C_2 sont deux paramètres propres à chaque matériau. Il convient de remarquer que le critère de [Lou et al. \(2012\)](#) considère que la déformation à rupture est infinie dès lors que le taux de triaxialité est inférieur à $-1/3$ (voir Figure 17.2).

17.1.4 Critères de rupture en fatigue

Les critères de fatigue utilisent l'évolution en fonction du temps de différentes grandeurs (e.g. contrainte, déformation, énergie) pour établir si les conditions aboutissant à la rupture en fatigue sont réunies ou non. Puisque la rupture en fatigue est le résultat de l'application d'un chargement répété, les critères de fatigue s'appuient sur la notion de cycle de chargement pour quantifier l'endommagement d'un point matériel.

Caractérisation d'un chargement périodique

La caractérisation expérimentale du comportement en fatigue des matériaux utilise généralement des essais où une déformation périodique ou une contrainte périodique est imposée à un élément de matière. Une telle sollicitation, qui constitue un cas particulier de chargement répété, permet d'évaluer un nombre de cycles à rupture N_r dont la valeur dépend de la sévérité du chargement.

Pour la réalisation des essais de fatigue, le contrôle en déformation est généralement privilégié pour évaluer le comportement en fatigue dans le domaine des faibles durée de vie ($N_r \leq 50\,000$ cycles). Ce domaine, qui est celui de la fatigue oligocyclique, est caractérisé par l'accumulation de déformation plastique à chaque cycle de chargement. Par opposition, la fatigue à grand nombre de cycles ($N_r > 50\,000$ cycles) correspond à une situation où le processus de déformation est essentiellement élastique. Les essais utilisés pour caractériser le comportement dans ce domaine de durée de vie sont généralement réalisés à contrainte imposée.

La mise en place d'un critère de fatigue consiste à extraire d'un signal de contrainte $\Sigma(t)$ ou de déformation $\mathbf{E}(t)$ des grandeurs scalaires qui permettent d'en évaluer la sévérité au sens de la fatigue. Les critères de fatigue usuels se distinguent les uns des autres par le choix des grandeurs scalaires utilisées. Ces critères combinent souvent des grandeurs qui caractérisent la partie périodique du chargement à des grandeurs qui définissent sa partie moyenne. Comme l'illustre la Figure 17.3, si on considère une grandeur scalaire C (e.g. pression hydrostatique, déformation de cisaillement), dont l'évolution au cours du temps $C(t)$ fournit une information relative à l'histoire de charge-

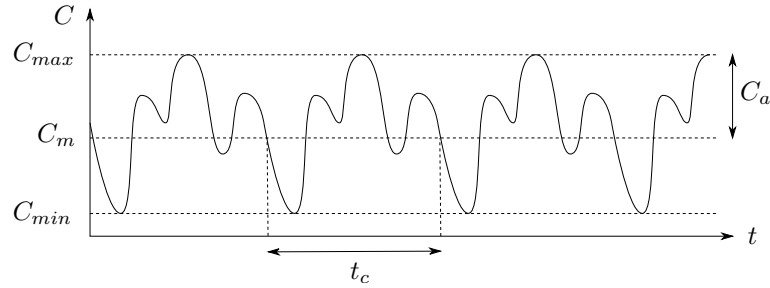


Figure 17.3: Définition des valeurs minimale, maximale, moyenne et de l'amplitude d'une grandeur scalaire C qui caractérise un chargement périodique.

ment d'un point matériel, les valeurs maximale et minimale sont :

$$C_{\max} = \max_t (C(t)) \quad (17.20)$$

$$C_{\min} = \min_t (C(t)) \quad (17.21)$$

Aussi, la valeur moyenne et l'amplitude du chargement sont :

$$C_m = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} C(t) dt \quad (17.22)$$

$$C_a = \max_t (C(t) - C_m) \quad (17.23)$$

Remarque L'amplitude C_a qui caractérise un signal périodique $C(t)$ est parfois définie de manière alternative comme la demi-différence entre les valeurs minimale et maximale (i.e. $C_a = (C_{\max} - C_{\min})/2$). Bien que différente de celle donnée par la relation (17.23), cette dernière définition donne des résultats équivalents dès lors que la moyenne des valeurs extrêmes coïncide avec la valeur moyenne.

Critères de Crossland et de Sines

Le critère de B. (1956) utilise des grandeurs de contrainte pour évaluer le risque de rupture en fatigue d'un point matériel. Plus spécifiquement, il s'appuie sur la valeur maximale de la pression hydrostatique P et l'amplitude de la contrainte déviatorique Q pour définir si la rupture en fatigue a lieu :

$$\text{Rupture si } q_a + A p_{\max} \geq \sigma_f(N_r, T) \quad (17.24)$$

où A est un paramètre qui permet de considérer l'effet du mode de chargement et σ_f est une propriété qui, pour un matériau donné, mesure la résistance à la fatigue. Cette résistance dépend toutefois de la température et du nombre de cycles à rupture N_r considéré. Le chargement répété admissible par un point matériel est en effet d'autant plus sévère que le nombre de cycles à rupture visé est faible.

Remarque Afin d'évaluer le risque de rupture, les critères de fatigue formulés en contrainte utilisent la notion de limite d'endurance (notée Σ_f). Différentes relations ont été proposées pour traduire la dépendance de la limite d'endurance au nombre de cycles à rupture. Par exemple, [Basquin \(1910\)](#) a proposé une relation de la forme :

$$\Sigma_f(N_r, T) = \left(\frac{B(T)}{N_r} \right)^{1/M(T)}$$

où B et M sont des paramètres propres à chaque matériau qui peuvent néanmoins intégrer une dépendance à la température si nécessaire.

La relation établie par [Stromeyer \(1914\)](#) est semblable à la précédente, à ceci près qu'elle inclut un seuil en contrainte S en-dessous duquel la durée de vie est infinie :

$$\Sigma_f(N_r, T) = S(T) + \left(\frac{B(T)}{N_r} \right)^{1/M(T)}$$

Le critère de [Sines \(1959\)](#) est semblable à celui de [B. \(1956\)](#), à ceci près qu'il utilise la pression hydrostatique moyenne (plutôt que maximale) pour caractériser l'impact du mode de chargement. Le critère de Sines prend donc la forme suivante :

$$\text{Rupture si } q_a + A p_m \geq \sigma_f(N_r, T) \quad (17.25)$$

où A est un paramètre qui contrôle l'effet de la pression hydrostatique moyenne.

Critères de Findley et de Dang Van

Une stratégie alternative pour construire un critère de fatigue consiste à adopter une approche par plan critique. Une telle approche suppose que

l'amorçage des fissures de fatigue se produit sur une facette dès lors qu'un certain critère est satisfait. Cette facette représente le plan critique au sens où il s'agit de celui qui, du point de vue la fatigue, est le plus sévèrement sollicité. Afin d'identifier le plan critique, il est nécessaire de pouvoir calculer la contrainte normale σ et la contrainte tangentielle τ qui s'exercent sur une facette de normale unitaire \mathbf{N} . La contrainte normale et la contrainte tangentielle se déduisent du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$ à partir des relations suivantes :

$$\sigma(\mathbf{N}, t) = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{N} \quad (17.26)$$

$$\tau(\mathbf{N}, t) = \|\boldsymbol{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}\| \quad (17.27)$$

Le critère de [Findley \(1959\)](#) utilise la contrainte normale et la contrainte tangentielle pour identifier le plan critique, ce qui *in fine* permet de décider si la rupture en fatigue se produit ou non :

$$\begin{aligned} &\text{Rupture si} \\ &\max_{\mathbf{N}} (\max_t (\tau(\mathbf{N}, t) - \tau_m(\mathbf{N}) + A \sigma(\mathbf{N}, t))) \geq \sigma_f(N_r, T) \end{aligned} \quad (17.28)$$

où τ_m désigne la valeur moyenne de la contrainte tangentielle et A est un paramètre qui contrôle l'effet des contraintes normales. Lorsque le critère de [Dang Van \(1973\)](#) est adopté, la détermination du plan critique repose sur la contrainte tangentielle et la pression hydrostatique. Selon ce critère, la rupture en fatigue intervient lorsque :

$$\begin{aligned} &\text{Rupture si} \\ &\max_{\mathbf{N}} (\max_t (\tau(\mathbf{N}, t) - \tau_m(\mathbf{N}) + A p(t))) \geq \sigma_f(N_r, T) \end{aligned} \quad (17.29)$$

où A est un paramètre qui permet de pondérer l'effet de la pression hydrostatique.

Les critères en contrainte sont largement utilisés dans le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles. Ces critères sont généralement moins pertinents dans le domaine de la fatigue oligocyclique. En effet, dans ce domaine où les déformations plastiques sont relativement importantes, une forte augmentation de l'amplitude de déformation ne produit généralement qu'une faible variation de l'amplitude de contrainte (voir Figure 17.4). Il devient alors difficile de différencier deux chargements à partir de la seule histoire de l'état de contrainte quand bien même ils possèdent des histoires de déformation très différentes.

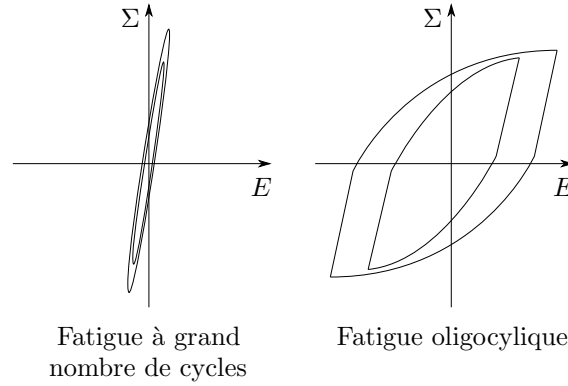


Figure 17.4: Représentation schématique de l'effet de l'amplitude de chargement sur le comportement. En fatigue à grand nombre de cycles, une forte augmentation de l'amplitude de contrainte ne produit qu'une faible variation de l'amplitude de déformation. Dans le domaine de la fatigue oligocyclique, une forte augmentation de l'amplitude de déformation ne produit qu'une faible variation de l'amplitude de contrainte.

Critère de Fatemi-Socie

Le critère de [Fatemi and Socie \(1988\)](#) appartient à la famille des approches de type plan critique. Néanmoins, à la différence des critères précédents, il utilise à la fois des grandeurs de déformation et de contrainte pour décider si les conditions de rupture en fatigue sont réunies. En effet, selon le critère de [Fatemi and Socie \(1988\)](#), le plan critique est celui qui subit la plus grande amplitude de déformation de cisaillement. La déformation de cisaillement γ à un instant t sur un plan de normale unitaire \mathbf{N} est évaluée à partir d'une mesure tensorielle de l'état de déformation \mathbf{E} par :

$$\gamma(\mathbf{N}, t) = \|\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}\| \quad (17.30)$$

Selon le critère de [Fatemi and Socie \(1988\)](#), le plan critique est celui qui subit la plus grande amplitude de déformation de cisaillement. Pour une histoire de chargement périodique, le plan critique possède donc une normale unitaire \mathbf{N}_c telle que :

$$\mathbf{N}_c \in \arg \max_{\mathbf{N}} (\gamma_a(\mathbf{N})) \quad (17.31)$$

Une fois le plan critique identifié, le critère de [Fatemi and Socie \(1988\)](#) combine l'amplitude de déformation de cisaillement à la contrainte normale

pour décider si les conditions de rupture sont réunies :

$$\text{Rupture si } \gamma_a(N_c, t) \left(1 + K \frac{\sigma_{\max}(N_c)}{\Sigma_e} \right) \geq \gamma_f(N_r, T) \quad (17.32)$$

où K est un paramètre qui intègre l'effet du mode de chargement et Σ_e est la limite d'élasticité en traction uniaxiale du matériau considéré. Aussi, la grandeur de déformation γ_f est l'équivalent d'une limite d'endurance qui, pour un nombre de cycles à rupture donné, prend la forme d'une déformation plutôt qu'une contrainte.

Critères énergétiques

Les critères énergétiques se basent sur le fait que la durée de vie en fatigue d'un matériau est d'autant plus faible que le travail plastique réalisé sur un cycle de chargement est important. Pour un point matériel, le travail plastique moyen par cycle \bar{w}_p est donné par la relation :

$$\bar{w}_p = \frac{1}{\varrho_0} \int_0^{t_c} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}_p dt \quad (17.33)$$

Un critère énergétique simple proposé consiste à supposer que la rupture en fatigue d'un point matériel intervient dès lors que le travail plastique excède une valeur seuil \bar{w}_f . Un tel critère prend donc la forme suivante :

$$\text{Rupture si } \bar{w}_p \geq \bar{w}_f(N_r, T) \quad (17.34)$$

De manière analogue aux critères en contraintes, la grandeur scalaire \bar{w}_f peut être interprétée comme une limite d'endurance énergétique dont la valeur est d'autant plus faible que le nombre de cycles à rupture considéré est élevé. Ce critère est toutefois limité car il ne permet pas de considérer les effets de contrainte de moyenne.

Le critère d'[Amiable \(2006\)](#) est semblable au précédent à ceci près que l'effet du mode de chargement est pris en compte au travers de la pression hydrostatique maximale :

$$\text{Rupture si } \bar{w}_p + A p_{\max} \geq \bar{w}_f(N_r, T) \quad (17.35)$$

où A est un paramètre propre à chaque matériau.

Méthode *rainflow*

Dès lors qu'on s'intéresse à la réalité du chargement auquel est soumis une structure, la définition de ce qui forme un cycle de chargement n'est pas évidente. En effet, contrairement à une éprouvette, qui est généralement soumise à un chargement périodique contrôlé, un chargement réel est la résultante d'un ensemble de phénomènes aléatoires pour lesquels le comptage de ce qui constitue des cycles de chargement n'est pas évident.

La méthode *rainflow* (Matsuishi and Endo, 1968) est couramment utilisée pour extraire les cycles d'une histoire de chargement. Cette méthode nécessite préalablement d'adopter une grandeur qui sert à définir ce qu'est un cycle de chargement. Dans un contexte uniaxial, cette grandeur est classiquement une déformation axiale ou une contrainte axiale. Dans le cas général d'un chargement multiaxial, le choix de la grandeur à utiliser dépend du critère de fatigue utilisé. Comme détaillé ci-après, les critères de fatigue usuels ont en commun d'utiliser une grandeur scalaire permettant de mesurer l'amplitude (ou de manière équivalente l'étendue) du chargement. C'est généralement cette même grandeur qui est adoptée pour l'extraction des cycles de chargement par la méthode *rainflow*.

La méthode *rainflow* s'appuie sur quatre étapes dont l'enchaînement permet de caractériser un chargement quelconque. Ces étapes, détaillées ci-après, sont les suivantes :

- La recherche des extrema, qui permet d'établir la liste des minimas et des maximas locaux de la grandeur C utilisée pour définir les cycles de chargement.
- Le regroupement, qui vise à condenser les résultats de l'analyse par *binning*. Il s'agit de regrouper les cycles qui partagent des valeurs similaires d'amplitude et de moyenne dans un nombre prédéfini de classes.
- Le comptage, dont l'objectif est de construire une liste de cycles à chacun desquels est associé une valeur de départ et une valeur d'arrivée.

La recherche des extrema (voir Figure 17.5) permet d'établir une liste de valeurs qui correspondent à une succession d'alternances entre minimum et de maximum. La méthode *rainflow*, parce qu'elle ignore le temps qui sépare deux extrema successifs, suppose que les effets de vitesse sont négligeables.

Le regroupement (voir Figure 17.5) consiste à définir un certain nombre de classes dans lesquelles les extrema sont affectés. Chaque classe est caractérisée par des bornes inférieure et supérieure. La différence entre ces bornes est identique pour toutes les classes, elle correspond en général à une fraction de l'étendue du signal considéré. Lorsque des extrema successifs appartiennent à une même classe, seul un de ces extrema est conservé pour le comptage.

Le comptage des cycles (voir Figure 17.5) est couramment réalisé à partir d'une méthode itérative qui analyse les valeurs de quatre extrema successifs. Plus spécifiquement, la liste des extrema est parcourue jusqu'à l'identification d'un ensemble de quatre extrema successifs (notés C_i , C_{i+1} , C_{i+2} et C_{i+3}) vérifiant la condition suivante :

$$|C_i - C_{i+1}| \geq |C_{i+1} - C_{i+2}| \text{ et } |C_{i+2} - C_{i+3}| \geq |C_{i+1} - C_{i+2}| \quad (17.36)$$

Dès lors que la condition précédente est satisfaite, les extrema C_{i+1} et C_{i+2} définissent un cycle dont la classe de départ est celle de C_{i+1} tandis que la classe d'arrivée est celle de C_{i+2} . Ces extrema sont alors supprimés de la liste et la procédure est répétée en repartant du début de la liste jusqu'à ce qu'un nouveau cycle soit identifié. Si la condition ci-dessus n'est pas satisfaite pour les quatre extrema successifs, la valeur de i est incrémentée d'une unité, ce qui permet de former un nouveau quadruplet d'extrema. Cette procédure itérative est répétée jusqu'à ce qu'aucun nouveau cycle ne puisse être identifié. Lorsque la procédure se termine, l'ensemble des extrema qui n'ont pas pu être associés à un cycle forment le résidu.

Les résultats de l'analyse *rainflow* d'un chargement sont généralement présentés sous la forme d'une matrice carrée dont les entrées sont les nombres totaux de cycles associés à une transition entre une classe de départ et une classe d'arrivée. Une telle entrée apparaît sur une ligne et une colonne qui correspondent respectivement à sa classe de départ et à sa classe d'arrivée. À titre d'exemple, la matrice classe de départ-classe d'arrivée issue de l'analyse *rainflow* du chargement de la Figure 17.5 est présentée sur le Tableau 17.2.

Règle de Miner

Dans le cas général, le chargement répété appliqué à un point matériel n'est pas périodique. Le comptage de cycles, par exemple par la méthode *rainflow*, permet néanmoins de décomposer un chargement complexe en un en-

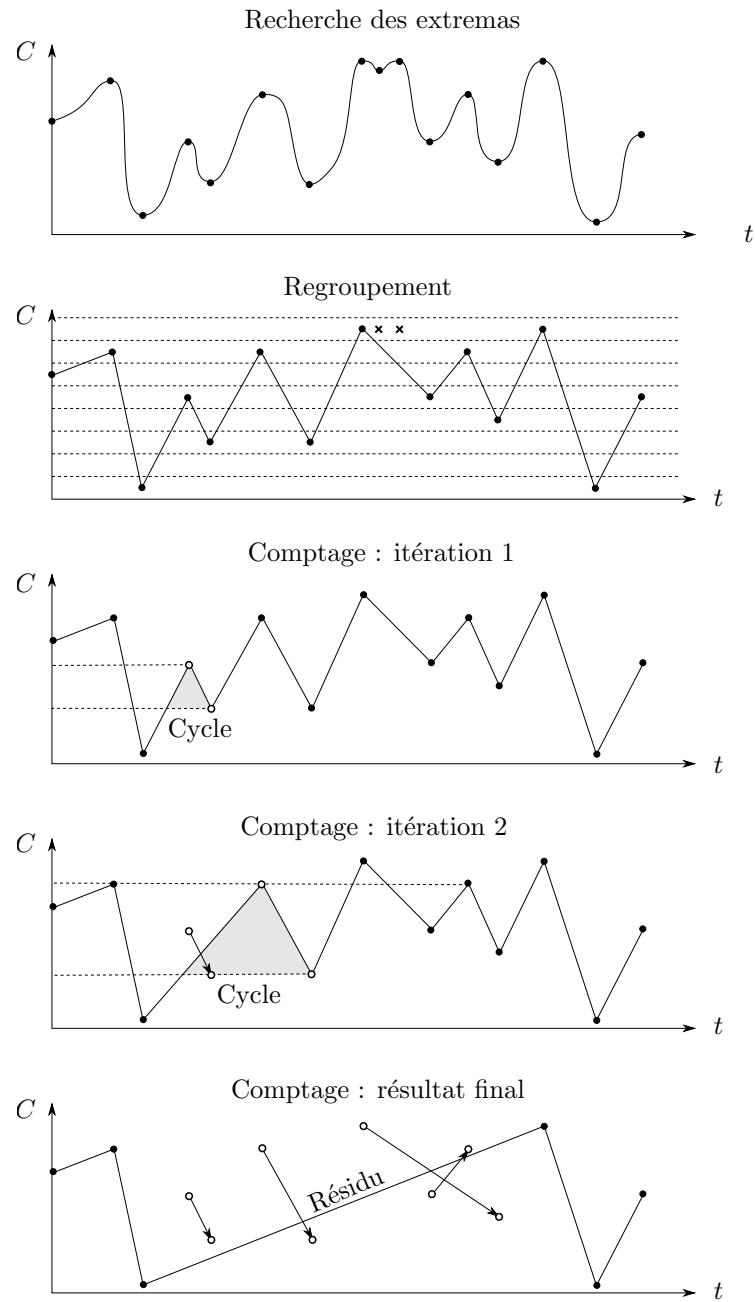


Figure 17.5: Représentation schématique de la méthode *rainflow* permettant d'extraire les cycles d'un chargement quelconque.

Départ	Arrivée							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0

Tableau 17.2: Matrice classe de départ-classe d'arrivée issue de l'analyse *rainflow* du chargement de la Figure 17.5. Le résidu associé est 6-7-1-8-1-5.

semble de cycles. L'évaluation la durée de vie d'une structure peut ensuite être réalisée par une méthode de cumul des dommages. Une telle méthode permet de considérer la contribution de chaque cycle au développement de l'endommagement de fatigue. De manière semblable à la méthode utilisée pour la prévision de la rupture ductile (voir 17.1.3), une telle méthode considère pour chaque point matériel un indicateur d'endommagement D tel que :

$$\text{Rupture si } D \geq 1 \quad (17.37)$$

La méthode la plus simple pour cumuler l'endommagement de fatigue est celle proposée par Miner (1945). Selon cette méthode, chaque cycle participe à l'endommagement de fatigue avec une contribution qui est inversement proportionnelle au nombre de cycles à rupture correspondant. La mise en œuvre de cette règle consiste donc à associer à chaque cycle un nombre de cycles à rupture qui dépend de la sévérité du chargement sur le cycle considéré. L'incrément d'endommagement ΔD produit par le N_i ème cycle de chargement est donc obtenu par :

$$\Delta D = \frac{1}{N_r(N)} \quad (17.38)$$

La règle de Miner (1945) correspond à un modèle linéaire de cumul des dommages. Elle ne donne des résultats raisonnables que lorsque les conditions de chargement (e.g. amplitude, moyenne) changent peu d'un cycle à l'autre.

17.1.5 Critères de rupture en fluage

L'endommagement de fluage étant lié au caractère viscoplastique du comportement mécanique de certains matériaux, la rupture en fluage est influencée par la sévérité mais également par la durée d'application du chargement thermomécanique. Afin de prévoir la rupture en fluage, il est possible d'introduire un indicateur d'endommagement D qui évolue lors d'une histoire de chargement. Comme pour l'endommagement de fatigue ou l'endommagement ductile, la rupture intervient dès lors que la condition suivante est satisfaite :

$$\text{Rupture si } D \geq 1 \quad (17.39)$$

Puisque le développement de l'endommagement de fluage dépend des conditions de chargement, les critères d'endommagement utilisent généralement des grandeurs représentatives de l'état de contrainte ainsi que la température pour décrire l'accumulation d'endommagement.

Critères de Kachanov et Rabotonov

Le modèle de [Kachanov \(1958\)](#) considère que l'évolution de l'indicateur d'endommagement est décrite par une relation de la forme :

$$\dot{D} = A(T) \left(\frac{\Sigma_{\text{eff}}}{1 - D} \right)^{N(T)} \quad (17.40)$$

où A et N sont des paramètres (avec $A > 0$ et $N \geq 1$) qui, notamment pour les conditions anisothermes, peuvent dépendre de la température. Aussi, pour pouvoir considérer l'éventuel caractère multiaxial de l'état de contrainte, le modèle précédent s'appuie sur la notion de contrainte effective Σ_{eff} . Une approche simple consiste à assimiler la contrainte effective à la contrainte principale maximale ([Kachanov, 1986](#)) dès lors que cette dernière est positive :

$$\Sigma_{\text{eff}} = \max_{\alpha} (\langle \Sigma_{\alpha} \rangle_+) \quad (17.41)$$

Cette approche revient à considérer que l'endommagement de fluage est contrôlé par la contrainte normale de traction maximale. Une alternative

consiste à définir la contrainte effective comme suit :

$$\Sigma_{\text{eff}} = B \max_{\alpha} (\langle \Sigma_{\alpha} \rangle_+) + (1 - B) \max_{\alpha, \beta} \left(\frac{\Sigma_{\alpha} - \Sigma_{\beta}}{2} \right) \quad (17.42)$$

où B est un paramètre (avec $0 \leq B \leq 1$) qui contrôle l'effet de la contrainte normale maximale par rapport à celui de la contrainte tangentielle maximale. Cette dernière est en effet donnée par la moitié de la différence maximale entre les contraintes principales.

Le modèle de [Rabotnov \(1969\)](#) est une extension du modèle de [Kachanov \(1958\)](#). Il utilise un paramètre supplémentaire K tel que :

$$\dot{D} = \frac{A(T)}{(1 - D)^{K(T)}} \left(\frac{\Sigma_{\text{eff}}}{1 - D} \right)^{N(T)} \quad (17.43)$$

Cette dernière formulation permet de mieux décrire le stade tertiaire qui précède la rupture en fluage d'un matériau.

17.2 Modèles d'endommagement

17.2.1 Variables d'endommagement

Afin de représenter la dégradation des propriétés, il est naturel de s'intéresser à l'effet de l'endommagement sur les propriétés de rigidité ou, de manière équivalente, les propriétés de souplesse. En effet, les propriétés de rigidité caractérisent la capacité d'un point matériel à transmettre des efforts. Ainsi, lorsqu'un point matériel est endommagé, les propriétés de rigidité sont dégradées, ce qui *in fine* affecte l'état de contrainte.

Pour considérer la dégradation des propriétés de rigidité, les modèles d'endommagement introduisent une ou plusieurs variables d'endommagement. Ces dernières sont des variables internes supplémentaires qui viennent s'ajouter à la liste des variables d'état éventuellement présentes (e.g. variables d'écrouissage, variables de déformation plastique). Selon l'acuité de la description recherchée, les variables d'endommagement peuvent avoir une nature scalaire ou tensorielle. Il convient de garder à l'esprit que cette approche est différente de celle qui utilise des indicateurs d'endommagement (voir section précédente). En effet, les variables d'endommagement étant des variables internes

particulières, elles affectent l'état d'un point matériel (e.g. énergie interne spécifique, tenseur des contraintes) et nécessitent des relations d'état et d'évolution.

Remarque Il convient d'être prudent sur l'utilisation de lois de comportement qui incluent un mécanisme d'adoucissement. Ce mécanisme, particulièrement visible en présence d'endommagement, se produit dès lors que le domaine d'élasticité, représenté dans l'espace des contraintes, voit sa taille diminuer au cours d'un processus thermomécanique. De telles lois de comportement peuvent aboutir à un problème thermomécanique, résultante des équations de conservation et des équations de comportement, qui est mal posé. Le caractère mal posé de ce problème fait que la solution n'est plus unique, ce qui nécessite de recourir à des stratégies de régularisation. Aussi, l'adoucissement tend à favoriser la localisation des déformations, ce qui peut être difficile à appréhender si la localisation est excessive, auquel cas l'endommagement peut se concentrer dans une région de volume nul.

Les stratégies de régularisation consistent souvent en l'adoption d'une approche non-locale. Cette dernière peut conduire à des modèles où les gradients spatiaux des variables d'endommagement sont traités comme des variables d'état supplémentaires (Frémond and Nedjar, 1996; Miehe et al., 2010). La non-localité peut également consister à considérer les moyennes spatiales des variables d'endommagement comme des variables d'état à part entière (Bažant and Jirasek, 2002; Borino et al., 2003). Ces différentes approches non-locales ont en commun le fait d'introduire une (voire plusieurs) longueur caractéristique qui contrôle la diffusion de l'endommagement. Elles nécessitent toutefois un cadre thermodynamique étendu pour s'assurer que les équations de comportement sont compatibles avec les principes thermodynamiques fondamentaux.

Représentation de l'endommagement par une variable scalaire

Une approche courante consiste à associer une variable d'endommagement scalaire D (avec $0 \leq D \leq 1$) à chaque point matériel. Cette variable fournit une information quant à la dégradation des propriétés de rigidité (voir Figure 17.6). En particulier, un point matériel est considéré comme complètement endommagé dès lors que la variable D est égale à l'unité. À

l'opposé, pour un point matériel pour lequel les propriétés de rigidité sont intactes, la variable d'endommagement est nulle. L'approche précédente aboutit à une théorie isotrope de l'endommagement puisque, par définition, la variable d'endommagement scalaire D ne contient aucune information de direction.

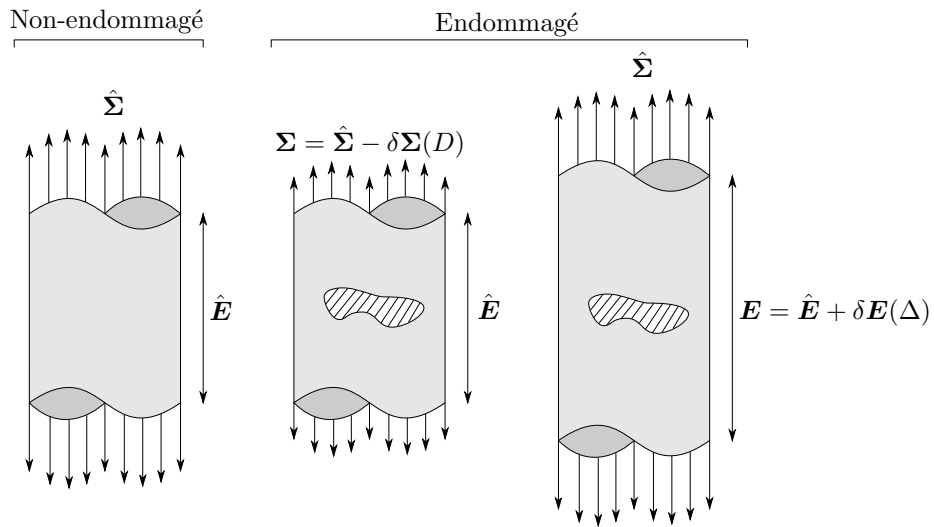


Figure 17.6: Représentation schématique de la signification des variables d'endommagement. La zone hachurée représente une surface fissurée. La variable D mesure la dégradation des propriétés de rigidité. Pour un état de déformation fixe, cette dégradation se manifeste par une réduction de la contrainte appliquée à un point matériel. La variable Δ mesure l'augmentation des propriétés de souplesse. Pour un état de contrainte fixe, cette augmentation se manifeste par un accroissement de la déformation appliquée à un point matériel.

Comme l'illustre la Figure 17.6, une stratégie de modélisation alternative consiste à utiliser une variable d'endommagement qui mesure l'augmentation de souplesse plutôt que la perte de rigidité. Une telle variable d'endommagement (notée Δ dans ce qui suit) peut être exprimée à partir de la variable d'endommagement D . Si différentes possibilités peuvent être envisagées pour construire la relation $\Delta(D)$, une telle relation

vérifie nécessairement les conditions suivantes :

$$D = 0 \rightarrow \Delta = 0, D = 1 \rightarrow \Delta = \infty \text{ et } \frac{\partial \Delta}{\partial D} > 0 \quad (17.44)$$

La première condition indique la variable Δ est nulle en l'absence d'endommagement, auquel cas les propriétés de souplesse ne sont aucunement affectées. Lorsqu'un point matériel est complètement endommagé (i.e. D est égal à l'unité), la variable Δ prend une valeur infinie, ce qui correspond à la situation où le point matériel considéré est infiniment souple car incapable de transmettre des efforts internes. La dernière condition traduit le fait qu'une diminution de la rigidité conduit nécessairement à une augmentation de la souplesse.

Représentation de l'endommagement par une variable tensorielle

Afin de considérer un éventuel effet anisotrope de l'endommagement, il est nécessaire de recourir à une variable d'endommagement tensorielle. Un choix possible consiste à représenter la dégradation des propriétés de rigidité par un tenseur de rang deux symétrique (noté \mathbf{D}). Dans ce cas de figure, la diminution de rigidité D_N selon une direction représentée par un vecteur \mathbf{N} est donnée par :

$$D_N = \mathbf{D} : (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \quad (17.45)$$

Il convient de préciser qu'un tenseur de rang deux symétrique ne permet pas de considérer n'importe quel type d'anisotropie induite par endommagement. En effet, l'endommagement, lorsqu'il est représenté par un tenseur de rang deux symétrique, peut induire une anisotropie "au plus" orthotrope. Les trois plans de symétrie associés à l'orthotropie ont alors pour directions normales les directions principales du tenseur d'endommagement \mathbf{D} .

Comme pour un endommagement scalaire, il est possible de représenter l'endommagement par une variable tensorielle $\mathbf{\Delta}$ qui mesure l'augmentation de souplesse. Par analogie avec relation précédente, l'augmentation de souplesse Δ_N selon une direction \mathbf{N} est évaluée à partir de :

$$\Delta_N = \mathbf{\Delta} : (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \quad (17.46)$$

Il convient de préciser que le choix d'une variable tensorielle pour représenter

l'endommagement contient le cas particulier de l'isotropie. Dans cette situation particulière, les tenseurs \mathbf{D} et $\mathbf{\Delta}$ sont purement sphériques :

$$\mathbf{D} = D \mathbf{1} \text{ et } \mathbf{\Delta} = \Delta \mathbf{1} \quad (17.47)$$

L'écriture précédente souligne que, dans le cas particulier de l'isotropie, les tenseurs \mathbf{D} et $\mathbf{\Delta}$ sont chacun construits à partir d'une seule variable scalaire (D ou Δ).

L'approche la plus générale, qui permet de couvrir n'importe quelle type d'anisotropie induite par l'endommagement, consiste à représenter la dégradation de la rigidité par un tenseur de rang quatre symétrique \mathbb{D} . La dégradation de la rigidité D_N selon une direction définie par un vecteur unitaire \mathbf{N} est donnée par la projection suivante :

$$D_N = \mathbb{D} : (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \quad (17.48)$$

Lorsque l'alternative, qui consiste à évaluer l'augmentation de souplesse produite par l'endommagement, est adoptée, la valeur Δ_N de cette dernière est obtenue à l'aide d'une relation de la forme :

$$\Delta_N = \mathbb{Z} : (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \quad (17.49)$$

où \mathbb{Z} est un tenseur de rang quatre symétrique.

Lorsque l'endommagement est isotrope, il est possible de construire le tenseur d'endommagement \mathbb{D} (respectivement \mathbb{Z}) à partir de deux variables scalaires D_{dev} et D_{sph} (respectivement Δ_{dev} et Δ_{sph}) qui en définissent les parties déviatorique et sphérique :

$$\mathbb{D} = D_{\text{dev}} \mathbb{P}_{\text{dev}} + D_{\text{sph}} \mathbb{P}_{\text{sph}} \quad (17.50)$$

$$\mathbb{Z} = \Delta_{\text{dev}} \mathbb{P}_{\text{dev}} + \Delta_{\text{sph}} \mathbb{P}_{\text{sph}} \quad (17.51)$$

Dans le cas particulier de l'isotropie, on peut remarquer que, quelle que soit le vecteur unitaire \mathbf{N} considéré, les projections des tenseurs \mathbb{D} et \mathbb{Z} sur cette direction correspondent à D_{sph} et Δ_{sph} .

17.2.2 Effets de fermeture

Afin de considérer l'effet de l'endommagement sur le comportement, il est possible de considérer une dépendance du tenseur de rigidité \mathbb{C} ou du tenseur

de souplesse \mathbb{S} vis-à-vis des variables d'endommagement. Néanmoins, considérer cette seule dépendance n'est souvent pas suffisant pour correctement décrire le comportement mécanique des matériaux solides. En effet, les propriétés d'un point matériel dépendent non seulement de l'état d'endommagement mais également du chargement appliqué à cause des effets de fermeture. Comme illustré par la Figure 17.7, lorsque l'état de contrainte bascule de la traction vers la compression au cours d'un trajet de chargement, la fermeture des défauts (e.g. fissures, cavités) se manifeste par la récupération de tout ou partie des propriétés de rigidité.

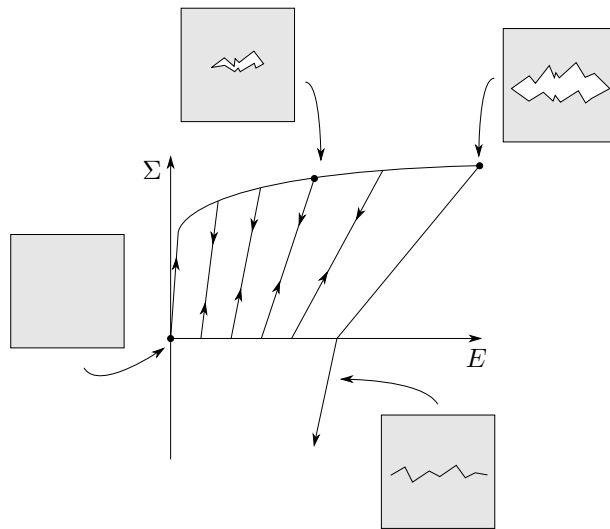


Figure 17.7: Représentation schématique de l'effet de fermeture des défauts sur le comportement mécanique. Sous une sollicitation de traction, les défauts à l'origine de l'endommagement sont ouverts et participent à la réduction de la rigidité. Lorsque le chargement est en compression, les défauts se referment. Une partie de la rigidité est alors recouvrée.

Dans un contexte tridimensionnel, la prise en compte des effets de fermeture n'est pas triviale. Quel que soit l'état d'un point matériel, il faut en effet s'assurer que les conditions suivantes sont satisfaites :

- Les tenseurs de rigidité et de souplesse doivent conserver leurs caractéristiques de symétrie mineure et de symétrie majeure.
- La relation entre l'état de contrainte et l'état de déformation doit être

continue. Les variables internes étant fixées, cela signifie qu'une variation infinitésimale de l'état de déformation ne doit provoquer qu'une variation infinitésimale de l'état de contrainte (et réciproquement).

Une stratégie possible pour intégrer les restrictions précédentes consiste à introduire des directions représentées par des tenseurs symétriques de rang deux \mathbf{M}_α . Ces directions tensorielles (repérées par l'indice α , i.e. $\alpha = 1, 2, \dots$) sont celles pour lesquelles les propriétés de rigidité sont affectées par les effets de fermeture. Plus spécifiquement, lorsque les effets de fermeture sont considérés, le tenseur de rigidité \mathbb{C} est une fonction de la variable d'endommagement \mathbb{D} et du tenseur des déformations élastiques \mathbf{E}_e de la forme suivante¹² :

$$\mathbb{C}(\mathbb{D}, \mathbf{E}_e) = \mathbb{C}_0 - \delta\mathbb{C}(\mathbb{D}) + L \sum_{\alpha} \text{hv}(-\mathbf{M}_\alpha : \mathbf{E}_e) (\delta\mathbb{C}(\mathbb{D}) :: \mathbb{M}_\alpha) \mathbb{M}_\alpha \quad (17.52)$$

où \mathbb{C}_0 est la tenseur de rigidité à l'état non-endommagé, $\delta\mathbb{C}$ correspond à la dégradation de rigidité induite par l'endommagement lorsque les défauts sont ouverts et L (avec $0 \leq L \leq 1$) est un paramètre qui contrôle l'importance des effets de fermeture. On peut notamment remarquer que les effets de fermeture sont ignorés lorsque le paramètre L est nul. Aussi, dans un souci de concision, les relations précédentes utilisent le tenseur de rang quatre \mathbb{M}_α tel que :

$$\mathbb{M}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha \otimes \mathbf{M}_\alpha \quad (17.53)$$

L'équation (17.52) traduit le fait que lorsque la valeur de déformation élastique selon une direction \mathbf{M}_α est négative, la rigidité selon cette même direction retrouve sa valeur initiale, soit :

$$\mathbb{C}(\mathbb{D}, \mathbf{E}_e) :: \mathbb{M}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{C}_0 :: \mathbb{M}_\alpha & \text{si } \mathbf{M}_\alpha : \mathbf{E}_e < 0 \\ (\mathbb{C}_0 - \delta\mathbb{C}(\mathbb{D})) :: \mathbb{M}_\alpha & \text{si } \mathbf{M}_\alpha : \mathbf{E}_e > 0 \\ (\mathbb{C}_0 - \delta\mathbb{C}(\mathbb{D})/2) :: \mathbb{M}_\alpha & \text{si } \mathbf{M}_\alpha : \mathbf{E}_e = 0 \end{cases} \quad (17.54)$$

Si on préfère travailler avec le tenseur de souplesse \mathbb{S} et la variable d'endommagement \mathbb{Z} , la prise en compte des effets de fermeture suit une

¹La fonction de Heaviside (notée hv) est telle que $\text{hv}(x) = 1$ si $x > 0$, $\text{hv}(x) = 0$ si $x < 0$ et $\text{hv}(x) = 1/2$ si $x = 0$.

²En toute rigueur, le tenseur de rigidité peut également dépendre de la température ou de l'entropie spécifique. Cette dépendance n'est toutefois pas explicitée ici afin d'alléger les notations.

approche semblable à celle utilisée pour la rigidité, à ceci près que c'est la contribution élastique au tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}_e$ qui est utilisé pour décrire les effets de fermeture :

$$\mathbb{S}(\mathbb{Z}, \boldsymbol{\Sigma}_e) = \mathbb{S}_0 + \delta\mathbb{S}(\mathbb{Z}) - L \sum_{\alpha} \text{hv}(-\mathbf{M}_{\alpha} : \boldsymbol{\Sigma}_e) (\delta\mathbb{S}(\mathbb{Z}) :: \mathbf{M}_{\alpha}) \mathbf{M}_{\alpha} \quad (17.55)$$

où \mathbb{S}_0 désigne le tenseur de souplesse à l'état non-endommagé tandis que $\delta\mathbb{S}$ est l'augmentation de souplesse produite par l'endommagement en l'absence d'effet de fermeture. Comme pour le tenseur de rigidité, le paramètre L est introduit pour contrôler l'importance des effets de fermeture.

Différents choix sont possibles pour les directions tensorielles affectées par les effets de fermeture. Il est par exemple possible d'utiliser comme seule direction le tenseur identité de rang deux normalisé (i.e. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{1}/\sqrt{3}$). Cela revient à considérer que les effets de fermeture se manifestent dès lors que la trace du tenseur des déformations élastiques (ou du tenseur des contraintes élastiques) est négative. Une autre option consiste à utiliser les directions principales du tenseur des déformations élastiques ou du tenseur des contraintes élastiques, auquel cas il existe trois directions tensorielles \mathbf{M}_{α} affectées par les effets de fermeture. Lorsque l'endommagement est représenté par un tenseur de rang deux, il est également possible de retenir les directions principales de ce tenseur pour établir les conditions de fermeture. Quel que soit le tenseur dont sont issues les directions principales, il convient d'être prudent lorsque plusieurs valeurs propres sont identiques. En effet, pour ce cas particulier, certaines directions principales, donc les directions de fermeture, ne sont pas définies de manière unique.

La prise en compte des effets de fermeture utilise parfois une stratégie alternative qui s'appuie sur la décomposition d'une grandeur tensorielle en parties positive et négative. En effet, comme discuté au 3.1.5, une mesure de l'état de déformation peut être décomposée en parties positive (indice +) et négative (indice -). Ainsi, le tenseur des déformations élastiques se décompose comme suit :

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_{e+} + \mathbf{E}_{e-} \quad (17.56)$$

Les effets de fermeture peuvent être pris en compte en affectant les propriétés de rigidité par l'endommagement différemment en fonction de l'importance respective des déformations élastiques positives et négatives. De manière analogue, il est possible de décomposer une mesure tensorielle de l'état de

contrainte en parties positive et négative. La contribution élastique à l'état de contrainte peut ainsi se décomposer de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma}_e = \boldsymbol{\Sigma}_{e+} + \boldsymbol{\Sigma}_{e-} \quad (17.57)$$

Une telle décomposition permet de considérer que les variables d'endommagement ont un effet sur les propriétés de souplesse qui dépend de la nature positive ou négative des contraintes d'origine élastique. Afin de garantir la continuité de la relation qui lie le tenseur des contraintes au tenseur des déformations, il est parfois intéressant d'introduire une grandeur tensorielle $\mathbf{A}_e = \sqrt{\mathbb{C}_0} : \mathbf{E}_e$ avec la décomposition suivante :

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A}_{e+} + \mathbf{A}_{e-} \quad (17.58)$$

La grandeur tensorielle \mathbf{A}_e , introduite par [Ladevèze \(1983\)](#), n'est ni une contrainte, ni une déformation mais une grandeur homogène à la racine carrée d'une pression.

Remarque Lorsque les propriétés de rigidité sont initialement isotropes, le tenseur de rigidité initial \mathbb{C}_0 , qu'il soit isotherme ou isentropique, peut se décomposer en parties sphérique et déviatorique comme suit :

$$\mathbb{C}_0 = 3B_0\mathbb{P}_{\text{sph}} + 2G_0\mathbb{P}_{\text{dev}}$$

Puisque les projecteurs sphérique \mathbb{P}_{sph} et déviatorique \mathbb{P}_{dev} sont mutuellement orthogonaux, la racine carrée de \mathbb{C}_0 se déduit aisément du module de compressibilité initial B_0 et du module de cisaillement initial G_0 par la relation :

$$\sqrt{\mathbb{C}_0} = \sqrt{3B_0}\mathbb{P}_{\text{sph}} + \sqrt{2G_0}\mathbb{P}_{\text{dev}}$$

17.2.3 Exemples de lois de comportement

À titre d'illustration, différentes lois de comportement, qui s'appuient sur le concept de variable d'endommagement, sont présentées dans la suite. Ces lois de comportement peuvent être perçues comme une extension des modèles exposés dans les chapitres précédents.

Modèle d'endommagement élastique

Il est possible de construire un modèle d'endommagement anisotrope fragile en prenant comme point de départ le modèle de comportement thermoélastique développé au Chapitre 14. Ce modèle utilise comme variables d'état externes une mesure lagrangienne de l'état de déformation \mathbf{E} et la température absolue T . Un tel choix permet de décomposer le tenseur des déformations en une partie élastique et une partie thermique, i.e. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_{th}$. Afin de considérer la dégradation des propriétés de rigidité, une variable d'état interne $\mathbf{\Delta}$, qui permet de caractériser l'endommagement, est introduite. Cette variable est un tenseur de rang deux symétrique dont les trois valeurs propres mesurent l'augmentation de souplesse selon chacune des trois directions propres correspondantes. Enfin, une variable scalaire Θ (sans dimension) est également utilisée pour contrôler l'évolution de la résistance qu'oppose un point matériel au développement de l'endommagement.

Pour un point matériel, l'énergie libre spécifique a , qui joue ici le rôle de potentiel d'état, est une fonction des variables d'état de la forme suivante :

$$a = \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}_{th} + \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{E}_{th} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0) : \mathbf{E}_{th} - \int_{T_0}^T \int_{T_0}^{\theta} \frac{\bar{c}_v(\eta)}{\eta} d\eta d\theta + \frac{\Upsilon_c}{\rho_0} \frac{\Theta}{1 + \Theta} + a_0 - s_0(T - T_0) \quad (17.59)$$

Si la relation précédente est semblable à celle introduite au Chapitre 14, il convient néanmoins de préciser que les propriétés de rigidité dépendent non seulement de la température mais également de la variable d'endommagement $\mathbf{\Delta}$. Aussi, cette relation utilise un terme supplémentaire qui fait intervenir la différence entre le tenseur de rigidité initial (sans endommagement) \mathbb{C}_0 et le tenseur de rigidité actuel \mathbb{C} . Ce terme particulier, qui permet à l'endommagement d'avoir une origine purement mécanique, s'annule en l'absence d'endommagement. Enfin, l'énergie libre spécifique inclut une contribution qui dépend de la seule variable de résistance à l'endommagement. Cette contribution, qui est contrôlée par un paramètre scalaire Υ_c , correspond à l'énergie stockée en raison de l'endommagement (e.g. formation de défauts internes).

L'énergie libre spécifique permet de construire l'ensemble des relations d'état. En particulier, en l'absence de contribution visqueuse (i.e. $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_e$),

la relation d'état qui donne le tenseur des contraintes Σ est :

$$\Sigma = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (17.60)$$

$$= \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{th}) = \mathbb{C} : \mathbf{E}_e \quad (17.61)$$

Aussi, la dérivation de l'énergie libre spécifique par rapport à la température permet d'établir la relation d'état qui fournit l'expression de l'entropie spécifique s :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (17.62)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E}_e : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E}_e + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{E}_e : \mathbb{C} : \bar{\alpha} + \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E}_{th} : \frac{\partial \mathbb{C}_0}{\partial T} : \mathbf{E}_{th} \\ &+ \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{E}_{th} : \mathbb{C}_0 : \bar{\alpha} + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + s_0 \end{aligned} \quad (17.63)$$

Quand bien même cela n'est pas pris en compte dans la relation d'état précédente, il est tout à fait possible de considérer une éventuelle dépendance du paramètre Υ_c vis-à-vis de la température. Cela est nécessaire dès lors que la résistance à l'endommagement varie de manière significative avec la température.

Il est commode d'introduire une force thermodynamique Υ , qui (au signe près) est la variable duale de la variable d'endommagement Δ . L'expression de la force thermodynamique Υ est donnée par la relation d'état suivante :

$$\Upsilon = -\varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \Delta} \quad (17.64)$$

$$= -\frac{1}{2} \mathbf{E}_e : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \Delta} : \mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \Sigma : \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \Delta} : \Sigma \quad (17.65)$$

La variable Υ est généralement désignée par le terme de taux de restitution d'énergie. Elle correspond en effet à la quantité d'énergie qui, par unité de volume, est libérée en raison du développement de l'endommagement.

De manière semblable, la dérivation de l'énergie libre spécifique par rapport à la variable Θ permet d'établir l'expression de sa variable duale Π :

$$\Pi = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \Theta} \quad (17.66)$$

$$= \frac{\Upsilon_c}{(1 + \Theta)^2} \quad (17.67)$$

La grandeur Π est désignée par le terme de barrière énergétique dans ce qui suit. Comme détaillé ci-après, la barrière énergétique représente un seuil que le taux de restitution d'énergie doit excéder pour endommager un point matériel.

Afin de préciser la relation d'état (17.65), il convient d'explicitier l'effet de l'endommagement sur les propriétés de rigidité ou, de manière équivalente, de souplesse. À cette fin, on peut utiliser le tenseur $\delta\mathbb{S}$ qui mesure l'augmentation de souplesse induite par l'endommagement en l'absence d'effet de fermeture. Un choix de modélisation possible consiste à écrire ce dernier comme suit³ :

$$\delta\mathbb{S} = \frac{A-B}{6} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Delta} \otimes \mathbf{1}) + \frac{B}{4} (\mathbf{1} \underline{\otimes} \boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Delta} \underline{\otimes} \mathbf{1}) \quad (17.68)$$

où A et B sont deux constantes propres à chaque matériau. Une approche simple pour intégrer les effets de fermeture consiste à considérer que l'activation de ces derniers dépend du seul signe de la contrainte hydrostatique. L'unique direction de fermeture utilisée \mathbf{M}_1 est alors telle que :

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{3}} \text{ et } \mathbb{M}_1 = \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 = \mathbb{P}_{\text{sph}} \quad (17.69)$$

En suivant la stratégie présentée au 17.2.2 pour intégrer les effets de fermeture, on établit que le tenseur de souplesse s'écrit comme suit :

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_0 + \delta\mathbb{S} - \frac{AL}{3} \text{hv}(-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma})) \text{tr}(\boldsymbol{\Delta}) \mathbb{P}_{\text{sph}} \quad (17.70)$$

L'insertion de l'expression précédente dans la relation d'état (17.65) permet de reformuler cette dernière comme suit :

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \begin{cases} \frac{B}{2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \frac{A-B}{6} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \boldsymbol{\Sigma} - \frac{AL}{18} \text{tr}^2(\boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{1} & \text{si } \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \leq 0 \\ \frac{B}{2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \frac{A-B}{6} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \boldsymbol{\Sigma} & \text{si } \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \geq 0 \end{cases} \quad (17.71)$$

La relation précédente souligne que l'expression du taux de restitution d'énergie dépend du mode de chargement. Avec les hypothèses de modélisation adoptées, la détermination du mode de chargement (traction ou compression) repose sur le signe de la contribution sphérique à l'état de contrainte.

³Dans un souci de concision, on utilise l'opérateur $\underline{\otimes}$ qui, à partir de deux tenseurs de rang deux \mathbf{A} et \mathbf{B} , permet de construire un tenseur de rang quatre $\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}$ dont les composantes sont telles que $(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik}B_{jl} + A_{il}B_{jk}$.

Remarque Dans le cas particulier où l'endommagement est isotrope (i.e. $\Delta = \Delta \mathbf{1}$), le tenseur $\delta\mathbb{S}$ qui donne l'augmentation de souplesse s'exprime comme suit :

$$\delta\mathbb{S} = \Delta A \mathbb{P}_{\text{sph}} + \Delta B \mathbb{P}_{\text{dev}}$$

Selon la nature ouverte ou fermée des défauts, déterminée à partir de la trace du tenseur des contraintes, le tenseur de souplesse prend alors l'une des formes suivantes :

$$\mathbb{S} = \begin{cases} \mathbb{S}_0 + \Delta A \mathbb{P}_{\text{sph}} + \Delta B \mathbb{P}_{\text{dev}} & \text{si } \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) < 0 \\ \mathbb{S}_0 + \Delta A (1 - L) \mathbb{P}_{\text{sph}} + \Delta B \mathbb{P}_{\text{dev}} & \text{si } \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) > 0 \\ \mathbb{S}_0 + \Delta A (1 - L/2) \mathbb{P}_{\text{sph}} + \Delta B \mathbb{P}_{\text{dev}} & \text{si } \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) = 0 \end{cases}$$

Cette dernière expression souligne que, même lorsque les propriétés de souplesse sont anisotropes, l'effet de l'endommagement reste isotrope. L'effet de l'endommagement se décompose notamment en une contribution sphérique contrôlée par le paramètre A et une contribution déviatorique contrôlée par le paramètre B .

Puisque les variables d'endommagement et de résistance à l'endommagement sont les seules variables internes, l'utilisation de la relation (12.75) conduit à écrire la source de dissipation spécifique d'un point régulier sous la forme suivante :

$$d = \underbrace{\frac{\Upsilon}{\varrho_0} : \dot{\Delta} - \frac{\Pi}{\varrho_0} \dot{\Theta}}_{d_1} - \underbrace{\frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q}_{d_2} \quad (17.72)$$

Comme l'indique la relation précédente, outre la relation d'évolution associée à la densité surfacique de flux de chaleur, il est également nécessaire de doter la loi de comportement d'équations d'évolution pour la variable d'endommagement et la variable de résistance à l'endommagement.

De manière analogue à l'approche utilisée dans le cadre de la plasticité (voir Chapitre 16), il est commode d'introduire un critère d'endommagement afin de faciliter la construction de la relation d'évolution associée à l'endommagement. Le critère utilise la barrière énergétique Π qui prend

la fonction d'un taux de restitution d'énergie critique de sorte que :

$$\|\boldsymbol{\Upsilon}\| < \Pi \rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\Delta}}\| = \dot{\Theta} = 0 \text{ (domaine de préservation)} \quad (17.73)$$

$$\|\boldsymbol{\Upsilon}\| \geq \Pi \rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\Delta}}\| = \dot{\Theta} \geq 0 \text{ (domaine d'endommagement)} \quad (17.74)$$

Le critère d'endommagement permet de distinguer deux domaines. Le domaine de préservation est celui pour lequel le taux de restitution d'énergie est trop faible pour que l'endommagement puisse se développer. Par opposition, le domaine d'endommagement correspond à la situation où la variable d'endommagement évolue, conduisant ainsi à une dégradation des propriétés mécaniques.

Si le cadre des matériaux standards est adopté, les relations d'évolution sont déduites d'un potentiel de dissipation. Le critère d'endommagement présenté ci-dessus consiste à adopter un potentiel de dissipation au sein duquel la contribution de l'endommagement dépend de la seule différence entre la norme du taux de restitution d'énergie et la barrière énergétique⁴. Un possible choix consiste à adopter un potentiel de dissipation φ qui prend la forme suivante :

$$\varphi = \frac{W}{2\varrho_0} \left(\frac{\langle \|\boldsymbol{\Upsilon}\| - \Pi \rangle_+}{W} \right)^2 (1 + \|\boldsymbol{\Delta}\|)^2 + \frac{T}{2\varrho_0} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}(\ln T) \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}(\ln T) \quad (17.75)$$

où \mathbf{K} est le tenseur de conductivité thermique et W est un paramètre scalaire qui contrôle la cinétique d'endommagement. Outre la dépendance à la température, les propriétés de conductivité thermique peuvent également inclure une dépendance à l'endommagement. Les défauts à l'origine de l'endommagement peuvent en effet freiner les transferts de chaleur par conduction. Afin de considérer cet effet, il est possible d'exprimer le tenseur de conductivité thermique comme suit :

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{K}_0^{-1} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Delta} \cdot \mathbf{K}_0^{-1} + \mathbf{K}_0^{-1} \cdot \boldsymbol{\Delta}) \right)^{-1} \quad (17.76)$$

où \mathbf{K}_0 est le tenseur de conductivité thermique en l'absence d'endommagement.

Le potentiel de dissipation précédent permet de retrouver la loi de Fourier présentée au Chapitre 13.3, soit :

$$\mathbf{J}_q = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}(\ln T)} \quad (17.77)$$

$$= -\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} T \quad (17.78)$$

⁴Ce qui n'exclut pas une éventuelle dépendance aux variables d'état.

Pour la variable Θ , qui contrôle la résistance à l'endommagement, la loi d'évolution correspondante est :

$$\dot{\Theta} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \Pi} \quad (17.79)$$

$$= (1 + \|\Delta\|)^2 \frac{\langle \|\Upsilon\| - \Pi \rangle_+}{W} \quad (17.80)$$

Aussi, la loi d'évolution de la variable d'endommagement qui découle du potentiel de dissipation φ est :

$$\dot{\Delta} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \Upsilon} \quad (17.81)$$

$$= \dot{\Theta} \frac{\Upsilon}{\|\Upsilon\|} \quad (17.82)$$

Les relations précédentes montrent que le paramètre W contrôle la cinétique d'endommagement. Le cas particulier où W est nul correspond au cas où l'endommagement est indépendant du temps. La norme du taux de restitution d'énergie ne peut alors excéder la barrière énergétique Π .

Afin d'illustrer le comportement obtenu avec le modèle présenté ici, l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation est représentée pour différents modes de chargement (traction uniaxiale, compression hydrostatique et cisaillement pur) sur la Figure 17.8. Les propriétés de rigidité initiales sont considérées comme étant isotropes. On peut remarquer que les résultats obtenus en compression hydrostatique sont largement affectés par la valeur du paramètre de fermeture L . Lorsque celui-ci est égal à l'unité, auquel cas les effets de fermeture sont complètement actifs, le comportement en compression hydrostatique n'est pas affecté par l'endommagement. Pour les cas de la traction uniaxiale et du cisaillement pur, la composante sphérique de l'état de contrainte étant positive ou nulle, les effets de fermeture n'interviennent pas. La valeur du paramètre L n'a donc aucun impact sur les résultats obtenus pour ces modes de chargement.

Modèle d'endommagement viscoélastique

Afin d'illustrer les possibilités de modélisation offertes par la décomposition d'une grandeur tensorielle en parties positive et négative, un modèle de comportement viscoélastique est décrit dans cette section. Le modèle présenté est un modèle de Kelvin-Voigt (voir 15.4.3) modifié afin d'intégrer l'effet

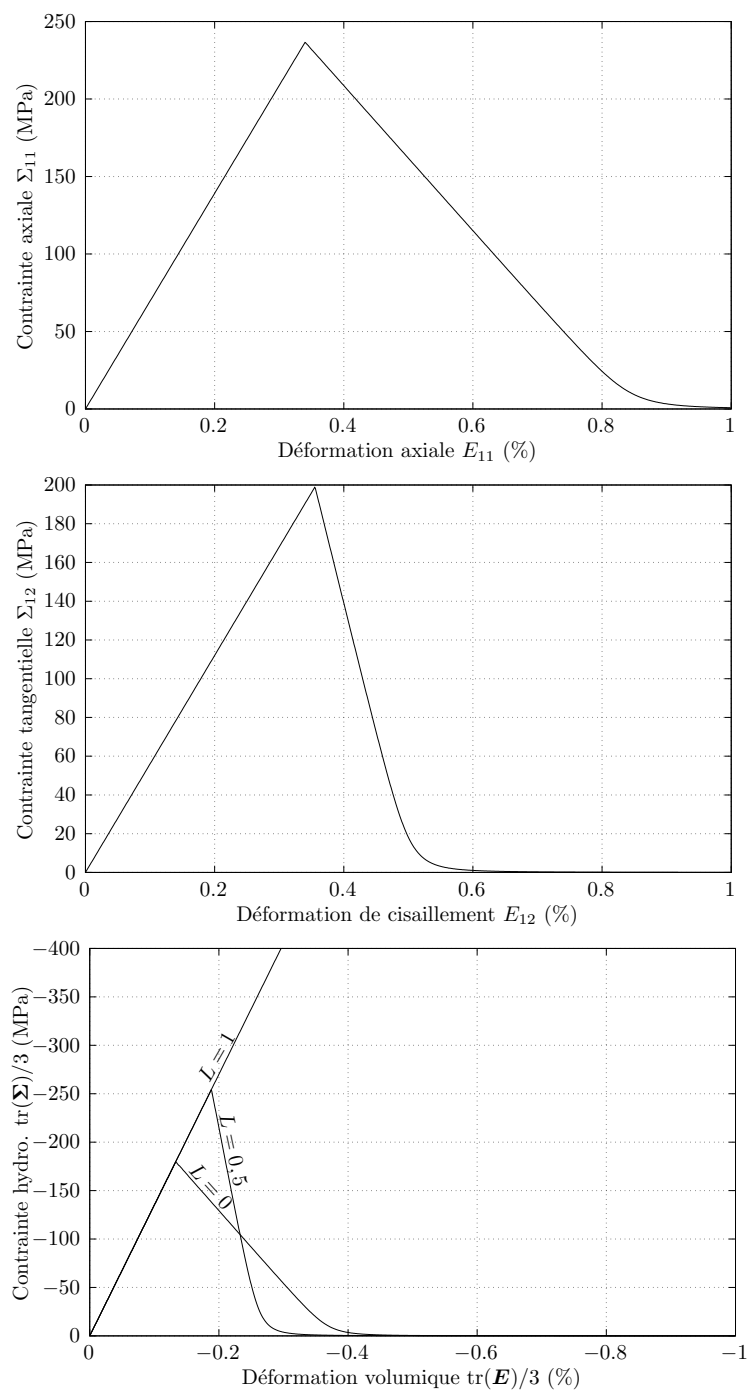


Figure 17.8: Evolution de la contrainte en fonction de la déformation avec le modèle d'endommagement fragile pour différents modes de chargement : traction uniaxiale (haut), cisaillement pur (milieu) et compression hydrostatique (bas).

de l'endommagement sur le comportement. Outre une mesure lagrangienne de l'état de déformation \mathbf{E} et la température absolue T , ce modèle utilise une variable d'endommagement scalaire D pour représenter l'état d'un point matériel.

Une méthode permettant de considérer les effets de fermeture sur le comportement consiste à exprimer l'énergie libre spécifique a comme suit :

$$a = \frac{1}{2\rho_0}(1-D)\mathbf{A}_+ : \mathbf{A}_+ + (1-LD)\frac{1}{2\rho_0}\mathbf{A}_- : \mathbf{A}_- - \int_{T_0}^T \int_{T_0}^{\theta} \frac{\bar{c}_v(\eta)}{\eta} d\eta d\theta + a_0 - s_0(T - T_0) \quad (17.83)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbb{C}_0} : \mathbf{E} = \mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_- \quad (17.84)$$

Le paramètre L est introduit afin de contrôler l'importance des effets de fermeture. La prise en compte de ces derniers s'appuie sur la séparation de l'énergie élastique spécifique en contributions d'origine positive et d'origine négative. La définition de ces différentes contributions utilise les parties positive et négative du tenseur \mathbf{A} dont l'évaluation repose sur la relation précédente.

Le modèle de Kelvin-Voigt suppose que le tenseur des contraintes est séparé en contributions élastique (notée Σ_e) et visqueuse (notée Σ_v). La contribution élastique se déduit de l'énergie libre spécifique par la relation d'état :

$$\Sigma_e = \rho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} \quad (17.85)$$

$$= (1-D)\sqrt{\mathbb{C}_0} : \mathbf{A}_+ + (1-LD)\sqrt{\mathbb{C}_0} : \mathbf{A}_- \quad (17.86)$$

La relation d'état qui fournit l'entropie spécifique s est obtenue par dérivation de l'énergie libre spécifique par rapport à la température absolue, ce qui conduit à :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (17.87)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} ((1-D)\mathbf{A}_+ + (1-LD)\mathbf{A}_-) : \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T} + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta + s_0 \quad (17.88)$$

Enfin, le taux de restitution d'énergie Y est donné par la relation d'état :

$$Y = -\varrho_0 \frac{\partial a}{\partial D} \quad (17.89)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_+ : \mathbf{A}_+ + L \mathbf{A}_- : \mathbf{A}_-) \quad (17.90)$$

L'utilisation des relations d'état précédentes permet d'établir que la source de dissipation spécifique d associée à un point matériel régulier est :

$$d = \underbrace{\frac{\Sigma_v}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{Y}{\varrho_0} \dot{D}}_{d_1} - \underbrace{\frac{1}{\varrho_0} (\nabla_x \ln T) \cdot \mathbf{J}_q}_{d_2} \quad (17.91)$$

L'expression ci-dessus souligne que la dissipation de chaleur est la résultante de l'évolution de l'état de déformation, de la progression de l'endommagement et de la conduction de chaleur.

Pour le modèle de Kelvin-Voigt, il est commode de construire les relations d'évolution à partir d'un potentiel de dissipation qui dépend des variables flux. Comme le montre l'expression (17.91), le modèle de comportement décrit ici inclut trois variables flux : le taux de déformation, la dérivée temporelle de la variable d'endommagement et la densité surfacique de flux de chaleur. Le potentiel de dissipation ϕ utilisé pour la suite est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{2\varrho_0} (1 - D) \mathbf{B}_+ : \mathbf{B}_+ + (1 - L D) \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{B}_- : \mathbf{B}_- \\ & + \frac{1}{2\varrho_0} \frac{W}{1 - D} \dot{D}^2 + \frac{1}{2\varrho_0 T} \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{J}_q \end{aligned} \quad (17.92)$$

De manière semblable à ce qui a été fait pour la partie élastique du comportement, la contribution visqueuse au potentiel de dissipation fait intervenir les parties positive et négative d'un tenseur \mathbf{B} tel que :

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbb{L}_0} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_- \quad (17.93)$$

où \mathbb{L}_0 est le tenseur de viscosité initial (i.e. en l'absence d'endommagement). La cinétique d'endommagement est contrôlée par le paramètre W . Le processus d'endommagement est d'autant plus rapide que ce paramètre est faible. Aussi, pour considérer l'effet de l'endommagement sur la conductivité thermique, le tenseur de conductivité thermique \mathbf{K} dépend de la variable d'endommagement au travers de la relation suivante :

$$\mathbf{K} = (1 - D) \mathbf{K}_0 \quad (17.94)$$

Le potentiel de dissipation permet d'établir que la contribution visqueuse à l'état de contrainte est donnée par :

$$\boldsymbol{\Sigma}_v = \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (17.95)$$

$$= (1 - D) \sqrt{\mathbb{L}_0} : \mathbf{B}_+ + (1 - L D) \sqrt{\mathbb{L}_0} : \mathbf{B}_- \quad (17.96)$$

La relation de comportement qui fournit l'état de contrainte est obtenue en combinant la relation d'état (17.86) à la relation d'évolution (17.96) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_e + \boldsymbol{\Sigma}_v \quad (17.97)$$

$$\begin{aligned} &= (1 - D) \left(\sqrt{\mathbb{C}_0} : \mathbf{A}_+ + \sqrt{\mathbb{L}_0} : \mathbf{B}_+ \right) \\ &+ (1 - L D) \left(\sqrt{\mathbb{C}_0} : \mathbf{A}_- + \sqrt{\mathbb{L}_0} : \mathbf{B}_- \right) \end{aligned} \quad (17.98)$$

La densité de taux de restitution d'énergie est reliée à la dérivée temporelle de la variable d'endommagement par :

$$Y = \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \dot{D}} \quad (17.99)$$

$$= \frac{W}{1 - D} \dot{D} \quad (17.100)$$

Enfin, la partie thermique du potentiel de dissipation permet d'établir que le gradient du champ de température est donné par :

$$\nabla_{\mathbf{x}} T = T \nabla_{\mathbf{x}} (\ln T) = -\varrho_0 T \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{J}_q} \quad (17.101)$$

$$= -\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{J}_q \quad (17.102)$$

La relation précédente est la loi de Fourier présentée au 13.3.

La Figure 17.9 montre les résultats obtenus avec le modèle précédent pour un matériau isotrope et incompressible sollicité soumis à une déformation de cisaillement périodique. Le paramètre L qui contrôle les effets de fermeture est fixé à zéro. Ainsi, même lorsque la variable d'endommagement est égale à l'unité, la contrainte reste non-nulle en raison de la contribution négative qui existe en cisaillement.

Modèle d'endommagement plastique

Certains modes d'endommagement, en particulier l'endommagement ductile et l'endommagement de fluage (voire l'endommagement de fatigue), sont

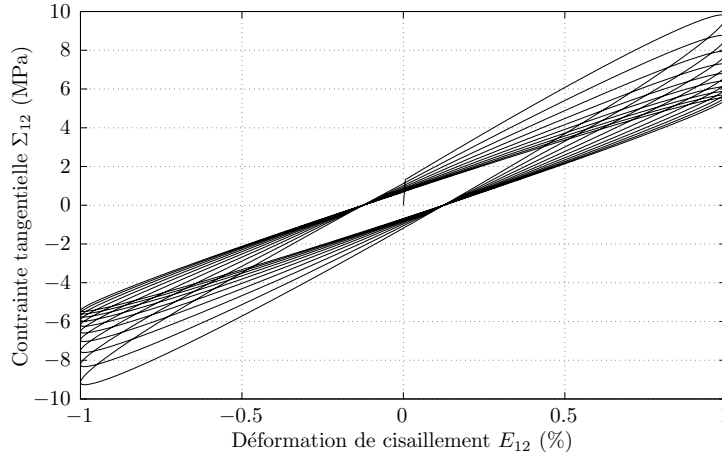


Figure 17.9: Évolution de la contrainte tangentielle en fonction de la déformation de cisaillement avec le modèle d'endommagement viscoélastique pour un chargement de cisaillement périodique.

liés à l'accumulation de déformation plastique. Afin d'intégrer ces modes d'endommagement dans une loi de comportement, il convient donc de coupler la croissance de l'endommagement au développement de la plasticité. À cette fin, les concepts (e.g. limite d'élasticité, contrainte équivalente) introduits au Chapitre 16 sont utilisés pour la construction des équations de comportement.

En plus d'une mesure de déformation et de la température absolue, le modèle proposé ci-après utilise comme variables d'état internes, une mesure de la déformation plastique \mathbf{E}_p , une variable scalaire d'écrouissage isotrope Q et une variable scalaire d'endommagement D . L'énergie libre spécifique a , qui dépend de ces différentes variables d'état, est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 a = & \frac{1}{2\rho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) - \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) : \mathbb{C} : \mathbf{E}_{th} \\
 & + \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{E}_{th} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0) : \mathbf{E}_{th} + \frac{1}{\rho_0} \frac{H}{n+1} Q^{n+1} \\
 & - \int_{T_0}^T \int_{T_0}^{\theta} \frac{\bar{c}_v(\eta)}{\eta} d\eta d\theta + a_0 - s_0(T - T_0)
 \end{aligned} \tag{17.103}$$

Quand bien même cela n'apparaît pas explicitement dans la définition précédente de l'énergie libre spécifique, il convient de préciser que les propriétés de rigidité dépendent de la variable d'endommagement D . Outre les

propriétés élastiques, la relation précédente utilise le module d'écroissage H et le coefficient d'écroissage n .

Remarque Dans un souci de simplicité, le choix est fait de limiter l'écroissage à sa contribution isotrope. La prise en compte d'une contribution cinématique ne pose néanmoins pas de difficulté particulière.

La relation d'état qui, en l'absence de contribution visqueuse, permet d'évaluer le tenseur des contraintes est :

$$\Sigma = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}} = -\varrho_0 \frac{\partial a}{\partial \mathbf{E}_p} \quad (17.104)$$

$$= \mathbb{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{th} - \mathbf{E}_p) = \mathbb{C} : \mathbf{E}_e \quad (17.105)$$

Du fait de la décomposition additive du tenseur des déformations en contributions élastique, thermique et plastique (i.e. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_{th} + \mathbf{E}_p$), la variable duale du tenseur des déformations plastiques n'est autre que l'opposé du tenseur des contraintes.

Lorsque le coefficient d'écroissage est indépendant de la température, la relation d'état qui fournit l'entropie spécifique est :

$$s = -\frac{\partial a}{\partial T} \quad (17.106)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E}_e : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial T} : \mathbf{E}_e + \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{E}_e : \mathbb{C} : \bar{\alpha} + \frac{1}{2\varrho_0} \mathbf{E}_{th} : \frac{\partial \mathbb{C}_0}{\partial T} : \mathbf{E}_{th} \\ &+ \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{E}_{th} : \mathbb{C}_0 : \bar{\alpha} + \int_{T_0}^T \frac{\bar{c}_v(\theta)}{\theta} d\theta - \frac{1}{\varrho_0} \frac{1}{n+1} \frac{\partial H}{\partial T} Q^{n+1} + s_0 \end{aligned} \quad (17.107)$$

Conformément à la démarche explicitée au Chapitre 16, la variable duale de la variable d'écroissage est une contrainte scalaire R qui mesure l'expansion ou la contraction du domaine d'élasticité. La relation d'état qui fournit l'expression de cette grandeur est :

$$R = \varrho_0 \frac{\partial a}{\partial Q} \quad (17.108)$$

$$= H Q^n \quad (17.109)$$

Aussi, la variable duale de l'endommagement est la densité de taux de resti-

tution d'énergie Y telle que :

$$Y = -\varrho_0 \frac{\partial a}{\partial D} \quad (17.110)$$

$$= -\frac{1}{2} \mathbf{E}_e : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial D} : \mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial D} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (17.111)$$

La définition complète des relations d'état nécessite de préciser comment les propriétés de rigidité sont affectées par l'endommagement. Une approche simple consiste à utiliser une relation de la forme :

$$\mathbf{C} = (1 - D) \mathbf{C}_0 + D \text{ hv}(\text{tr}(-\mathbf{E}_e)) (\mathbf{C}_0 :: \mathbb{P}_{\text{sph}}) \mathbb{P}_{\text{sph}} \quad (17.112)$$

Afin de considérer les effets de fermeture, l'évaluation des propriétés de rigidité s'appuie sur la partie sphérique du tenseur des déformations élastiques. Lorsque cette dernière est négative, les effets de fermeture deviennent actifs ce qui permet à la partie sphérique du tenseur de rigidité de retrouver sa valeur initiale.

Avec les différentes variables internes utilisées, la source de dissipation spécifique d associée à un point matériel régulier est donnée par :

$$d = \underbrace{\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\varrho_0} : \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{R}{\varrho_0} \dot{Q} + \frac{Y}{\varrho_0} : \dot{D}}_{d_1} - \underbrace{\frac{1}{\varrho_0} (\nabla_{\mathbf{x}} \ln T) \cdot \mathbf{J}_q}_{d_2} \quad (17.113)$$

Pour établir les relations d'évolution, en particulier pour la déformation plastique, il est usuel de recourir au concept de contrainte effective. Toute chose égale par ailleurs, le tenseur des contraintes effectif $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ est celui que verrait un point matériel s'il n'était pas endommagé. Le tenseur des contraintes effectif est donc obtenu à partir de la relation :

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{C}_0 : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{th} - \mathbf{E}_p) = \mathbf{C}_0 : \mathbb{S} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (17.114)$$

Le tenseur effectif est intéressant en cela qu'il constitue une estimation de l'état de contrainte appliqué à la partie saine d'un point matériel, laquelle contient le processus de déformation plastique.

Afin de décrire le processus de déformation plastique, il est commode de recourir à la notion de fonction de charge. La fonction de charge F utilisée ici s'exprime comme suit :

$$F = \hat{\Sigma}_{eq} - \Sigma_0 - R + \frac{Y}{W} \left(1 + B \text{ tr}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) \right) Z(D) \quad (17.115)$$

avec :

$$\hat{\Sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\Sigma}_{\text{dev}} : \hat{\Sigma}_{\text{dev}}} \quad (17.116)$$

où Σ_0 désigne la limite d'élasticité initiale. Si le concept de fonction de charge reste identique à celui introduit au 16.6.2, deux modifications essentielles sont néanmoins apportées afin de coupler endommagement et plasticité. D'abord, la contrainte équivalente, qui s'appuie ici sur le critère de von Mises, est évaluée à partir de la partie déviatorique du tenseur des contraintes effectif. Ensuite, la fonction de charge fait intervenir une contribution de la densité du taux de restitution d'énergie et de la trace du tenseur des contraintes effectif. Cette contribution est contrôlée par les paramètres W et B . Elle fait également intervenir une fonction de la variable d'endommagement Z qui contrôle le couplage entre plasticité et endommagement. Cette fonction vérifie les deux conditions suivantes :

$$Z(D) \geq 0 \text{ et } Z(1) = 0 \quad (17.117)$$

Exemple Pour assurer le couplage entre plasticité et endommagement, il est possible d'utiliser une fonction $Z(D)$ polynomiale de degré deux telle que :

$$Z(D) = (A + (1 - A)D - D^2)$$

où $A > 0$ est un paramètre qui contrôle la croissance de l'endommagement au début d'un processus de déformation plastique.

Si le cadre des matériaux standards est adopté, les relations d'évolution des différentes variables internes se déduisent d'un potentiel de dissipation. Pour un processus de déformation plastique dépendant du temps (i.e. viscoplasticité), une forme possible du potentiel de dissipation est la suivante :

$$\varphi = \frac{1}{\rho_0} \frac{K}{1/m + 1} \left(\frac{\langle F \rangle_+}{K} \right)^{1/m+1} + \frac{T}{2\rho_0} \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(\ln T) \quad (17.118)$$

où K est un paramètre de viscosité, m est un coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation et \mathbf{K} est le tenseur de conductivité thermique. Pour intégrer l'effet de l'endommagement sur les propriétés de conductivité thermique, le modèle présenté ici utilise la relation suivante :

$$\mathbf{K} = (1 - D)\mathbf{K}_0 + D \text{ hv}(\text{tr}(-\mathbf{E}_e)) (\mathbf{K}_0 : \mathbf{1}) \mathbf{1} \quad (17.119)$$

Cette relation suppose que les propriétés de conductivité thermique sont affectées par les effets de fermeture de manière analogue aux propriétés de rigidité.

Le potentiel de dissipation précédent permet de retrouver la loi de Fourier :

$$\mathbf{J}_q = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nabla_{\mathbf{x}} (\ln T)} \quad (17.120)$$

$$= -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (17.121)$$

Aussi, pour expliciter les relations d'évolution des différentes variables internes de manière concise, il est commode d'introduire le multiplicateur plastique \dot{P} tel que :

$$\dot{P} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial F} = \left(\frac{\langle F \rangle_+}{K} \right)^{1/m} \quad (17.122)$$

La relation d'évolution du tenseur des déformations plastiques se déduit aisément du potentiel de dissipation par dérivation en chaîne :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\Sigma}} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial \hat{\Sigma}} : \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \Sigma} \quad (17.123)$$

$$= \dot{P} \left(\frac{3}{2} \frac{\hat{\Sigma}_{\text{dev}}}{\hat{\Sigma}_{\text{eq}}} + \frac{Y}{W} B Z(D) \mathbf{1} \right) : \mathbb{C}_0 : \mathbb{S} \quad (17.124)$$

Il convient de préciser que, selon la relation d'évolution précédente, l'écoulement plastique n'est pas nécessairement incompressible. En effet, quand bien même le critère de plasticité utilisé est celui de von Mises, l'écoulement plastique contient une contribution sphérique que le paramètre B permet d'ajuster.

De manière semblable, pour la variable d'érouissage isotrope Q , la relation d'évolution correspondante est :

$$\dot{Q} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial R} \quad (17.125)$$

$$= \dot{P} \quad (17.126)$$

Enfin, la relation d'évolution associée à la variable d'endommagement s'obtient comme suit :

$$\dot{D} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (17.127)$$

$$= \frac{\dot{P}}{W} \left(1 + B \operatorname{tr}(\hat{\Sigma}) \right) Z(D) \quad (17.128)$$

La relation précédente montre que, en raison de la contribution du taux de restitution d'énergie à la fonction de charge, la croissance de l'endommagement est liée au développement de la plasticité. Le couplage entre endommagement et plasticité est contrôlé par les paramètres W et B . En particulier, la ductilité d'un matériau est d'autant plus importante que le paramètre W est élevé. Aussi, l'effet de la contrainte hydrostatique sur l'endommagement est d'autant plus marqué que le paramètre B est élevé. Enfin, la relation d'évolution de la variable d'endommagement démontre la nécessité des conditions (17.117) imposées à la fonction de couplage. Spécifiquement, la première condition permet de garantir que le développement de la plasticité ne provoque pas de décroissance de l'endommagement. La seconde condition est introduite pour que, lorsque l'endommagement atteint sa valeur maximale (i.e. $D = 1$), il ne puisse plus croître.

Remarque Dans le cas particulier où le paramètre de sensibilité à la contrainte hydrostatique B est nul, il est possible d'intégrer la relation d'évolution de la variable d'endommagement (17.128) si la fonction de couplage $Z(D)$ est de la forme :

$$Z(D) = (A + (1 - A)D - D^2)$$

On obtient alors que la déformation plastique cumulée est liée à la variable d'endommagement par une relation telle que :

$$P = P_0 + \frac{W}{1 + A} \ln \left(\frac{(D + A)(D_0 - 1)}{(D - 1)(D_0 + A)} \right)$$

où D_0 (respectivement P_0) désigne la valeur de la variable d'endommagement (respectivement de déformation plastique cumulée) à l'instant initial.

La Figure 17.10 montre un exemple de courbes contrainte-déformation obtenues avec le modèle décrit ici pour différents modes de sollicitation (i.e. traction uniaxiale, cisaillement pur et compression uniaxiale). Afin d'illustrer l'effet du paramètre de sensibilité à la contrainte hydrostatique B , différentes valeurs ont été utilisées pour ce dernier en traction uniaxiale et en compression uniaxiale. Pour le cas particulier du cisaillement pur, le tenseur des contraintes effectif étant purement déviatorique, ce paramètre n'a aucun effet sur le comportement.

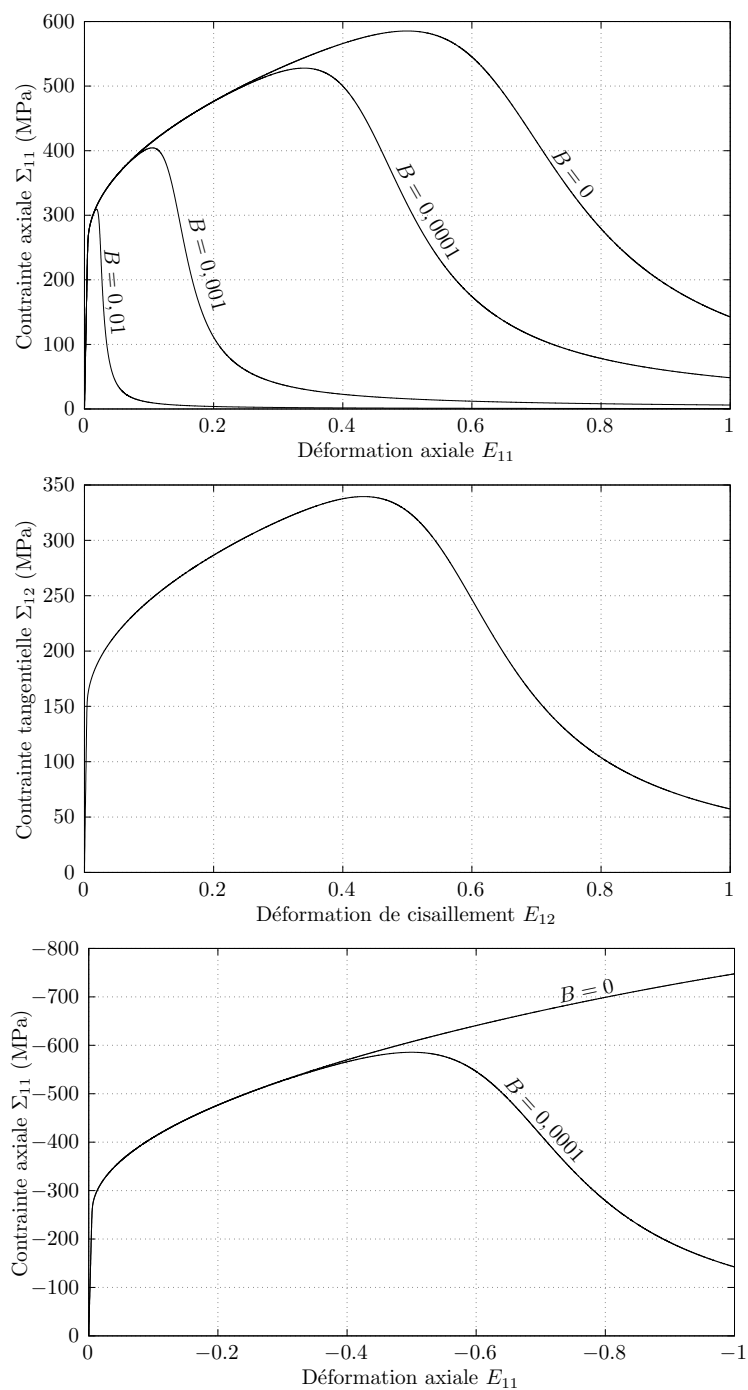


Figure 17.10: Evolution de la contrainte en fonction de la déformation avec le modèle d'endommagement ductile pour différents modes de chargement : traction uniaxiale (haut), cisaillement pur (milieu) et compression uniaxiale (bas).

Partie III

Annexes

Annexe A

Vecteurs et tenseurs

L'étude des milieux continus s'appuie largement sur les tenseurs pour représenter des grandeurs physiques qui, à la différence des grandeurs scalaires, sont directionnelles. Quelques éléments de calcul tensoriel essentiels pour l'étude des milieux continus sont donc exposés dans ce chapitre. Parce que les grandeurs physiques utilisées (e.g. contrainte, déformation) dépendent de la position considérée, elles sont généralement représentées par des champs scalaires ou tensoriels. La représentation de ces champs utilise un système de coordonnées afin de repérer les positions occupées par les différents points d'un système et d'explicitier les grandeurs tensorielles. La première partie de ce chapitre vise donc à rappeler quelques notions importantes pour l'utilisation des systèmes de coordonnées en mécanique classique. Parce que la notion de tenseur peut être perçue comme une extension de celle de vecteur, les principaux outils de l'algèbre vectorielle puis tensorielle sont présentés dans la seconde partie de ce chapitre. La dernière partie de ce chapitre est dédiée à l'analyse vectorielle et tensorielle. Les opérateurs différentiels (e.g. gradient, divergence) importants pour l'étude des milieux continus sont présentés. Les théorèmes de Green-Ostrogradski et de Stokes sont finalement rappelés.

A.1 Position, coordonnées et bases

A.1.1 Espace euclidien

En physique, en particulier en mécanique, il est nécessaire de pouvoir repérer la position des points qui composent un système. En mécanique classique, l'espace dans lequel évoluent les points est un espace euclidien à trois dimensions (noté \mathcal{E}) qui permet d'utiliser les notions de distance et d'angle.

Si on considère deux points \mathcal{A} et \mathcal{B} de l'espace euclidien \mathcal{E} , il est possible de représenter la différence entre ces deux points par un vecteur \mathbf{v} dont la norme correspond à la distance qui sépare les points \mathcal{A} et \mathcal{B} . Un vecteur tel que \mathbf{v} est un élément de l'espace vectoriel V associé à l'espace euclidien \mathcal{E} .

Pour définir la position d'un point à partir d'un vecteur, il faut préalablement choisir un point particulier (noté \mathcal{O}) comme point d'origine. Si certains choix sont plus commodes que d'autres, il n'en reste pas moins que le choix du point d'origine est arbitraire. Le vecteur position \mathbf{x} associé à un point \mathcal{A} de l'espace euclidien correspond à la différence avec l'origine \mathcal{O} , ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{x} = \mathcal{A} - \mathcal{O} \quad (\text{A.1})$$

De manière semblable, afin de spécifier ce que représente le point \mathcal{A} , on peut réécrire la relation précédente comme suit :

$$\mathcal{A} = \mathcal{O} + \mathbf{x} \quad (\text{A.2})$$

La relation précédente traduit le fait que le point \mathcal{A} est obtenu en partant de l'origine \mathcal{O} et en se déplaçant de \mathbf{x} .

A.1.2 Coordonnées cartésiennes et curvilignes

Afin de réaliser des opérations sur les tenseurs, il faut préalablement adopter un système de coordonnées. Ainsi, dans un espace euclidien tridimensionnel, la définition d'un vecteur tel que le vecteur position \mathbf{x} peut être réalisée à partir d'un triplet de coordonnées cartésiennes (notées x_1 , x_2 et x_3) telles que :

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = x_i \mathbf{e}_i \quad (\text{A.3})$$

où \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 sont les trois vecteurs linéairement indépendants utilisés pour construire la base considérée. Tout vecteur appartenant à l'espace vectoriel V correspond donc à une combinaison linéaire des trois vecteurs de base. Les coefficients utilisés pour décrire cette combinaison sont alors les composantes du vecteur considéré.

On peut remarquer que les vecteurs de base introduit précédemment correspondent aux dérivées partielles du vecteur position par rapport aux coordonnées :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_1}, \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_2} \text{ et } \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_3} \quad (\text{A.4})$$

Dès lors qu'un système de coordonnées cartésiennes est utilisé, les vecteurs \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 forment une base globale dans la mesure où ils sont identiques pour tous les points de l'espace, i.e. ils ne dépendent pas des coordonnées. Dans la pratique, il est souvent commode d'utiliser une base qui soit orthonormée, auquel cas les vecteurs de base \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Dans la suite, la notation \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 est réservée à la désignation des vecteurs de base d'une base orthonormée.

Remarque Afin d'alléger les notations, il est courant d'utiliser la convention de sommation d'Einstein. Selon cette convention, lorsqu'un indice est répété deux fois dans un terme, cela sous-entend implicitement la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice (de un à trois dans un espace à trois dimensions). Un indice pour lequel une somme est sous-entendue est qualifié de muet. Par opposition, un indice est dit libre dès lors qu'il n'apparaît qu'une seule fois dans un terme.

Quand bien même les coordonnées cartésiennes sont largement utilisées, il est parfois commode de réaliser certaines opérations en utilisant des coordonnées alternatives (e.g. sphériques, cylindriques) dites curvilignes (notées q^1 , q^2 et q^3). Les coordonnées curvilignes sont reliées à leurs homologues cartésiennes par des fonctions \hat{q}^1 , \hat{q}^2 et \hat{q}^3 de la forme :

$$q^1 = \hat{q}^1(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.5})$$

$$q^2 = \hat{q}^2(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.6})$$

$$q^3 = \hat{q}^3(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.7})$$

En utilisant des relations semblables à (A.4), il est possible d'obtenir trois

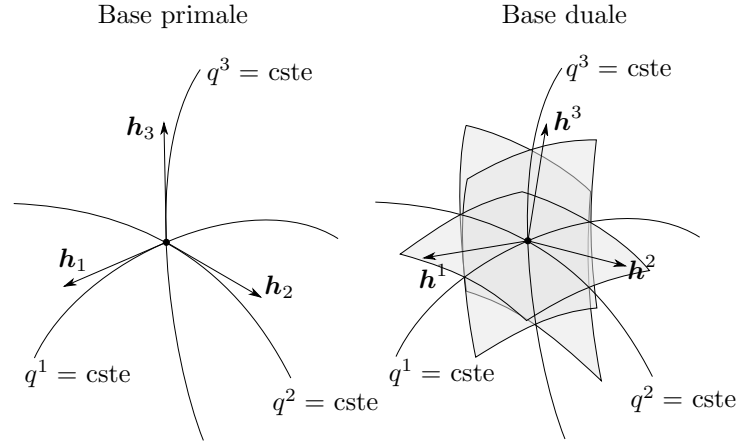


Figure A.1: Représentation des bases primale $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ et duale $(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3)$ associées à un point de l'espace repéré par trois coordonnées curvilignes (notées q^1, q^2 et q^3).

vecteurs de base $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ et \mathbf{h}_3 tels que :

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1}, \mathbf{h}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} \text{ et } \mathbf{h}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^3} \quad (\text{A.8})$$

Les vecteurs $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ et \mathbf{h}_3 définissent une base locale au sens où ils voient leur norme et/ou leur direction changer d'un point de l'espace à un autre. Aussi, lorsque les vecteurs de base sont définis à partir de (A.8), la base est qualifiée de primale. Comme l'illustre la Figure A.1, pour une base primale, un vecteur de base tel que \mathbf{h}_1 est tangent à la courbe qui, pour le point considéré, est obtenue en changeant la coordonnée q^1 tout en fixant les coordonnées q^2 et q^3 .

Il est possible de construire une base duale formée par les vecteurs $\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2$ et \mathbf{h}^3 . En particulier, pour un point de l'espace, le vecteur de la base duale \mathbf{h}^1 est choisi de sorte à être localement normal à la surface obtenue en fixant la coordonnée q^1 tout en variant les coordonnées q^2 et q^3 .

Les vecteurs des bases primale $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ et duale $(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3)$ sont liés les uns aux autres par la condition :

$$\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

où le symbole “.” représente le produit scalaire (voir ci-après). On déduit de la condition précédente que, lorsque la base primale est une base orthonormée, la base duale est identique à la base primale. Ainsi, lorsqu’un système de coordonnées cartésiennes incluant une base orthonormée est adopté, on est en mesure d’écrire que :

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 \text{ et } \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3 \quad (\text{A.10})$$

Lorsqu’un système de coordonnées curvilignes est utilisé, les coordonnées q^1 , q^2 et q^3 peuvent avoir des natures géométriques différentes, e.g. longueur ou angle¹. Les vecteurs de base, dès lors qu’ils sont obtenus à partir de (A.8), ont alors des dimensions différentes, ce qui n’est pas commode lorsqu’il s’agit d’étudier des grandeurs vectorielles ou tensorielles. En effet, les composantes de ces grandeurs, du fait de la dimension des vecteurs de base, peuvent avoir une dimension différente de la quantité qu’ils représentent. Afin de contourner cette difficulté, il est possible d’utiliser une base adimensionnelle représentée par trois vecteurs de base \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 et \mathbf{u}_3 tels que :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{h}_1}{\|\mathbf{h}_1\|}, \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{h}_2}{\|\mathbf{h}_2\|} \text{ et } \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{h}_3}{\|\mathbf{h}_3\|} \quad (\text{A.11})$$

Une telle base (parfois appelée base physique) facilite l’interprétation des composantes d’un vecteur et ou d’un tenseur. Par exemple, lorsqu’une base adimensionnelle est utilisée, les composantes du vecteur position sont toutes homogènes à une longueur.

A.1.3 Changement de base

Si on considère deux bases primales, auxquelles sont associés les vecteurs de base $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ et $(\mathbf{h}'_1, \mathbf{h}'_2, \mathbf{h}'_3)$, les passages d’une base à l’autre sont réalisés avec une matrice de passage $[\mathbf{J}]$ à partir des relations suivantes :

$$\mathbf{h}'_i = J_{ji} \mathbf{h}_j \text{ et } \mathbf{h}_i = J_{ji}^{-1} \mathbf{h}'_j \quad (\text{A.12})$$

Lorsque les vecteurs de base dérivent des coordonnées utilisées pour repérer les points, la matrice de passage est la matrice jacobienne associée à la

¹C’est par exemple le cas lorsqu’un système de coordonnées cylindriques ou sphériques est adopté.

transformation. Il s'agit d'une matrice carrée de dimension trois dont les coefficients J_{ji} sont donnés par les dérivées partielles suivantes :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \partial q^1 / \partial q'^1 & \partial q^1 / \partial q'^2 & \partial q^1 / \partial q'^3 \\ \partial q^2 / \partial q'^1 & \partial q^2 / \partial q'^2 & \partial q^2 / \partial q'^3 \\ \partial q^3 / \partial q'^1 & \partial q^3 / \partial q'^2 & \partial q^3 / \partial q'^3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

où q'^1 , q'^2 et q'^3 désignent les coordonnées du point considéré dans la nouvelle base. Le déterminant de la matrice jacobienne est couramment appelé jacobien. Dès lors que le jacobien est non-nul, la matrice jacobienne est inversible. Les coefficients de l'inverse de la matrice jacobienne sont tels que :

$$[\mathbf{J}^{-1}] = \begin{bmatrix} \partial q'^1 / \partial q^1 & \partial q'^1 / \partial q^2 & \partial q'^1 / \partial q^3 \\ \partial q'^2 / \partial q^1 & \partial q'^2 / \partial q^2 & \partial q'^2 / \partial q^3 \\ \partial q'^3 / \partial q^1 & \partial q'^3 / \partial q^2 & \partial q'^3 / \partial q^3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Si on s'intéresse aux bases duales, les relations qui permettent le passage vers l'ancienne ou la nouvelle base sont :

$$\mathbf{h}'^i = J_{ij}^{-1} \mathbf{h}^j \text{ et } \mathbf{h}^i = J_{ij} \mathbf{h}'^j \quad (\text{A.15})$$

Les relations précédentes garantissent que l'égalité (A.9), si elle est vérifiée pour l'ancienne base, est également satisfaite dans la nouvelle base.

Dans le cas particulier où les deux bases considérées sont orthonormées, la matrice de passage $[\mathbf{J}]$ est orthogonale. Son inverse se confond alors avec sa transposée (i.e. $[\mathbf{J}]^{-1} = [\mathbf{J}]^t$).

A.1.4 Systèmes de coordonnées particuliers

Coordonnées cylindriques

Lorsqu'un système de coordonnées cylindriques est adopté, la position d'un point \mathcal{P} est repérée par une distance r , un angle θ et une distance signée z . Comme l'illustre la Figure A.2, la coordonnée r correspond à la distance radiale qui sépare le point \mathcal{P} de l'axe d'un cylindre passant par l'origine \mathcal{O} . La coordonnée z est l'altitude du point \mathcal{P} , i.e. la distance qui le sépare du plan qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire à l'axe du cylindre. Enfin, la coordonnée θ est la distance angulaire entre un axe contenu dans

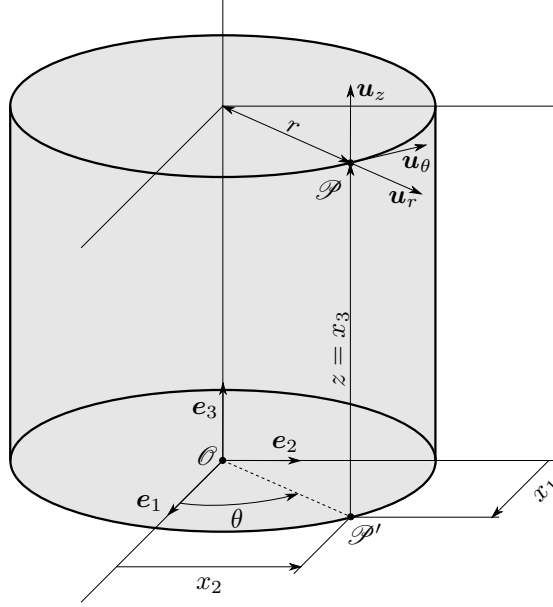


Figure A.2: Définition de la position d'un point \mathcal{P} à partir de ses coordonnées cylindriques.

le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et la droite qui passe par l'origine \mathcal{O} et le point \mathcal{P}' , projection du point \mathcal{P} dans ce plan.

Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'un point se déduisent de ses coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) à partir des relations suivantes :

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (\text{A.16})$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & \text{si } x_1 \neq 0 \\ \pi/2 & \text{si } x_1 = 0 \text{ et } x_2 > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x_1 = 0 \text{ et } x_2 < 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$z = x_3 \quad (\text{A.18})$$

Dans le cas particulier où les coordonnées x_1 et x_2 sont nulles, la valeur de l'angle θ est indéfinie. Les relations précédentes peuvent être réarrangées de sorte à exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées

cylindriques :

$$x_1 = r \cos \theta \quad (\text{A.19})$$

$$x_2 = r \sin \theta \quad (\text{A.20})$$

$$x_3 = z \quad (\text{A.21})$$

La matrice de passage, qui permet de passer de la base globale du système de coordonnées cartésiennes à la base locale du système de coordonnées cylindriques, se déduit des relations précédentes. Elle est donnée par :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

On en déduit que les vecteurs \mathbf{h}_r , \mathbf{h}_θ et \mathbf{h}_z qui forment la base primale du système de coordonnées cylindriques sont liés à leurs homologues \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 du système de coordonnées cartésiennes par² :

$$\mathbf{h}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_r \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{h}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \mathbf{e}_2 = r \mathbf{u}_\theta \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{h}_z = \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_z \quad (\text{A.25})$$

Si les vecteurs \mathbf{h}_r , \mathbf{h}_θ et \mathbf{h}_z forment une base orthogonale, celle-ci n'est néanmoins pas normée (à cause du vecteur \mathbf{h}_θ qui est homogène à une longueur). En pratique, il est donc préférable d'utiliser les vecteurs \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ et \mathbf{u}_z , qui correspondent à la forme adimensionnée des vecteurs \mathbf{h}_r , \mathbf{h}_θ et \mathbf{h}_z .

Les vecteurs \mathbf{h}^r , \mathbf{h}^θ et \mathbf{h}^z , qui forment la base duale, sont :

$$\mathbf{h}^r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_r \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{h}^\theta = -\frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_1 + \frac{\cos \theta}{r} \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_\theta}{r} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{h}^z = \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_z \quad (\text{A.28})$$

On peut remarquer que ces vecteurs sont quasiment identiques à ceux formant la base primale, à ceci près que la norme du vecteur \mathbf{h}^θ est l'inverse de celle de \mathbf{h}_θ .

²Afin de souligner la nature cylindrique du système de coordonnées utilisé, les vecteurs de base sont désignés par \mathbf{h}_r , \mathbf{h}_θ et \mathbf{h}_z (plutôt que \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 et \mathbf{h}_3).

Coordonnées sphériques

La résolution de certains problèmes est facilitée par l'adoption d'un système de coordonnées sphériques. Avec un tel système de coordonnées, la position d'un point \mathcal{P} est définie par une distance ρ et deux angles χ et ϕ (voir Figure A.3). La distance ρ est celle qui sépare le point considéré de l'origine \mathcal{O} . L'angle χ est la colatitude du point \mathcal{P} , i.e. l'angle qui sépare la droite passant par les points \mathcal{O} et \mathcal{P} , d'un axe qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire au plan équatorial. Enfin, si \mathcal{P}' est la projection du point \mathcal{P} dans le plan équatorial, la longitude ϕ est la distance angulaire qui sépare la droite passant par les points \mathcal{O} et \mathcal{P}' d'un axe contenu dans le plan équatorial d'une sphère.

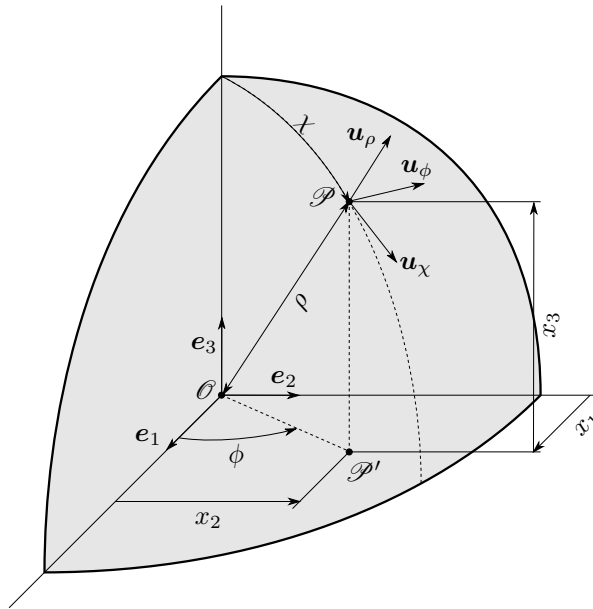


Figure A.3: Définition de la position d'un point \mathcal{P} à partir de ses coordonnées sphériques.

La conversion des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) d'un point vers ses

coordonnées sphériques (ρ, χ, ϕ) est réalisée à l'aide des relations suivantes :

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (\text{A.29})$$

$$\chi = \arccos \left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$\phi = \begin{cases} \arccos \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) & \text{si } y > 0 \\ -\arccos \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Lorsque le point considéré correspond à l'origine, la valeur de la colatitude χ n'est pas définie. De manière semblable, la longitude ϕ n'est pas définie pour tous les points pour lesquels les coordonnées cartésiennes x_1 et x_2 sont nulles. Les relations qui permettent le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes sont :

$$x_1 = \rho \sin \chi \cos \phi \quad (\text{A.32})$$

$$x_2 = \rho \sin \chi \sin \phi \quad (\text{A.33})$$

$$x_3 = \rho \cos \chi \quad (\text{A.34})$$

La matrice de passage $[\mathbf{J}]$, qui relie les vecteurs de la base locale associée aux coordonnées sphériques à la base globale, est donnée par :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \sin \chi \cos \phi & \rho \cos \chi \cos \phi & -\rho \sin \chi \sin \phi \\ \sin \chi \sin \phi & \rho \cos \chi \sin \phi & \rho \sin \chi \cos \phi \\ \cos \chi & -\rho \sin \chi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

La base primale du système de coordonnées sphériques est formée par trois vecteurs \mathbf{h}_ρ , \mathbf{h}_χ et \mathbf{h}_ϕ ³. La matrice de passage $[\mathbf{J}]$ permet d'établir que ces trois vecteurs de base sont liés à ceux définissant la base globale par :

$$\mathbf{h}_\rho = \sin \chi \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \chi \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \chi \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_\rho \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{h}_\chi = \rho \cos \chi \cos \phi \mathbf{e}_1 + \rho \cos \chi \sin \phi \mathbf{e}_2 - \rho \sin \chi \mathbf{e}_3 = \rho \mathbf{u}_\chi \quad (\text{A.37})$$

$$\mathbf{h}_\phi = -\rho \sin \chi \sin \phi \mathbf{e}_1 + \rho \sin \chi \cos \phi \mathbf{e}_2 = \rho \sin \chi \mathbf{u}_\phi \quad (\text{A.38})$$

Comme pour les coordonnées cylindriques, on observe que certains des vecteurs de base ne sont pas normés. Il est donc courant d'utiliser comme

³Afin de souligner la nature sphérique du système de coordonnées utilisé, les vecteurs de base sont désignés par \mathbf{h}_ρ , \mathbf{h}_χ et \mathbf{h}_ϕ (plutôt que \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 et \mathbf{h}_3).

vecteurs de base \mathbf{u}_ρ , \mathbf{u}_χ et \mathbf{u}_ϕ , qui sont les formes adimensionnelles des vecteurs \mathbf{h}_ρ , \mathbf{h}_χ et \mathbf{h}_ϕ . Pour le cas particulier d'un système de coordonnées sphériques, les vecteurs de la base duale sont :

$$\mathbf{h}^\rho = \sin \chi \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \chi \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \chi \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_\rho \quad (\text{A.39})$$

$$\mathbf{h}^\chi = \frac{1}{\rho} (\cos \chi \cos \phi \mathbf{e}_1 + \cos \chi \sin \phi \mathbf{e}_2 - \sin \chi \mathbf{e}_3) = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_\chi \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{h}^\phi = \frac{1}{\rho \sin \chi} (-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) = \frac{1}{\rho \sin \chi} \mathbf{u}_\phi \quad (\text{A.41})$$

A.2 Algèbre vectorielle et tensorielle

A.2.1 Vecteurs

Composantes d'un vecteur

En utilisant le formalisme introduit précédemment, un vecteur \mathbf{v} peut être repéré par ses composantes notées v^i ou v_i selon la nature primale ou duale de la base utilisée :

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{h}_i = v_i \mathbf{h}^i \quad (\text{A.42})$$

Les composantes v_i d'un vecteur \mathbf{v} sont qualifiées de covariantes. Elles peuvent être obtenues à partir des projections de ce dernier sur les différents vecteurs de la base primale :

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_i \quad (\text{A.43})$$

Les composantes v^i de ce même vecteur sont dites contravariantes. Elles correspondent aux projections du vecteur \mathbf{v} sur les vecteurs qui définissent la base duale :

$$v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}^i \quad (\text{A.44})$$

Le terme contravariant utilisé pour les composantes v^i fait référence à leur comportement lors d'un changement de base. En effet, sous l'effet d'un changement de base, ces composantes varient à l'inverse des vecteurs de base puisque :

$$v'^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}'^i = J_{ij}^{-1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}^j = J_{ij}^{-1} v^j \quad (\text{A.45})$$

où v'^i (respectivement v^i) désigne la i ème composante contravariante du vecteur \mathbf{v} dans la nouvelle (respectivement ancienne) base. Par opposition, le qualificatif covariant désigne les composantes v_i qui, lors d'un changement de base, varient comme les vecteurs de base :

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}'_i = J_{ji} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_j = J_{ji} v_j \quad (\text{A.46})$$

où v'_i (respectivement v_i) désigne la i ème composante covariante du vecteur \mathbf{v} dans la nouvelle (respectivement ancienne) base. Il est important de préciser que, lorsqu'une base orthonormée est utilisée, la distinction entre composantes covariantes et contravariantes n'a plus lieu d'être puisque la base duale est identique à la base primale.

Tenseur métrique

Les notions introduites précédemment permettent d'écrire que les composantes covariantes d'un vecteur se déduisent de ses composantes contravariantes (et réciproquement) par :

$$v_j = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_j = v^i \underbrace{\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j}_{G_{ij}} \quad \text{et} \quad v^j = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}^j = v_i \underbrace{\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^j}_{G^{ij}} \quad (\text{A.47})$$

Les produits scalaires entre les différents vecteurs des bases primale et duale, parce qu'ils sont importants pour la réalisation de certaines opérations, sont communément regroupés sous la forme de coefficients $G_{ij} = \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j$ et $G^{ij} = \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^j$. Quand bien même la notion de tenseur n'a pas été explicitée, les coefficients G_{ij} ou G^{ij} sont en fait les composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur particulier appelé tenseur métrique (noté \mathbf{G}). Le tenseur métrique est un tenseur symétrique (i.e. $G_{ij} = G_{ji}$ et $G^{ij} = G^{ji}$) dont les composantes covariantes et contravariantes sont telles que :

$$G_{ik} G^{kj} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

On peut remarquer que, par construction, le tenseur métrique associé à une base orthogonale est purement diagonal (i.e. $G_{ij} = G^{ij} = 0$ si $i \neq j$). Si la base est orthonormée, le tenseur métrique est diagonal et toutes les composantes diagonales sont égales à l'unité.

Dans la suite, on note g le déterminant de la matrice $[G_{ij}]$ formée par les composantes covariantes du tenseur métrique. Le nombre g est également

l'inverse du déterminant de la matrice $[G^{ij}]$ formée des composantes contravariantes du tenseur métrique. Dans le cas courant où la base utilisée est orthonormée, le scalaire g est égal à l'unité.

Exemple Pour le cas particulier des coordonnées cylindriques, le tenseur métrique \mathbf{G} est tel que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(h^r, h^\theta, h^z)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(h_r, h_\theta, h_z)} \end{aligned}$$

La grandeur scalaire g , qui est le déterminant (respectivement l'inverse du déterminant) de la matrice carrée formée par les composantes covariantes (respectivement contravariantes) du tenseur métrique est :

$$g = r^2$$

Aussi, pour le système de coordonnées sphériques, selon qu'on utilise la base primale ou duale, on obtient que le tenseur métrique \mathbf{G} est donné par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2 \chi \end{bmatrix}_{(h^\rho, h^\chi, h^\phi)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\rho \sin \chi)^2 \end{bmatrix}_{(h_\rho, h_\chi, h_\phi)} \end{aligned}$$

Pour ce système de coordonnées particulier, le scalaire g est alors tel que :

$$g = \rho^4 \sin^2 \chi$$

Opérations sur les vecteurs

La norme d'un vecteur \mathbf{v} est notée $\|\mathbf{v}\|$. Elle correspond à la racine carrée de la somme des produits des composantes contravariantes et covariantes, soit :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v^i v_i} \quad (\text{A.49})$$

La norme d'un vecteur est nulle si et seulement si le vecteur considéré est le vecteur nul. Les composantes de ce vecteur particulier, noté \mathbf{o} , sont toutes nulles i.e. $o_i = o^i = 0$.

Le produit scalaire (représenté par le symbole “.”) de deux vecteurs (notés \mathbf{v} et \mathbf{w}) a déjà été utilisé précédemment. Il fournit le résultat de la projection de \mathbf{v} sur \mathbf{w} (et réciproquement). Le produit scalaire dans une base quelconque est évalué à partir de :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta \quad (\text{A.50})$$

$$= v^i w_i = G^{ij} v_j w_i = v_j w^j = G_{ji} v^i w^j \quad (\text{A.51})$$

où θ (avec $0 \leq \theta \leq \pi$) désigne l'angle qui sépare les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} .

Le produit vectoriel (représenté par le symbole “ \times ”) de deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} linéairement indépendants fournit un vecteur $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ qui est orthogonal à \mathbf{v} et à \mathbf{w} , i.e. normal au plan défini par \mathbf{v} et \mathbf{w} . Aussi, la norme de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ correspond à la surface du parallélogramme formé par les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} . Dans le cas particulier où les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} sont colinéaires, le résultat du produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur nul. Le produit tensoriel de deux vecteurs est évalué à partir de :

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \epsilon_{ijk} v^j w^k \mathbf{h}^i \quad (\text{A.52})$$

où ϵ désigne le tenseur de permutation (de rang trois) dont les composantes covariantes et contravariantes sont données par :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +\sqrt{g} & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ ou } (3, 1, 2), \\ -\sqrt{g} & \text{si } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i, \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1/\sqrt{g} & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ ou } (3, 1, 2), \\ -1/\sqrt{g} & \text{si } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

Par construction, le produit vectoriel des vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} est tel que :

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin \theta \quad (\text{A.55})$$

Il convient également de préciser que, au contraire du produit scalaire, le produit vectoriel est anti-commutatif, i.e. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$.

La combinaison du produit scalaire et du produit vectoriel permet de définir le produit mixte. Plus particulièrement, pour un triplet de vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} le produit mixte est donné par :

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} u^j v^k w^i \quad (\text{A.56})$$

Le résultat du produit mixte est positif si les trois vecteurs considérés définissent une base directe, il est négatif dans le cas contraire. Aussi, la valeur absolue du produit mixte correspond au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs considérés. Il est donc nul dès lors que ces vecteurs sont coplanaires.

A.2.2 Tenseurs

Rang et composantes d'un tenseur

Un tenseur est un objet mathématique qui permet de manipuler des quantités physiques qui dépendent de plusieurs directions (e.g. état de déformation, propriétés de rigidité). La notion de tenseur, qui peut être perçue comme une généralisation de celle de vecteur, permet de représenter des applications multilinéaires. En particulier, un tenseur \mathbf{T} est une forme n -linéaire de V^n dans \mathbb{R} , ce qui peut se formaliser de la manière suivante :

$$\mathbf{T} : \underbrace{(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots)}_{n \text{ vecteurs}} \in V^n \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.57})$$

Le nombre n de vecteurs qu'un tenseur peut accepter comme argument correspond à son rang. La n -linéarité signifie que :

$$\mathbf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots) = \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \dots) + \mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad (\text{A.58})$$

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots) = \alpha \mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots), \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{A.59})$$

Dans un espace à trois dimensions, il faut 3^n composantes pour représenter un tenseur \mathbf{T} de rang n dans une base particulière. Les composantes d'un

tenseur (notées $T^{ij\dots kl\dots}$ ci-après) sont telles que :

$$\mathbf{T} = T^{ij\dots kl\dots} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j \otimes \dots \mathbf{h}^k \otimes \mathbf{h}^l \otimes \dots \quad (\text{A.60})$$

où, comme le stipule la convention de sommation d'Einstein, les n indices (e.g. i, j, k, l) varient de un à trois. On peut ainsi remarquer qu'un vecteur correspond au cas particulier d'un tenseur dont le rang est égal à un tandis qu'un scalaire est un tenseur de rang zéro. Aussi, comme le souligne l'Équation (A.60), les composantes d'un tenseur peuvent être à la fois contravariantes, auquel cas l'indice associé est en haut, et covariantes, auquel cas l'indice associé est en bas. La composante $T^{ij\dots kl\dots}$ correspond à la projection du tenseur \mathbf{T} sur les vecteurs définissant les bases primale et/ou duale, c'est-à-dire que :

$$T^{ij\dots kl\dots} = \mathbf{T}(\mathbf{h}^i, \mathbf{h}^j, \dots \mathbf{h}_k, \mathbf{h}_l, \dots) \quad (\text{A.61})$$

Les propriétés (A.58) et (A.59), qui résultent de la n -linéarité, permettent de calculer le résultat de la projection d'un tenseur \mathbf{T} sur un ensemble de n vecteurs à partir des composantes du tenseur et des vecteurs en utilisant la relation :

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots \mathbf{w}, \mathbf{x}, \dots) = T^{ij\dots kl\dots} u_i v_j \dots w^k x^l \dots \quad (\text{A.62})$$

Un tenseur de rang n associe un scalaire à un ensemble de n vecteurs, ce qui peut s'interpréter comme une extension du produit scalaire. On retrouve d'ailleurs la définition du produit scalaire dans le cas particulier où le rang du tenseur \mathbf{T} considéré est égal à un.

Abaissement et élévation d'indice Le tenseur métrique \mathbf{G} permet d'abaisser ou d'élever un indice, i.e. de convertir des composantes contravariantes en composantes covariantes (et réciproquement). Ainsi, un indice bas (m ci-dessous) peut être changé en indice haut (i ci-dessous) en utilisant :

$$T^{ij\dots kl\dots} = G^{im} T_m^{j\dots kl\dots} \quad (\text{A.63})$$

De manière semblable, un indice haut (n ci-dessous) peut évoluer en indice bas (k ci-dessous) à partir de :

$$T^{ij\dots kl\dots} = G_{kn} T^{ij\dots n l\dots} \quad (\text{A.64})$$

Changement de base Lors d'un changement de base, auquel on associe la matrice de passage $[\mathbf{J}]$, les composantes d'un tenseur \mathbf{T} dans la nouvelle base (notées $T^{i'j' \dots k'l' \dots}$ ci-après) sont reliées aux composantes de ce même tenseur dans l'ancienne base (notées $T^{ij \dots kl \dots}$ ci-après) par :

$$T^{i'j' \dots k'l' \dots} = J_{i'i}^{-1} J_{j'j}^{-1} \dots J_{kk'} J_{ll'} \dots T^{ij \dots kl \dots} \quad (\text{A.65})$$

On peut remarquer que, pour le cas particulier d'un tenseur d'ordre un (i.e. un vecteur), on retrouve les relations établies au [A.2.1](#).

Produit tensoriel La définition du tenseur \mathbf{T} à partir de ses composantes utilise le produit tensoriel (représenté par le symbole \otimes) pour assembler les vecteurs des bases primale et duale. Le produit tensoriel permet notamment de créer un tenseur \mathbf{T} de rang n à partir de n vecteurs par l'opération :

$$\mathbf{T} = \underbrace{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \dots \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{x} \otimes \dots}_{n \text{ vecteurs}} \quad (\text{A.66})$$

Les composantes d'un tenseur tel que le tenseur \mathbf{T} se déduisent des composantes des vecteurs qui le composent à partir de :

$$T^{ij \dots kl \dots} = u^i v^j \dots w_k x_l \dots \quad (\text{A.67})$$

Un tenseur, s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel de vecteurs, est dit décomposable.

Le produit tensoriel permet d'assembler non seulement des vecteurs mais également des tenseurs. En outre, le produit d'un tensoriel d'un tenseur \mathbf{R} de rang p et d'un tenseur \mathbf{S} de rang m permet de construire un tenseur $\mathbf{T} = \mathbf{R} \otimes \mathbf{S}$ de rang $n = p + m$ dont les composantes sont :

$$T^{ij \dots kl \dots} = R^{ij \dots} S_{kl \dots} \quad (\text{A.68})$$

Il convient de préciser que, en règle générale, le produit tensoriel n'est pas commutatif.

Addition et soustraction Deux tenseurs (notés \mathbf{S} et \mathbf{T}) peuvent être additionnés ou soustraits pour former des tenseurs $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ et $\mathbf{S} - \mathbf{T}$ dont le rang est identique à celui de \mathbf{S} et de \mathbf{T} . Dans une base particulière, ces

opérations sont simplement réalisées en additionnant ou en soustrayant les composantes des tenseurs \mathbf{S} et \mathbf{T} , soit :

$$\mathbf{S} + \mathbf{T} = (S^{ij\dots kl\dots} + T^{ij\dots kl\dots})\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j \otimes \dots \mathbf{h}^k \otimes \mathbf{h}^l \otimes \dots \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{S} - \mathbf{T} = (S^{ij\dots kl\dots} - T^{ij\dots kl\dots})\mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j \otimes \dots \mathbf{h}^k \otimes \mathbf{h}^l \otimes \dots \quad (\text{A.70})$$

Il est important de remarquer que l'addition et la soustraction de tenseurs sont des opérations qui n'ont de sens que lorsque les tenseurs concernés ont des rangs identiques.

Tenseurs de rang deux

Parmi les différentes quantités utilisées en mécanique, nombreuses sont celles qui sont représentées par des tenseurs de rang deux. Conformément à la discussion qui précède, un tenseur \mathbf{T} de rang deux peut être représenté à partir de ses composantes contravariantes T^{ij} , covariantes T_{ij} ou mixtes T^i_j et T_i^j par :

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j = T_{ij} \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j = T^i_j \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}^j = T_i^j \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}_j \quad (\text{A.71})$$

Il est possible de représenter un tenseur de rang deux sous la forme d'une matrice 3×3 qui, selon la base utilisée, fait apparaître ses composantes covariantes ou contravariantes. La représentation matricielle d'un tenseur de rang deux \mathbf{T} est donc donnée par l'une ou l'autre des matrices carrées suivantes :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3)} = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}_{(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)} \quad (\text{A.72})$$

Lorsque la base utilisée est orthonormée, les deux représentations précédentes sont identiques (i.e. $T_{ij} = T^{ij}$) du fait de l'équivalence entre la base primale et la base duale.

Remarque Dans le cas courant où la base utilisée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est orthonormée, un tenseur de rang deux est usuellement représenté par la matrice :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \quad (\text{A.73})$$

Norme La norme d'un tenseur de rang deux \mathbf{T} est notée $\|\mathbf{T}\|$. Elle est calculée à partir des composantes contravariantes, covariantes ou mixtes avec l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{T^{ij}T_{ij}} = \sqrt{T^i_j T_i^j} \quad (\text{A.74})$$

Action sur un vecteur Un tenseur de rang deux \mathbf{T} décrit une transformation linéaire qui, à partir d'un vecteur \mathbf{v} donné, fournit un vecteur \mathbf{u} . Une telle action est représentée sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.75})$$

Les composantes du vecteur \mathbf{u} , selon qu'elles soient contravariantes ou covariantes, sont obtenues par l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$u^i = T^{ij}v_j = T^i_j v^j \text{ et } u_i = T_{ij}v^j = T_i^j v_j \quad (\text{A.76})$$

Le caractère linéaire de la transformation que représente un tenseur de rang deux impose que :

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad (\text{A.77})$$

$$\mathbf{T} \cdot (\alpha \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in V \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{A.78})$$

Tenseurs particuliers Le tenseur identité de rang deux (noté $\mathbf{1}$) est un tenseur particulier tel que :

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in V \quad (\text{A.79})$$

Les composantes du tenseur identité correspondent à celles du tenseur métrique :

$$1^{ij} = G^{ij} \text{ et } 1_{ij} = G_{ij} \quad (\text{A.80})$$

Le tenseur nul de rang deux (noté $\mathbf{0}$) retourne le vecteur nul quel que soit le vecteur \mathbf{v} pris comme argument :

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{o}, \forall \mathbf{v} \in V \quad (\text{A.81})$$

Les composantes du tenseur nul, qu'elles soient contravariantes ou covariantes, sont toutes égales à zéro :

$$0^{ij} = 0_{ij} = 0 \quad (\text{A.82})$$

Produit contracté simple Le produit contracté simple entre deux tenseurs de rang deux (par exemple \mathbf{S} et \mathbf{T}) fournit un tenseur $\mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$ dont le rang est également égal à deux. Les composantes contravariantes et covariantes du tenseur \mathbf{R} issu de cette opération sont données par les relations suivantes :

$$R^{ij} = S_k^i T^{kj} = S^{ik} T_k^j \text{ et } R_{ij} = S_i^k T_{kj} = S_{ik} T^k_j \quad (\text{A.83})$$

Le produit contracté n'est pas commutatif. Pour deux tenseurs \mathbf{S} et \mathbf{T} , on observe généralement que $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$.

Il est possible d'élever un tenseur de rang deux \mathbf{T} à une puissance entière n à partir de la relation :

$$\mathbf{T}^n = \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}}_{n \text{ Tenseurs}} \quad (\text{A.84})$$

Produit contracté double Le produit doublement contracté de deux tenseurs (par exemple \mathbf{S} et \mathbf{T}) fournit un scalaire $\mathbf{S} : \mathbf{T}$. Ce scalaire, qui représente la projection de \mathbf{S} sur \mathbf{T} (et réciproquement), est tel que :

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = S^{ij} T_{ij} = S_{ij} T^{ij} = S^i_j T_i^j = S_i^j T^i_j \quad (\text{A.85})$$

Par opposition au produit contracté simple, le produit contracté double de deux tenseurs de rang deux est commutatif, i.e. $\mathbf{S} : \mathbf{T} = \mathbf{T} : \mathbf{S}$.

Déterminant Le déterminant d'un tenseur \mathbf{T} est un scalaire, noté $\det(\mathbf{T})$, défini par la relation suivante :

$$((\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) = \det(\mathbf{T}) (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (\text{A.86})$$

Inversion d'un tenseur Lorsque le déterminant d'un tenseur de rang deux \mathbf{T} est non-nul, il est possible de calculer son inverse (noté \mathbf{T}^{-1}) tel que :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{1} \quad (\text{A.87})$$

Transposition d'un tenseur L'opération de transposition (représentée par l'exposant t), lorsqu'elle est appliquée à un tenseur de rang deux, consiste à permuter les indices :

$$\mathbf{T}^t = T_{ji} \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j = T^{ji} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j = T^j_i \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}^j = T_j^i \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}_j \quad (\text{A.88})$$

Un tenseur de rang deux \mathbf{R} est qualifié d'orthogonal si et seulement si son inverse se confond avec sa transposée :

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t \quad (\text{A.89})$$

Le déterminant d'un tenseur orthogonal est égal à 1, auquel cas le tenseur est dit orthogonal direct, ou à -1 , auquel cas le tenseur est dit orthogonal indirect.

Parties symétrique et anti-symétrique La transposition permet également de décomposer de manière unique un tenseur d'ordre deux \mathbf{T} en parties symétrique \mathbf{T}_{sym} et anti-symétrique \mathbf{T}_{skw} à partir de :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{sym}} + \mathbf{T}_{\text{skw}} \quad (\text{A.90})$$

avec :

$$\mathbf{T}_{\text{sym}} = \frac{1}{2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^t) \quad (\text{A.91})$$

$$\mathbf{T}_{\text{skw}} = \frac{1}{2} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^t) \quad (\text{A.92})$$

Un tenseur symétrique (respectivement anti-symétrique) est donc égal à son tenseur transposé (respectivement l'opposé de son tenseur transposé). Le caractère symétrique ou anti-symétrique d'un tenseur est également visible dès lors qu'on observe ses composantes covariantes ou contravariantes. En particulier, pour les tenseurs symétriques et anti-symétriques, ces composantes sont telles que :

$$T_{ij}^{\text{sym}} = T_{ji}^{\text{sym}} \text{ et } T_{\text{sym}}^{ij} = T_{\text{sym}}^{ji} \quad (\text{A.93})$$

$$T_{ij}^{\text{skw}} = -T_{ji}^{\text{skw}} \text{ et } T_{\text{skw}}^{ij} = -T_{\text{skw}}^{ji} \quad (\text{A.94})$$

On peut remarquer que deux tenseurs, l'un symétrique (noté \mathbf{S}) et l'autre anti-symétrique (noté \mathbf{W}), sont orthogonaux l'un à l'autre au sens où :

$$\mathbf{S} : \mathbf{W} = \mathbf{W} : \mathbf{S} = 0 \quad (\text{A.95})$$

Il résulte de cette dernière propriété que la norme d'un tenseur quelconque \mathbf{T} est égale à la somme des normes de ses parties symétrique et anti-symétrique, i.e. :

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}} = \sqrt{\mathbf{T}_{\text{sym}} : \mathbf{T}_{\text{sym}}} + \sqrt{\mathbf{T}_{\text{skw}} : \mathbf{T}_{\text{skw}}} \quad (\text{A.96})$$

$$= \|\mathbf{T}_{\text{sym}}\| + \|\mathbf{T}_{\text{skw}}\| \quad (\text{A.97})$$

Parties sphérique et déviatorique La trace d'un tenseur de rang deux \mathbf{T} est une grandeur scalaire, notée $\text{tr}(\mathbf{T})$, obtenue à partir de :

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = \mathbf{1} : \mathbf{T} = G^{ij}T_{ij} = G_{ij}T^{ij} \quad (\text{A.98})$$

On peut remarquer que, lorsque la base utilisée pour spécifier les composantes d'un tenseur est orthonormée, sa trace correspond à la somme des composantes diagonales (i.e. $\text{tr}(\mathbf{T}) = T_{ii}$).

La trace permet de réaliser la décomposition d'un tenseur en parties sphérique (indice sph) et déviatorique (indice dev) comme suit :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{sph}} + \mathbf{T}_{\text{dev}} \quad (\text{A.99})$$

avec :

$$\mathbf{T}_{\text{sph}} = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{1} \quad (\text{A.100})$$

$$\mathbf{T}_{\text{dev}} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{1} \quad (\text{A.101})$$

On peut remarquer que, par construction, les parties sphérique et déviatorique d'un tenseur sont telles que :

$$\text{tr}(\mathbf{T}_{\text{sph}}) = \text{tr}(\mathbf{T}) \quad (\text{A.102})$$

$$\text{tr}(\mathbf{T}_{\text{dev}}) = 0 \quad (\text{A.103})$$

Aussi, un tenseur sphérique (noté \mathbf{S}) et un tenseur déviatorique (noté \mathbf{D}) sont mutuellement orthogonaux puisque :

$$\mathbf{S} : \mathbf{D} = \mathbf{D} : \mathbf{S} = 0 \quad (\text{A.104})$$

La décomposition en parties sphérique et déviatorique permet d'évaluer la norme d'un tenseur de rang deux quelconque \mathbf{T} à partir de :

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}} = \sqrt{\mathbf{T}_{\text{sph}} : \mathbf{T}_{\text{sph}}} + \sqrt{\mathbf{T}_{\text{dev}} : \mathbf{T}_{\text{dev}}} \quad (\text{A.105})$$

$$= \|\mathbf{T}_{\text{sph}}\| + \|\mathbf{T}_{\text{dev}}\| \quad (\text{A.106})$$

Valeurs propres et vecteurs propres Pour un tenseur \mathbf{T} , le scalaire T_α est une valeur propre et le vecteur \mathbf{n}_α est un vecteur propre si :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_\alpha = T_\alpha \mathbf{n}_\alpha \quad (\text{A.107})$$

Les valeurs propres T_α sont les solutions de l'équation :

$$\det(\mathbf{T} - T_\alpha \mathbf{1}) = 0 \quad (\text{A.108})$$

L'équation précédente correspond à une équation polynomiale d'ordre trois telle que :

$$T_\alpha^3 - I_T T_\alpha^2 + II_T T_\alpha - III_T = 0 \quad (\text{A.109})$$

où I_T , II_T et III_T sont les trois invariants principaux du tenseur \mathbf{T} . Ces invariants, qui ont l'avantage de ne pas dépendre de la base utilisée, sont donnés par :

$$I_T = \text{tr}(\mathbf{T}) \quad (\text{A.110})$$

$$II_T = \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)) \quad (\text{A.111})$$

$$III_T = \det(\mathbf{T}) \quad (\text{A.112})$$

Lorsque le tenseur considéré \mathbf{S} est symétrique (i.e. $\mathbf{S} = \mathbf{S}^t$), il est possible d'identifier trois valeurs propres (S_1 , S_2 et S_3) et trois vecteurs propres unitaires et orthogonaux deux à deux (\mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 et \mathbf{n}_3) tels que :

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (\text{A.113})$$

Les vecteurs propres sont, au signe près, uniques dès lors que les trois valeurs propres sont distinctes. Si deux valeurs propres sont identiques (par exemple $S_1 \neq S_2 = S_3 = S$), il existe alors une infinité de vecteurs \mathbf{n}_2 et \mathbf{n}_3 qui satisfont l'égalité précédente. Dans ce cas particulier, un tenseur symétrique \mathbf{S} peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{S} = S_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + S (\mathbf{1} - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1) \quad (\text{A.114})$$

Enfin, lorsque toutes les valeurs propres sont identiques (i.e. $S_1 = S_2 = S_3 = S$), n'importe quel triplet de vecteurs unitaires qui soient orthogonaux deux à deux permet de satisfaire l'égalité (A.113). Un tenseur symétrique \mathbf{S} qui possède trois valeurs propres identiques s'écrit simplement :

$$\mathbf{S} = S \mathbf{1} \quad (\text{A.115})$$

Un tenseur symétrique \mathbf{S} est qualifié de positif si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. La forme bilinéaire associée à un tel tenseur est alors positive, i.e. :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) > 0, \forall \mathbf{v} \in V \quad (\text{A.116})$$

Lorsque les valeurs propres sont positives, éventuellement nulles, le tenseur est semi-défini positif. Aussi, lorsqu'un tenseur symétrique \mathbf{S} est semi-défini positif, il existe alors un tenseur \mathbf{T} tel que :

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T} \quad (\text{A.117})$$

Le tenseur $\mathbf{S} = \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T}$ construit à partir d'un tenseur \mathbf{T} est nécessairement symétrique et semi-défini positif. Un tenseur est négatif (respectivement semi-défini négatif) si son opposé est positif (respectivement semi-défini positif).

La décomposition en valeurs propres et vecteurs propres (A.113) d'un tenseur symétrique \mathbf{S} est particulièrement commode lorsqu'il est nécessaire d'en évaluer l'exponentielle et le logarithme ou pour l'élever à une puissance m . En effet, lorsque les valeurs propres et les vecteurs propres sont connus, on a :

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{\alpha} \exp(S_{\alpha}) \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (\text{A.118})$$

$$\log(\mathbf{S}) = \sum_{\alpha} \log(S_{\alpha}) \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (\text{A.119})$$

$$\mathbf{S}^m = \sum_{\alpha} S_{\alpha}^m \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \quad (\text{A.120})$$

Il convient de préciser que certaines des opérations précédentes nécessitent que le tenseur considéré soit positif (e.g. logarithme). Aussi, l'exponentielle d'un tenseur symétrique est nécessairement positive.

Décomposition polaire Un tenseur de rang deux \mathbf{T} inversible (donc $\det(\mathbf{T}) \neq 0$) peut se décomposer de manière unique en un produit d'un tenseur orthogonal \mathbf{R} et d'un tenseur symétrique semi-défini positif \mathbf{S} de sorte que :

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \text{ avec } \mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T}} \text{ et } \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^{-1} \quad (\text{A.121})$$

La décomposition précédente est usuellement appelée décomposition polaire droite. La décomposition polaire gauche est semblable à la précédente à ceci près que le tenseur \mathbf{T} est écrit comme le produit d'un tenseur symétrique positif \mathbf{Z} et d'un tenseur orthogonal \mathbf{R} soit :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{R} \text{ avec } \mathbf{Z} = \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^t} \text{ et } \mathbf{R} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{T} \quad (\text{A.122})$$

Si le tenseur orthogonal \mathbf{R} ne dépend pas de la nature (gauche ou droite) de la décomposition polaire, les tenseurs symétriques positifs \mathbf{S} et \mathbf{Z} sont en règle générale différents. Ils sont liés l'un à l'autre par les relations :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^t \text{ et } \mathbf{S} = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{A.123})$$

Remarque La décomposition polaire, qu'elle soit droite ou gauche, s'appuie sur le caractère orthogonal du tenseur \mathbf{R} , en particulier le fait que :

$$\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{1}$$

Aussi, les tenseurs \mathbf{S} et \mathbf{Z} étant symétriques (i.e. $\mathbf{S} = \mathbf{S}^t$ et $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^t$), on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^2 \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^t &= \mathbf{Z} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{Z}^t = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^t = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^2 \end{aligned}$$

Les deux relations précédentes sont importantes en cela que, pour un tenseur \mathbf{T} donné, elles permettent d'évaluer les tenseurs symétriques \mathbf{S} et \mathbf{Z} qui lui sont associés au sens de la décomposition polaire.

Tenseurs de rang quatre

Les tenseurs de rang quatre sont souvent utilisés en mécanique et en thermodynamique, en particulier pour représenter certaines propriétés (e.g. rigidité). Dans une base particulière, un tenseur de rang quatre (noté \mathbb{T}) est représenté par un ensemble de quatre-vingt-quatre composantes qui, selon qu'elles soient contravariantes ou covariantes, sont telles que :

$$\mathbb{T} = T^{ijkl} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j \otimes \mathbf{h}_k \otimes \mathbf{h}_l \quad (\text{A.124})$$

$$= T_{ijkl} \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j \otimes \mathbf{h}^k \otimes \mathbf{h}^l \quad (\text{A.125})$$

Quand bien même elles ne sont pas explicitées ici, il est possible de construire des représentations mixtes d'un tenseur de rang quatre en recourant à l'abaissement ou à l'élévation d'indices.

Norme Pour un tenseur de rang quatre \mathbb{T} , la norme correspondante est notée $\|\mathbb{T}\|$. Selon la nature (covariante, contravariante ou mixte) des composantes utilisées, la norme $\|\mathbb{T}\|$ peut être évaluée à partir de :

$$\|\mathbb{T}\| = \sqrt{T^{ijkl}T_{ijkl}} = \sqrt{T^{ij}{}_{kl}T_{ij}{}^{kl}} \quad (\text{A.126})$$

Action sur un tenseur de rang deux Les tenseurs de rang quatre permettent de décrire des relations linéaires entre deux tenseurs de rang deux. Ainsi, l'action d'un tenseur de rang quatre \mathbb{T} sur un tenseur de rang deux \mathbf{S} , qui fournit un tenseur de rang deux \mathbf{R} , est représentée de la manière suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbb{T} : \mathbf{S} \quad (\text{A.127})$$

Les composantes du tenseur \mathbf{R} issu de l'opération précédente dans une base particulière sont données par :

$$R^{ij} = T^{ijkl} S_{kl} = T^{ij}{}_{kl} S^{kl} \text{ et } R_{ij} = T_{ijkl} S^{kl} = T_{ij}{}^{kl} S_{kl} \quad (\text{A.128})$$

Tenseurs particuliers Le tenseur identité de rang quatre, noté \mathbb{I} , est un tenseur particulier dont l'action sur un tenseur de rang deux \mathbf{T} quelconque laisse celui-ci inchangé :

$$\mathbf{T} = \mathbb{I} : \mathbf{T}, \forall \mathbf{T} \in V \otimes V \quad (\text{A.129})$$

Les composantes du tenseur identité de rang quatre sont données par :

$$I^{ijkl} = G^{ik}G^{jl} \text{ et } I_{ijkl} = G_{ik}G_{jl} \quad (\text{A.130})$$

Il est également courant d'utiliser un tenseur identité \mathbb{I}_{sym} de rang quatre opérant comme un projecteur symétrique. Plus spécifiquement, pour un tenseur de rang deux quelconque, le tenseur \mathbb{I}_{sym} permet d'en extraire la partie symétrique :

$$\mathbf{T}_{\text{sym}} = \mathbb{I}_{\text{sym}} : \mathbf{T}_{\text{sym}} = \mathbb{I}_{\text{sym}} : \mathbf{T}, \forall \mathbf{T} \in V \otimes V \quad (\text{A.131})$$

avec :

$$I_{\text{sym}}^{ijkl} = \frac{1}{2} \left(G^{ik} G^{jl} + G^{jk} G^{il} \right) \text{ et } I_{ijkl}^{\text{sym}} = \frac{1}{2} (G_{ik} G_{jl} + G_{jk} G_{il}) \quad (\text{A.132})$$

Par analogie avec le tenseur identité \mathbb{I}_{sym} , le tenseur identité \mathbb{I}_{skw} de rang quatre fournit la partie anti-symétrique d'un tenseur de rang deux quelconque. Il vérifie donc :

$$\mathbf{T}_{\text{skw}} = \mathbb{I}_{\text{skw}} : \mathbf{T}_{\text{skw}} = \mathbb{I}_{\text{skw}} : \mathbf{T}, \forall \mathbf{T} \in V \otimes V \quad (\text{A.133})$$

Les composantes du tenseur \mathbb{I}_{skw} se déduisent de celles du tenseur métrique \mathbf{G} à partir de :

$$I_{\text{skw}}^{ijkl} = \frac{1}{2} \left(G^{ik} G^{jl} - G^{jk} G^{il} \right) \text{ et } I_{ijkl}^{\text{skw}} = \frac{1}{2} (G_{ik} G_{jl} - G_{jk} G_{il}) \quad (\text{A.134})$$

On peut remarquer que, par construction, les différents tenseurs identité de rang quatre sont tels que $\mathbb{I}_{\text{sym}} + \mathbb{I}_{\text{skw}} = \mathbb{I}$.

Le tenseur nul de rang quatre est noté \mathbb{O} . Son action sur un tenseur de rang deux quelconque \mathbf{T} est telle que :

$$\mathbb{O} : \mathbf{T} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{T} \in V \otimes V \quad (\text{A.135})$$

Les composantes du tenseur nul de rang quatre sont données par :

$$O^{ijkl} = O_{ijkl} = 0 \quad (\text{A.136})$$

La décomposition d'un tenseur de rang deux symétrique (arbitrairement noté \mathbf{S} ci-après) en parties sphérique et déviatorique peut être réalisée à partir de deux tenseurs de rang quatre particuliers appelés projecteurs sphérique et déviatorique. Ces projecteurs (notés \mathbb{P}_{sph} et \mathbb{P}_{dev}) sont tels que :

$$\mathbf{S}_{\text{sph}} = \mathbb{P}_{\text{sph}} : \mathbf{S}, \forall \mathbf{S} \in (V \otimes V)_{\text{sym}} \text{ avec } \mathbb{P}_{\text{sph}} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{A.137})$$

$$\mathbf{S}_{\text{dev}} = \mathbb{P}_{\text{dev}} : \mathbf{S}, \forall \mathbf{S} \in (V \otimes V)_{\text{sym}} \text{ avec } \mathbb{P}_{\text{dev}} = \mathbb{I}_{\text{sym}} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{A.138})$$

Les composantes contravariantes et covariantes des projecteurs sphérique et déviatorique sont données par :

$$P_{\text{sph}}^{ijkl} = \frac{1}{3} G^{ij} G^{kl} \text{ et } P_{ijkl}^{\text{sph}} = \frac{1}{3} G_{ij} G_{kl} \quad (\text{A.139})$$

$$P_{\text{dev}}^{ijkl} = I_{\text{sym}}^{ijkl} - \frac{1}{3} G^{ij} G^{kl} \text{ et } P_{ijkl}^{\text{dev}} = I_{ijkl}^{\text{sym}} - \frac{1}{3} G_{ij} G_{kl} \quad (\text{A.140})$$

Les projecteurs sphérique et déviatorique sont tels que $\mathbb{P}_{\text{sph}} + \mathbb{P}_{\text{dev}} = \mathbb{I}_{\text{sym}}$.

Remarque Bien que cela soit peu utilisé en pratique, il est tout à fait possible de construire des projecteurs sphérique et déviatorique qui opèrent sur les tenseurs de rang deux quelconques (i.e. pas nécessairement symétriques). Ces projecteurs, notés \mathbb{Q}_{sph} et \mathbb{Q}_{dev} ci-dessous, sont donnés par :

$$\mathbb{Q}_{\text{sph}} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

$$\mathbb{Q}_{\text{dev}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

On peut remarquer que la définition du projecteur sphérique ne dépend pas de l'éventuel caractère symétrique du tenseur de rang deux qu'il peut accepter comme argument (i.e. $\mathbb{Q}_{\text{sph}} = \mathbb{P}_{\text{sph}}$). La définition du projecteur déviatorique, selon qu'il exerce une action sur un tenseur de rang deux symétrique ou non, n'est toutefois pas identique (i.e. $\mathbb{Q}_{\text{dev}} \neq \mathbb{P}_{\text{dev}}$).

Produit contracté double Le produit contracté double de deux tenseurs de rang quatre (notés \mathbb{S} et \mathbb{T}) conduit à un tenseur de rang quatre (noté \mathbb{R}). Cette opération particulière est représentée de la manière suivante :

$$\mathbb{R} = \mathbb{S} : \mathbb{T} \quad (\text{A.141})$$

Les composantes du tenseur \mathbb{R} qui résulte de l'opération précédente sont données par :

$$R^{ijkl} = S^{ij}_{pq} T^{pqkl} = S^{ijpq} T_{pq}{}^{kl} \text{ et } R_{ijkl} = S_{ij}{}^{pq} T_{pqkl} = S_{ijpq} T^{pq}{}_{kl} \quad (\text{A.142})$$

Il convient de préciser que, en règle générale, le produit contracté double de deux tenseurs de rang quatre n'est pas commutatif (i.e. $\mathbb{S} : \mathbb{T} \neq \mathbb{T} : \mathbb{S}$).

Produit contracté quadruple Le produit contracté quadruple permet de réaliser la projection d'un tenseur de rang quatre (par exemple \mathbb{S}) sur un autre tenseur de rang quatre (par exemple \mathbb{T}). Cette opération, qui correspond à une extension du produit scalaire pour les tenseurs de rang quatre, est réalisée comme suit :

$$\mathbb{S} :: \mathbb{T} = S^{ijkl} T_{ijkl} = S_{ijkl} T^{ijkl} = S_{ij}{}^{kl} T^{ij}{}_{kl} = S^{ij}{}_{kl} T_{ij}{}^{kl} \quad (\text{A.143})$$

Le produit contracté quadruple de deux tenseurs de rang quatre est une opération commutative, i.e. $\mathbb{S} :: \mathbb{T} = \mathbb{T} :: \mathbb{S}$. Aussi, deux tenseurs de rang quatre sont orthogonaux l'un à l'autre dès lors que le résultat de la projection de l'un sur l'autre obtenu à partir du produit contracté quadruple est nul.

Inversion L'inversion d'un tenseur de rang quatre \mathbb{T} consiste à obtenir un tenseur \mathbb{T}^{-1} (également de rang quatre) tel que :

$$\mathbb{T} : \mathbb{T}^{-1} = \mathbb{T}^{-1} : \mathbb{T} = \mathbb{I} \quad (\text{A.144})$$

Si on considère un tenseur de rang quatre \mathbb{S} qui présente des symétries mineures, l'inverse de ce dernier est le tenseur \mathbb{S}^{-1} qui vérifie l'égalité :

$$\mathbb{S} : \mathbb{S}^{-1} = \mathbb{S}^{-1} : \mathbb{S} = \mathbb{I}_{\text{sym}} \quad (\text{A.145})$$

Le tenseur \mathbb{S}^{-1} possède les mêmes symétries que le tenseur \mathbb{S} .

A.3 Analyse vectorielle et tensorielle

A.3.1 Gradient

Le gradient d'un champ scalaire f est un champ vectoriel ∇f qui fournit une information quant aux variations spatiales de la grandeur scalaire considérée. Ainsi, pour un point repéré par son vecteur position \mathbf{x} , la variation infinitésimale df induite par un changement infinitésimal de position $d\mathbf{x}$ est obtenue à partir du gradient ∇f par :

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i \quad (\text{A.146})$$

Dès lors qu'une base et une origine ont été choisies, le vecteur position est représenté par un triplet de coordonnées (notées q_1 , q_2 et q_3). Si on considère une variation infinitésimale de ces coordonnées, on constate que la variation infinitésimale de position $d\mathbf{x}$ est telle que :

$$d\mathbf{x} = \underbrace{dq^1 \mathbf{h}_1}_{dq_1} + \underbrace{dq^2 \mathbf{h}_2}_{dq_2} + \underbrace{dq^3 \mathbf{h}_3}_{dq_3} \quad (\text{A.147})$$

En remarquant que $dq^i = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{h}_i$, on obtient que le gradient du champ scalaire f est donné par :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{h}^i \quad (\text{A.148})$$

Exemple Lorsqu'un système de coordonnées cylindriques est adopté, il est commode de travailler dans la base adimensionnelle $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$. Le gradient d'un champ scalaire f , lorsqu'il est évalué dans cette base particulière, est donné par :

$$[\nabla f] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)}$$

La base adimensionnelle associée à un système de coordonnées sphériques est donnée par le triplet de vecteurs unitaires $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\chi, \mathbf{u}_\phi)$. La représentation du gradient d'un champ scalaire f dans cette base adimensionnelle est telle que :

$$[\nabla f] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \chi} \\ \frac{\rho}{\sin \chi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{bmatrix}_{(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\chi, \mathbf{u}_\phi)}$$

Si la base adimensionnelle a l'avantage de donner aux composantes du gradient une dimension identique à celle du vecteur $\nabla \phi$, elle ne permet pas d'utiliser directement l'expression (A.148). Cette expression utilise en effet la base duale pour représenter le gradient. Il est néanmoins simple de convertir les composantes associées à la base adimensionnelle vers celles associées à la base duale en s'appuyant sur les relations établies au A.1.4.

Lorsque le champ étudié est vectoriel (noté \mathbf{v}), le gradient associé est un tenseur de rang deux $\mathbf{v} \otimes \nabla$ tel que :

$$d\mathbf{v} = (\mathbf{v} \otimes \nabla) \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial v^i}{\partial q^j} \mathbf{h}_i dq^j + v^i \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial q^j} dq^j \quad (\text{A.149})$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial q^j} \mathbf{h}^i dq^j + v_i \frac{\partial \mathbf{h}^i}{\partial q^j} dq^j \quad (\text{A.150})$$

L'expression précédente souligne que le gradient fait intervenir les variations des composantes du vecteur \mathbf{v} par rapport aux coordonnées curvilignes ainsi que les variations des vecteurs de base par rapport à ces mêmes coordonnées. L'utilisation de la relation $dq^j = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{h}_j$ conduit aux expressions suivantes du gradient d'un champ vectoriel :

$$(\mathbf{v} \otimes \nabla) = \frac{\partial v^i}{\partial q^j} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}^j + v^i \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial q^j} \otimes \mathbf{h}^j \quad (\text{A.151})$$

$$= \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^j} + v^k \Gamma^i_{kj} \right) \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}^j \quad (\text{A.152})$$

$$= \left(\frac{\partial v_i}{\partial q^j} - v_k \Gamma^k_{ij} \right) \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j \quad (\text{A.153})$$

Les deux expressions précédentes permettent d'identifier les composantes mixtes et covariantes du gradient $\mathbf{v} \otimes \nabla$. Dans un souci de concision, ces expressions utilisent les coefficients de Christoffel (représentés par la lettre Γ) tels que :

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{h}^k = -\frac{\partial \mathbf{h}^k}{\partial q^j} \cdot \mathbf{h}_i \quad (\text{A.154})$$

$$= \frac{G^{kl}}{2} \left(\frac{\partial G_{il}}{\partial q^j} + \frac{\partial G_{jl}}{\partial q^i} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial q^l} \right) \quad (\text{A.155})$$

Il convient de préciser que, dans le cas particulier mais néanmoins courant où la base utilisée est globale, les vecteurs de base ne dépendent pas des coordonnées, les coefficients de Christoffel sont alors nuls.

Remarque Le gradient d'un champ vectoriel peut également être représenté par un tenseur de rang deux $\nabla \otimes \mathbf{v}$. Si ce dernier contient les mêmes informations que le tenseur $\mathbf{v} \otimes \nabla$, ces deux définitions du gradient ne sont identiques qu'à la transposition près, i.e. $(\mathbf{v} \otimes \nabla) = (\nabla \otimes \mathbf{v})^t$.

Exemple Si on considère un champ vectoriel \mathbf{v} , les composantes du vecteur \mathbf{v} dans la base adimensionnelle associée au système de coordonnées cylindriques sont notées v_r , v_θ et v_z ci-après. Le vecteur \mathbf{v} peut donc être représenté comme suit :

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix}_{(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)}$$

Afin d'évaluer le gradient du champ vectoriel \mathbf{v} , il est nécessaire de disposer des coefficients de Christoffel. Pour le système de coordonnées cylindriques, la plupart des coefficients de Christoffel sont nuls. Les seules exceptions sont :

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$$

Les différentes composantes du tenseur de rang deux $\mathbf{v} \otimes \nabla$, lorsqu'elles sont exprimées dans la base adimensionnelle, sont donc :

$$[\mathbf{v} \otimes \nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_r / \partial \theta - v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta / \partial \theta + v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{\partial v_z / \partial \theta}{r} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(u_r, u_\theta, u_z)}$$

Le même vecteur \mathbf{v} , qui donne la valeur d'un champ vectoriel en un point de coordonnées sphériques (ρ, χ, ϕ) , peut également être représenté par ses composantes v_ρ, v_χ et v_ϕ dans la base adimensionnelle du système de coordonnées sphériques :

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_\rho \\ v_\chi \\ v_\phi \end{bmatrix}_{(u_\rho, u_\chi, u_\phi)}$$

Pour le ce système de coordonnées particulier, les coefficients de Christoffel non-nuls, nécessaires à l'évaluation du gradient d'un champ vectoriel, sont :

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\chi\chi} &= -\rho, \Gamma^\rho_{\phi\phi} = -\rho \sin^2 \chi \\ \Gamma^\chi_{\rho\chi} &= \Gamma^\chi_{\chi\rho} = \frac{1}{\rho}, \Gamma^\chi_{\phi\phi} = -\cos \chi \sin \chi \\ \Gamma^\phi_{\rho\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi\rho} = \frac{1}{\rho}, \Gamma^\phi_{\phi\chi} = \Gamma^\phi_{\chi\phi} = \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \end{aligned}$$

Dans la base adimensionnelle associée au système de coordonnées sphériques, les différentes composantes du gradient $\mathbf{v} \otimes \nabla$ sont alors

données par :

$$[\mathbf{v} \otimes \nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} & \frac{\partial v_\rho / \partial \chi - v_\chi}{\rho} & \frac{\partial v_\rho / \partial \phi - v_\phi \sin \chi}{\rho \sin \chi} \\ \frac{\partial v_\chi}{\partial \rho} & \frac{\partial v_\chi / \partial \chi + v_\rho}{\rho} & \frac{\partial v_\chi / \partial \phi - v_\phi \cos \chi}{\rho \sin \chi} \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} & \frac{\partial v_\phi / \partial \chi}{\rho} & \frac{\partial v_\phi / \partial \phi + v_\phi \cos \chi + v_r \sin \chi}{\rho \sin \chi} \end{bmatrix}_{(u_\rho, u_\chi, u_\phi)}$$

Pour un champ tensoriel dont la valeur en chaque point est représenté par un tenseur de rang deux \mathbf{T} , le gradient correspondant $\mathbf{T} \otimes \nabla$ permet d'évaluer la variation infinitésimale $d\mathbf{T}$ associée à une variation infinitésimale de position $d\mathbf{x}$, soit :

$$d\mathbf{T} = (\mathbf{T} \otimes \nabla) \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{A.156})$$

$$= \frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j dq^k + T^{ij} \left(\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial q^k} \otimes \mathbf{h}_j + \mathbf{h}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{h}_j}{\partial q^k} \right) dq^k \quad (\text{A.157})$$

$$= \frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j dq^k + T_{ij} \left(\frac{\partial \mathbf{h}^i}{\partial q^k} \otimes \mathbf{h}^j + \mathbf{h}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{h}^j}{\partial q^k} \right) dq^k \quad (\text{A.158})$$

En utilisant une démarche semblable à celle utilisée pour un champ tensoriel, on obtient que le gradient $\mathbf{T} \otimes \nabla$ est le tenseur de rang trois tel que :

$$(\mathbf{T} \otimes \nabla) = \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} + T^{lj} \Gamma_{lk}^i + T^{il} \Gamma_{lk}^j \right) \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j \otimes \mathbf{h}^k \quad (\text{A.159})$$

$$= \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - T_{lj} \Gamma_{ik}^l - T_{il} \Gamma_{jk}^l \right) \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^j \otimes \mathbf{h}^k \quad (\text{A.160})$$

A.3.2 Divergence

La divergence est un opérateur différentiel particulièrement utile lorsqu'il s'agit d'écrire des équations de conservation. Pour un champ vectoriel, dont la valeur en un point est représentée par un vecteur \mathbf{v} , la divergence correspondante est donnée par la grandeur scalaire $\mathbf{v} \cdot \nabla$. Cette dernière est définie par :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = (\mathbf{v} \otimes \nabla) : \mathbf{1} = \text{tr}(\mathbf{v} \otimes \nabla) \quad (\text{A.161})$$

L'utilisation des relations (A.152) et (A.153) permet d'établir que la divergence peut être évaluée à partir des composantes covariantes ou contravari-

antes du vecteur \mathbf{v} comme suit :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = \left(\frac{\partial v_i}{\partial q^j} - v_k \Gamma^k_{ij} \right) G^{ij} \quad (\text{A.162})$$

$$= \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + v^k \Gamma^i_{ki} \quad (\text{A.163})$$

Pour un champ tensoriel de rang deux \mathbf{T} , le divergent est un champ vectoriel $\mathbf{T} \cdot \nabla$ tel que :

$$\mathbf{T} \cdot \nabla = (\mathbf{T} \otimes \nabla) : \mathbf{1} \quad (\text{A.164})$$

En combinant la définition précédente avec les expressions (A.159) et (A.160) du gradient d'un tenseur de rang deux, on obtient les représentations contravariante et covariante du divergent $\mathbf{T} \cdot \nabla$:

$$\mathbf{T} \cdot \nabla = \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial q^j} + T^{lj} \Gamma^i_{lj} + T^{il} \Gamma^j_{lj} \right) \mathbf{h}_i \quad (\text{A.165})$$

$$= \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - T_{lj} \Gamma^l_{ik} - T_{il} \Gamma^l_{jk} \right) G^{jk} \mathbf{h}^i \quad (\text{A.166})$$

Exemple Pour évaluer la divergence d'un champ tensoriel de rang deux \mathbf{T} dans un système de coordonnées cylindriques, il est préférable d'utiliser la base adimensionnelle $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$ associée à ce système de coordonnées particulier. Dans une telle base, les composantes du tenseur \mathbf{T} sont telles que :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}_{(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)}$$

Le divergent du champ tensoriel \mathbf{T} est noté $\mathbf{T} \cdot \nabla$. Il s'agit d'un champ vectoriel dont les composantes dans la base adimensionnelle du système de coordonnées cylindriques sont :

$$[\mathbf{T} \cdot \nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial T_{r\theta}/\partial\theta + T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial T_{\theta\theta}/\partial\theta + T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial T_{z\theta}/\partial\theta + T_{zr}}{r} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)}$$

Dans le cas des coordonnées sphériques, les composantes du tenseur \mathbf{T}

dans la base adimensionnelle $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\chi, \mathbf{u}_\phi)$ sont telles que :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{\rho\rho} & T_{\rho\chi} & T_{\rho\phi} \\ T_{\chi\rho} & T_{\chi\chi} & T_{\chi\phi} \\ T_{\phi\rho} & T_{\phi\chi} & T_{\phi\phi} \end{bmatrix}_{(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\chi, \mathbf{u}_\phi)}$$

La divergence du champ tensoriel \mathbf{T} , lorsqu'elle est exprimée dans la base adimensionnelle du système de coordonnées sphériques, est donnée par :

$$[\mathbf{T} \cdot \nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial T_{\rho\chi}/\partial \chi + 2T_{\rho\rho} - T_{\chi\chi} - T_{\phi\phi}}{\rho} + \frac{\partial T_{\rho\phi}/\partial \phi + T_{\rho\chi} \cos \chi}{\rho \sin \chi} \\ \frac{\partial T_{\chi\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial T_{\chi\chi}/\partial \chi + 2T_{\chi\rho} + T_{\rho\chi}}{\rho} + \frac{\partial T_{\chi\phi}/\partial \phi + (T_{\chi\chi} - T_{\phi\phi}) \cos \chi}{\rho \sin \chi} \\ \frac{\partial T_{\phi\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial T_{\phi\chi}/\partial \chi + 2T_{\phi\rho} + T_{\rho\phi}}{\rho} + \frac{\partial T_{\phi\phi}/\partial \phi + (T_{\chi\phi} + T_{\phi\chi}) \cos \chi}{\rho \sin \chi} \end{bmatrix}_{(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\chi, \mathbf{u}_\phi)}$$

A.3.3 Laplacien

Le laplacien, s'il ne constitue pas à proprement parler un nouvel opérateur différentiel, est parfois rencontré dans les équations de conservation. Pour un champ scalaire f , le laplacien, parce qu'il correspond à la divergence de son gradient, est noté $(\nabla f) \cdot \nabla$. En s'appuyant sur les relations (A.148) et (A.162), on obtient l'expression du laplacien d'un champ scalaire :

$$(\nabla f) \cdot \nabla = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^k} \Gamma^k_{ij} \right) G^{ij} \quad (\text{A.167})$$

Dans la littérature, la notation $\Delta f = (\nabla f) \cdot \nabla$ est parfois utilisée pour désigner le laplacien d'un champ scalaire.

Exemple Lorsque le système de coordonnées cylindriques (i.e. r , θ et z) est adopté, le laplacien d'un champ scalaire f est tel que :

$$(\nabla f) \cdot \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Si le système de coordonnées sphériques est préféré, le laplacien d'un champ scalaire s'exprime en fonction des coordonnées ρ , χ et ϕ comme

suit :

$$(\nabla f) \cdot \nabla = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial r} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \chi} \frac{\partial f}{\partial \chi} \left(\sin \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \chi} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

A.3.4 Rotationnel

Le rotationnel est un opérateur différentiel qui, lorsqu'il est appliqué à un champ vectoriel \mathbf{v} , fournit un champ vectoriel $\nabla \times \mathbf{v}$ tel que :

$$\nabla \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \otimes \nabla) : \epsilon \quad (\text{A.168})$$

Dans le cas général d'un système de coordonnées curvilignes, le rotationnel $\nabla \times \mathbf{v}$ est donné par :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \epsilon^{ikj} \frac{\partial v_j}{\partial q^k} \mathbf{h}_i \quad (\text{A.169})$$

Le rotationnel est un opérateur différentiel intéressant en cela qu'il permet de déterminer un si champ vectoriel dérive d'un potentiel scalaire. En particulier, si le champ vectoriel \mathbf{v} est irrotationnel (i.e. $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$), il existe un champ scalaire f tel que $\mathbf{v} = \nabla f$ (et réciproquement).

Pour un champ tensoriel représenté par un tenseur \mathbf{T} de rang deux, le rotationnel $\nabla \times \mathbf{T}$ est défini par la relation suivante :

$$\nabla \times \mathbf{T} = -(\mathbf{T} \otimes \nabla) : \epsilon \quad (\text{A.170})$$

Le rotationnel $\nabla \times \mathbf{T}$ est un tenseur de rang deux dont les composantes mixtes ou covariantes peuvent être obtenues à partir de :

$$\nabla \times \mathbf{T} = \epsilon^{mkj} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - T_{lj} \Gamma_{ik}^l \right) \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}_m \quad (\text{A.171})$$

$$= G_{mp} \epsilon^{pkj} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - T_{lj} \Gamma_{ik}^l \right) \mathbf{h}^i \otimes \mathbf{h}^m \quad (\text{A.172})$$

Si le champ tensoriel \mathbf{T} dérive d'un potentiel vectoriel (i.e. $\mathbf{T} = \mathbf{v} \otimes \nabla$), son rotationnel est en chaque point égal au tenseur nul ($\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$). Cette propriété est particulièrement utile en mécanique des milieux continus lorsqu'il s'agit d'explicitier les conditions de compatibilité d'un champ de déformation.

Remarque Pour les tenseurs de rang deux, le rotationnel est parfois défini comme suit (Gurtin et al., 2010) :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{T} &= \epsilon^{mkj} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - T_{lj} \Gamma_{ik}^l \right) \mathbf{h}_m \otimes \mathbf{h}^i \\ &= G_{mp} \epsilon^{pkj} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - T_{lj} \Gamma_{ik}^l \right) \mathbf{h}^m \otimes \mathbf{h}^i\end{aligned}$$

Les définitions précédentes sont très semblables à (A.171) et (A.172). En effet, ces définitions du rotationnel ne diffèrent les unes des autres que par une opération de transposition.

A.3.5 Éléments différentiels et intégration

Pour un point de l'espace euclidien repéré par un triplet de coordonnées $(q^1, q^2$ et $q^3)$, le produit mixte permet d'établir qu'un élément de volume infinitésimal dv est lié aux variations infinitésimales des différentes coordonnées $(dq^1, dq^2$ et $dq^3)$ par :

$$dv = ((dq^1 \mathbf{h}_1) \times (dq^2 \mathbf{h}_2)) \cdot (dq^3 \mathbf{h}_3) = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3 \quad (\text{A.173})$$

Ainsi, l'intégration d'un champ scalaire f sur un volume \mathcal{V} est réalisée à partir de :

$$\int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{x}) dv = \iiint f(q_1, q_2, q_3) \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3 \quad (\text{A.174})$$

Lorsque le champ considéré \mathbf{T} est de nature tensorielle, l'intégrale de ce dernier sur un volume \mathcal{V} est donnée par une relation semblable à la précédente :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) dv = \iiint \mathbf{T}(q_1, q_2, q_3) \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3 \quad (\text{A.175})$$

Exemple Pour le cas particulier du système de coordonnées cylindriques, l'élément de volume infinitésimal dv correspondant à un point de coordonnées (r, θ, z) est donné par :

$$dv = r^2 dr d\theta dz$$

Si les coordonnées sphériques sont adoptées, l'élément de volume in-

finitésimal dv associé à un point de coordonnées (ρ, χ, ϕ) est :

$$dv = \rho^2 \sin^2 \chi \, d\rho \, d\chi \, d\phi$$

Une surface \mathcal{S} paramétrée par deux réels λ et μ (avec $\lambda \in L$ et $\mu \in M$) correspond à un ensemble de positions pour lesquelles les coordonnées q^1 , q^2 et q^3 sont données par des fonctions de la forme :

$$q^1 = \hat{s}^1(\lambda, \mu), \quad q^2 = \hat{s}^2(\lambda, \mu) \quad \text{et} \quad q^3 = \hat{s}^3(\lambda, \mu) \quad (\text{A.176})$$

Un élément de surface infinitésimal $d\mathbf{s}$ de la surface paramétrée \mathcal{S} est obtenu en évaluant le produit vectoriel des vecteurs $\partial\mathbf{x}/\partial\lambda$ et $\partial\mathbf{x}/\partial\mu$, qui sont à la fois de longueur infinitésimale et tangents à la surface \mathcal{S} au point considéré. L'élément de surface infinitésimal $d\mathbf{s}$ est donc tel que :

$$d\mathbf{s} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\lambda} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mu} \, d\lambda \, d\mu \quad (\text{A.177})$$

$$= \left(\mathbf{h}_i \frac{\partial q^i}{\partial\lambda} \right) \times \left(\mathbf{h}_j \frac{\partial q^j}{\partial\mu} \right) \, d\lambda \, d\mu \quad (\text{A.178})$$

Il convient de préciser que $d\mathbf{s}$ est un vecteur dont la norme $ds = \|d\mathbf{s}\|$ représente une surface infinitésimale et dont la direction est celle de la normale à la surface paramétrée. En s'appuyant sur ce résultat, on en déduit que l'intégration d'une quantité scalaire f sur la surface paramétrée \mathcal{S} est réalisée à partir de la relation suivante :

$$\int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{x}) \, ds = \int_L \int_M f(\lambda, \mu) \left\| \left(\mathbf{h}_i \frac{\partial q^i}{\partial\lambda} \right) \times \left(\mathbf{h}_j \frac{\partial q^j}{\partial\mu} \right) \right\| \, d\lambda \, d\mu \quad (\text{A.179})$$

Pour une quantité tensorielle \mathbf{T} , il est parfois nécessaire de projeter cette dernière sur la normale préalablement à l'intégration surfacique. L'intégrale du champ tensoriel \mathbf{T} sur l'ensemble de la surface paramétrée est alors donnée par :

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = \int_L \int_M \mathbf{T}(\lambda, \mu) \cdot \left(\left(\mathbf{h}_i \frac{\partial q^i}{\partial\lambda} \right) \times \left(\mathbf{h}_j \frac{\partial q^j}{\partial\mu} \right) \right) \, d\lambda \, d\mu \quad (\text{A.180})$$

L'opération précédente est couramment rencontrée lors de l'étude des milieux continus, en particulier lorsqu'il s'agit d'évaluer le flux sur une surface à partir d'un champ de densité surfacique de flux. Aussi, on peut remarquer que le résultat de cette opération est un tenseur dont le rang est immédiatement inférieur à celui du tenseur \mathbf{T} .

Exemple Il existe de nombreux problèmes pratiques pour lesquels il est utile de fixer une coordonnée curviligne et de faire varier les deux autres pour définir une surface paramétrée. Dans le cas d'un système de coordonnées cylindriques, il est ainsi possible de définir des surfaces en fixant l'une des coordonnées r , θ ou z tandis que les deux autres varient. L'intégration d'un champ sur une telle surface nécessite d'utiliser des éléments de surface $d\mathbf{s}_r$, $d\mathbf{s}_\theta$ et $d\mathbf{s}_z$ tels que :

$$\begin{aligned} d\mathbf{s}_r &= \mathbf{h}_\theta \times \mathbf{h}_z d\theta dz = r \mathbf{u}_r d\theta dz \\ d\mathbf{s}_\theta &= \mathbf{h}_z \times \mathbf{h}_r dz dr = \mathbf{u}_\theta dz dr \\ d\mathbf{s}_z &= \mathbf{h}_r \times \mathbf{h}_\theta dr d\theta = r \mathbf{u}_z dr d\theta \end{aligned}$$

De manière analogue, pour le système de coordonnées sphériques, les éléments de surface infinitésimaux $d\mathbf{s}_\rho$, $d\mathbf{s}_\chi$ et $d\mathbf{s}_\phi$ sont obtenus en fixant l'une des coordonnées ρ , χ ou ϕ et en réalisant des variations infinitésimales des deux coordonnées restantes. Ces éléments de surface sont représentés par les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} d\mathbf{s}_\rho &= \mathbf{h}_\chi \times \mathbf{h}_\phi d\chi d\phi = \rho^2 \sin \chi \mathbf{u}_\rho d\chi d\phi \\ d\mathbf{s}_\chi &= \mathbf{h}_\phi \times \mathbf{h}_\rho d\phi d\rho = \rho \sin \chi \mathbf{u}_\chi d\phi d\rho \\ d\mathbf{s}_\phi &= \mathbf{h}_\rho \times \mathbf{h}_\chi d\rho d\chi = \rho \mathbf{u}_\phi d\rho d\chi \end{aligned}$$

L'intégration d'un champ, qu'il soit scalaire ou tensoriel, le long d'une courbe paramétrée suit une approche semblable à celle utilisée pour une surface paramétrée. Une courbe \mathcal{C} , lorsqu'elle est paramétrée par un réel λ (avec $\lambda \in L$), correspond à un ensemble de positions dont les coordonnées sont données par des fonctions \hat{l}^1 , \hat{l}^2 et \hat{l}^3 de sorte à ce que :

$$q^1 = \hat{l}^1(\lambda), q^2 = \hat{l}^2(\lambda) \text{ et } q^3 = \hat{l}^3(\lambda) \quad (\text{A.181})$$

Un élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{l}$ est un vecteur tangent à la courbe paramétrée \mathcal{C} tel que :

$$d\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} d\lambda = \left(\mathbf{h}_i \frac{\partial q^i}{\partial \lambda} \right) d\lambda \quad (\text{A.182})$$

La norme du vecteur $d\mathbf{l}$ (notée dl ci-après) correspond à une longueur infinitésimale qui peut s'exprimer comme suit :

$$dl = \|d\mathbf{l}\| = \left(G_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \lambda} \frac{\partial q^j}{\partial \lambda} \right) d\lambda \quad (\text{A.183})$$

En utilisant l'expression précédente, on obtient que l'intégration d'un champ scalaire f le long de la courbe paramétrée \mathcal{C} peut être réalisée à partir de :

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{x}) dl = \int_L f(\lambda) \left(G_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial \lambda} \frac{\partial q^j}{\partial \lambda} \right) d\lambda \quad (\text{A.184})$$

Aussi, si le champ considéré \mathbf{T} est de nature tensorielle plutôt que scalaire, l'intégration est réalisée après projection du tenseur \mathbf{T} sur l'élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{l}$, ce qui conduit à :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_L \mathbf{T}(\lambda) \cdot \left(\mathbf{h}_i \frac{\partial q^i}{\partial \lambda} \right) d\lambda \quad (\text{A.185})$$

Comme pour l'intégration surfacique, il convient de préciser que, lorsque le champ tensoriel est projeté préalablement à l'intégration, l'intégrale obtenue est un tenseur dont le rang est immédiatement inférieur à celui du tenseur \mathbf{T} .

Exemple Lorsqu'un système de coordonnées curvilignes est adopté, les courbes paramétrées les plus simples sont celles obtenues en variant une coordonnée tandis que les deux autres sont fixées. Par exemple, si un système de coordonnées cylindriques est adopté, trois courbes paramétrées particulières consistent à faire varier l'une des coordonnées r , θ ou z alors que les deux autres restent constantes. L'intégration d'un champ sur ces courbes paramétrées utilise les éléments de lignes infinitésimaux $d\mathbf{l}_r$, $d\mathbf{l}_\theta$ et $d\mathbf{l}_z$. Ces derniers sont des vecteurs tels que :

$$\begin{aligned} d\mathbf{l}_r &= \mathbf{h}_r dr = \mathbf{u}_r dr \\ d\mathbf{l}_\theta &= \mathbf{h}_\theta d\theta = r \mathbf{u}_\theta d\theta \\ d\mathbf{l}_z &= \mathbf{h}_z dz = \mathbf{u}_z dz \end{aligned}$$

Lorsqu'un système de coordonnées sphériques est utilisé, une variation infinitésimale d'une des coordonnées ρ , χ ou ϕ alors que les deux coordonnées restantes sont fixées permet de construire les éléments de ligne infinitésimaux $d\mathbf{l}_\rho$, $d\mathbf{l}_\chi$ et $d\mathbf{l}_\phi$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{l}_\rho &= \mathbf{h}_\rho d\rho = \mathbf{u}_\rho d\rho \\ d\mathbf{l}_\chi &= \mathbf{h}_\chi d\chi = \rho \mathbf{u}_\chi d\chi \\ d\mathbf{l}_\phi &= \mathbf{h}_\phi d\phi = \rho \sin \chi \mathbf{u}_\phi d\phi \end{aligned}$$

A.3.6 Théorème de Green-Ostrogradski

Si on considère un domaine qui occupe un volume \mathcal{V} et dont la frontière externe correspond à une surface \mathcal{S} (voir Figure A.4), le théorème de Green-Ostrogradski⁴ permet de relier la divergence d'un champ vectoriel au flux que ce dernier produit au travers de la frontière du domaine considéré. En particulier, si \mathbf{v} est un champ vectoriel continûment dérivable sur l'ensemble du domaine considéré, le théorème de Green-Ostrogradski indique que :

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{v} \cdot \nabla) dv = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.186})$$

où $d\mathbf{s}$ est un vecteur normal à la surface \mathcal{S} qui pointe vers l'extérieur du domaine considéré et dont la norme $ds = \|d\mathbf{s}\|$ correspond à une surface infinitésimale.

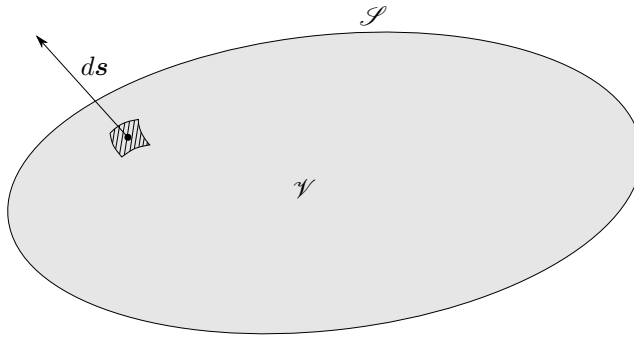


Figure A.4: Représentation du domaine considéré pour l'application du théorème de Green-Ostrogradski. Ce domaine occupe un volume \mathcal{V} dont la frontière externe est la surface \mathcal{S} .

Dans le cas plus général où le flux est représenté par un tenseur plutôt qu'un vecteur, le théorème de Green-Ostrogradski est formulé comme suit :

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{T} \cdot \nabla) dv = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.187})$$

où \mathbf{T} est un champ tensoriel continûment dérivable.

⁴Ce théorème est également connu sous le nom de théorème de flux-divergence.

Le théorème de Green-Ostrogradski est d'une importance primordiale pour l'étude des milieux continus, en particulier lorsqu'il s'agit d'établir des équations de conservation d'une quantité scalaire ou tensorielle.

A.3.7 Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes s'intéresse à une surface \mathcal{S} délimitée par une courbe fermée \mathcal{C} . Si la valeur d'un champ vectoriel continûment dérivable sur la surface considérée est représentée par un vecteur \mathbf{v} , le théorème de Stokes stipule que la circulation du vecteur \mathbf{v} sur le contour \mathcal{C} est égale au flux produit par son rotationnel sur la surface \mathcal{S} , ce qui s'écrit :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.188})$$

Lorsque le champ considéré prend la forme d'un tenseur de rang deux, le théorème de Stokes devient :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.189})$$

La formulation du théorème de Stokes utilise un élément de ligne infinitésimal $d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$ et un élément de surface infinitésimal $d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds$. Comme le montre la Figure A.5, le vecteur unitaire \mathbf{t} , qui définit la direction de l'élément de ligne $d\mathbf{l}$, est tangent à la courbe \mathcal{C} tandis que le vecteur unitaire \mathbf{n} , qui définit l'orientation de l'élément de surface $d\mathbf{s}$, est normal à la surface \mathcal{S} . Afin de préciser le sens de l'élément de ligne, il faut considérer le vecteur unitaire \mathbf{m} qui, en chaque point du contour, est tangent à la surface \mathcal{S} et normal au contour \mathcal{C} (pointant vers l'extérieur). Le sens du vecteur unitaire \mathbf{t} est choisi de sorte à ce que le trièdre $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{m})$ forme une base orthonormée directe (i.e. $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$.)

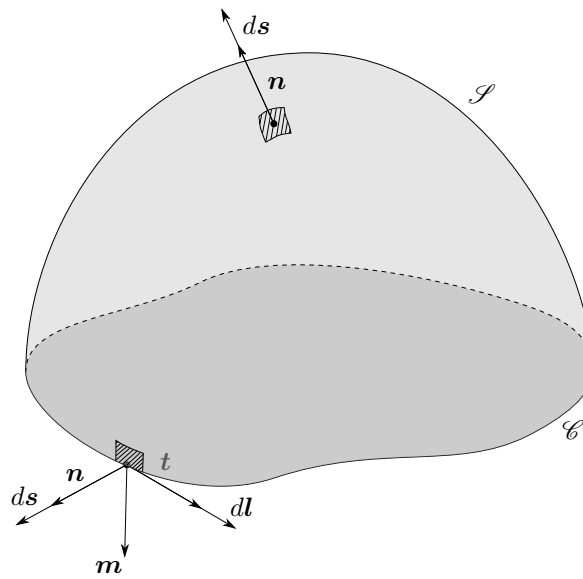


Figure A.5: Représentation de la surface \mathcal{S} considérée pour l'application du théorème de Stokes. La frontière externe de cette surface est la courbe fermée \mathcal{C} . Deux éléments de surface infinitésimaux ds (tels que $d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds$) sont représentés : l'un correspond à un point situé sur le contour tandis que l'autre est associé à un point qui n'appartient pas au contour.

Annexe B

Représentation de Mohr

La représentation de Mohr est une construction graphique qui permet d'étudier l'état de contrainte qui s'exerce en un point. Cette représentation fournit un moyen de déterminer les contraintes tangentielle et normale qui s'exercent sur une facette en fonction de son orientation. Dans ce chapitre, la démarche qui permet de construire le cercle de Mohr est détaillée. Elle est d'abord présentée pour le cas particulier d'un état de contrainte biaxial (i.e. contraintes planes). Le cas général d'un état de contrainte triaxial est traité dans la dernière partie de ce chapitre.

Remarque Si la représentation de Mohr est classiquement utilisée pour le tenseur des contraintes de Cauchy, elle peut en fait être construite pour n'importe quel quantité représentée par un tenseur d'ordre deux symétrique (e.g. tenseur des déformations).

B.1 État de contraintes biaxial

Afin d'expliciter la démarche qui permet la construction du cercle de Mohr pour un état de contrainte biaxial, on considère une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dans laquelle la représentation matricielle du tenseur des con-

traintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est de la forme suivante :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} \quad (\text{B.1})$$

Il est possible de repérer l'orientation d'un plan, dont la normale unitaire \mathbf{n} est contenue dans le plan formé par les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 , par un angle θ tel que :

$$[\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} \quad (\text{B.2})$$

Pour le cas particulier d'un état de contrainte biaxial, les composantes du vecteur contrainte $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ qui agit sur une facette de normale \mathbf{n} sont données par :

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \cos \theta + \sigma_{12} \sin \theta \\ \sigma_{12} \cos \theta + \sigma_{22} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} \quad (\text{B.3})$$

La contrainte normale $\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$ qui s'applique sur la facette considérée s'exprime donc :

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \quad (\text{B.4})$$

Aussi, la contrainte tangentielle $\tau_n = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - \sigma_n^2}$ qui s'exerce sur cette même facette s'écrit :

$$\tau_n = \sigma_{12} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta \quad (\text{B.5})$$

La représentation de Mohr de l'état de contrainte s'appuie sur la relation qui lie la contrainte tangentielle τ_n à la contrainte normale σ_n . Pour construire cette représentation, il est commode d'introduire deux grandeurs de contrainte notées c et r qui sont définies par :

$$c = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{B.6})$$

$$r = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2} \quad (\text{B.7})$$

En utilisant les définitions précédentes, on établit que la contrainte tangentielle τ_n et la contrainte normale σ_n qui s'exercent sur une facette de normale \mathbf{n} sont liées par :

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - c)^2 = r^2 \tag{B.8}$$

Comme l'illustre la Figure B.1, si on trace la contrainte tangentielle τ_n en fonction de la contrainte normale σ_n , l'équation précédente indique donc qu'un état de contrainte biaxial est représenté par un cercle de rayon r et dont le centre est situé sur l'axe des abscisses à une position c . La construction du cercle de Mohr pour un état de contrainte biaxial consiste donc à représenter dans un plan $\sigma_n - \tau_n$ un cercle de centre $(c, 0)$ et de rayon r .

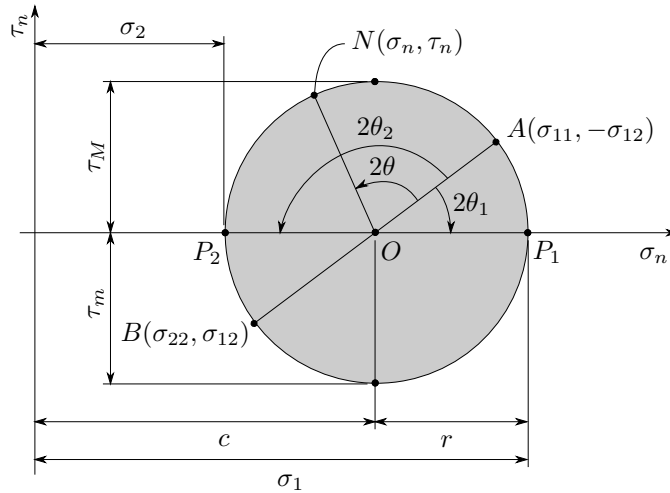


Figure B.1: Représentation de Mohr d'un état contrainte biaxial.

Cette représentation dite de Mohr est intéressante en cela qu'elle permet de facilement déterminer le couple contrainte normale et contrainte tangentielle associée à une facette d'orientation arbitraire. Pour ce faire, il suffit de tracer un segment entre deux points A et B du cercle dont les coordonnées sont $(\sigma_{11}, -\sigma_{12})$ et $(\sigma_{22}, \sigma_{12})$. Par construction, le segment $[AB]$ passe nécessairement par l'origine O du cercle de Mohr. Si on appelle θ l'angle entre la normale unitaire \mathbf{n} de la facette considérée et le vecteur de base \mathbf{e}_1 , il faut ensuite tracer un second segment qui relie l'origine O à un point N du cercle. Le segment $[ON]$ est construit de sorte à former un angle 2θ avec le segment $[OA]$. Comme le montre la Figure B.1, l'abscisse et

l'ordonnée du point N fournissent alors respectivement la contrainte normale σ_n et la contrainte tangentielle τ_n qui s'exercent sur la facette de normale \mathbf{n} .

Aussi, du fait du caractère biaxial de l'état de contrainte, il existe au moins une contrainte principale, arbitrairement choisie comme étant σ_3 , qui soit nulle. La représentation de l'état de contrainte biaxial dans une base $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ formée à partir des trois directions principales est donc donnée par :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)} \quad (\text{B.9})$$

où σ_1 et σ_2 correspondent aux deux contraintes principales qui ne sont possiblement pas nulles. Ces deux contraintes principales s'obtiennent aisément à partir du cercle de Mohr. En effet, si on suppose que $\sigma_1 \geq \sigma_2$, les contraintes principales sont données par les intersections du cercle de Mohr avec l'axe des abscisses soit :

$$\sigma_1 = c + r \quad (\text{B.10})$$

$$\sigma_2 = c - r \quad (\text{B.11})$$

Les directions principales \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 peuvent être repérées par des angles θ_1 et θ_2 qui correspondent aux distances angulaires avec le vecteur de base \mathbf{e}_1 . Les valeurs de ces deux angles s'obtiennent facilement à partir du cercle de Mohr en remarquant qu'ils correspondent à la moitié des angles qui séparent le segment $[OA]$ des segments $[OP_1]$ et $[OP_2]$ (voir Figure B.1).

Enfin, le cercle de Mohr permet de trouver les contraintes tangentielles maximale τ_M et minimale τ_m qui s'exercent sur les facettes dont la normale est contenue dans le plan défini par les vecteurs de base \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 . Ces valeurs extrémales sont données par les ordonnées du point le plus haut et du point le plus bas du cercle, soit :

$$\tau_M = r \quad (\text{B.12})$$

$$\tau_m = -r \quad (\text{B.13})$$

Remarque Pour le cas particulier d'un état de contrainte biaxial, les contraintes tangentielles maximale τ_{\max} et minimale τ_{\min} exercées sur

un point matériel sont données par :

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \max\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1}{2}, -\frac{\sigma_2}{2}\right) = \max\left(r, \frac{c+r}{2}, \frac{r-c}{2}\right) \\ \tau_{\min} &= \min\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, -\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}\right) = \min\left(-r, \frac{-c-r}{2}, \frac{c-r}{2}\right)\end{aligned}$$

Les relations précédentes montrent que la contrainte tangentielle maximale (respectivement minimale) ne coïncide avec la contrainte τ_M (respectivement τ_m) que lorsque la contrainte principale σ_2 est négative alors que la contrainte principale σ_1 est positive (i.e. $\sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1$). C'est en effet uniquement dans ce cas que la facette qui subit les contraintes tangentielles extrémales possède une normale contenue dans le plan formé par les vecteurs de base \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 .

B.2 État de contraintes triaxial

Dans le cas général d'un état de contrainte triaxial, la représentation matricielle du tenseur des contraintes dans la base formée par les trois directions propres est :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)} \quad (\text{B.14})$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 (avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) sont les contraintes principales.

Lorsqu'elles sont exprimées dans la base principale, les composantes du vecteur contrainte $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ qui s'applique à une facette de normale unitaire \mathbf{n} sont :

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{bmatrix}_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)} \quad (\text{B.15})$$

La représentation précédente utilise les composantes $n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1$, $n_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2$ et $n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_3$ du vecteur \mathbf{n} . Puisque ce dernier est unitaire, les composantes n_1, n_2 et n_3 vérifient la condition :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (\text{B.16})$$

La contrainte normale σ_n qui s'exerce sur la facette considérée s'exprime en fonction des contraintes principales à partir de :

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (\text{B.17})$$

Aussi, pour une facette de normale \mathbf{n} , la contrainte tangentielle τ_n est donnée par :

$$\tau_n = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - \sigma_n^2} \quad (\text{B.18})$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 (1 - n_1^2) + \sigma_2^2 n_2^2 (1 - n_2^2) + \sigma_3^2 n_3^2 (1 - n_3^2)} \quad (\text{B.19})$$

En combinant les deux dernières relations, on obtient que :

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (\text{B.20})$$

Pour construire la représentation de Mohr, il est nécessaire d'exprimer la contrainte tangentielle τ_n en fonction de la contrainte normale σ_n à partir des contraintes principales. Pour ce faire, il faut éliminer les termes n_1^2 , n_2^2 et n_3^2 des relations précédentes. Les équations établies ci-dessus montrent que ces termes sont les solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_n \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

La résolution de ce système linéaire conduit à :

$$n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \quad (\text{B.22})$$

$$n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \geq 0 \quad (\text{B.23})$$

$$n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geq 0 \quad (\text{B.24})$$

En observant les signes des dénominateurs présents dans les relations précédentes, on en déduit que, quelle que soit la normale unitaire \mathbf{n} considérée, les contraintes tangentielles τ_n et les contraintes normales σ_n satisfont les inégalités suivantes :

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leq 0 \quad (\text{B.26})$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0 \quad (\text{B.27})$$

Pour construire la représentation de Mohr, il est commode d'introduire des abscisses c_1 , c_2 et c_3 ainsi que les rayons r_1 , r_2 et r_3 tels que :

$$c_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \text{ et } r_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \quad (\text{B.28})$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \text{ et } r_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (\text{B.29})$$

$$c_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \text{ et } r_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{B.30})$$

Les inégalités précédentes peuvent alors être reformulées pour faire apparaître les équations de trois cercles :

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - c_1)^2 \geq r_1^2 \quad (\text{B.31})$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - c_2)^2 \leq r_2^2 \quad (\text{B.32})$$

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - c_3)^2 \geq r_3^2 \quad (\text{B.33})$$

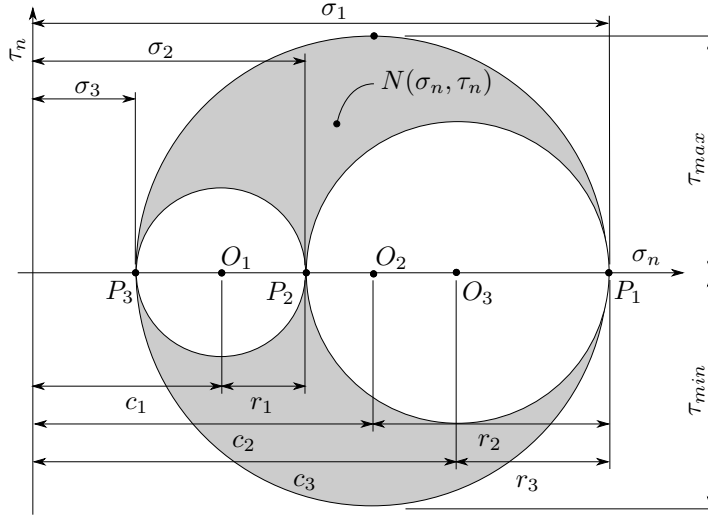


Figure B.2: Représentation de Mohr d'un état contrainte triaxial.

La représentation de Mohr conduit ainsi à la construction de trois cercles qui s'obtiennent à partir des contraintes principales (voir figure B.2). En effet, pour un état de contrainte donné, les contrainte tangentielle τ_n et contrainte normale σ_n associées à une facette de normale \mathbf{n} sont contenus :

- à l'extérieur d'un cercle de rayon r_1 dont le centre O_1 est sur l'axe des abscisses à la position c_1 ,

- à l'intérieur d'un cercle de rayon r_2 dont le centre O_2 est sur l'axe des abscisses à la position c_2 ,
- à l'extérieur d'un cercle de rayon r_3 dont le centre O_3 est sur l'axe des abscisses à la position c_3 .

Cette représentation, connue sous le nom de tricerle de Mohr, permet d'évaluer les contraintes tangentielles maximale τ_{\max} et minimale τ_{\min} . En particulier, l'observation de la Figure B.2 montre que les contraintes tangentielles extrémales sont données par :

$$\tau_{\max} = r_2 \tag{B.34}$$

$$\tau_{\min} = -r_2 \tag{B.35}$$

Annexe C

Fonctions isotropes

La description de l'état d'un point matériel fait intervenir un certain nombre de grandeurs qui sont représentées par des tenseurs d'ordre deux symétriques (e.g. tenseurs des déformations). De nombreuses applications font appel à des fonctions isotropes qui prennent comme argument de tels tenseurs. Ces fonctions sont largement utilisées en mécanique des milieux continus, par exemple pour la construction de lois de comportement ou l'évaluation des déformations,. Dans ce chapitre, la définition d'une fonction isotrope, pour le cas particulier des tenseurs d'ordre deux symétriques, est d'abord rappelée. Quelques méthodes permettant d'évaluer ces fonctions sont ensuite exposées. Les stratégies de dérivation d'une fonction isotrope par rapport à un tenseur d'ordre deux symétrique sont finalement présentées.

C.1 Définition

Une fonction scalaire $b(\mathbf{A})$ est isotrope si l'application d'une transformation orthogonale au tenseur d'ordre deux symétrique \mathbf{A} n'en affecte pas le résultat. Ainsi, pour n'importe quel tenseur orthogonal \mathbf{Q} , une fonction scalaire isotrope satisfait donc :

$$b(\mathbf{A}) = b(\mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G}_{orth} \quad (\text{C.1})$$

De manière semblable, une fonction tensorielle $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ établit une relation entre deux tenseurs d'ordre deux symétriques notés \mathbf{A} et \mathbf{B} . Lorsqu'elle est

isotrope, une telle fonction est invariante par rotation. Cela signifie que, pour n'importe quel tenseur orthogonal \mathbf{Q} , on a :

$$\mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{B}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{B}(\mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G}_{orth} \quad (\text{C.2})$$

La relation précédente indique que, pour fonction tensorielle isotrope $\mathbf{B}(\mathbf{A})$, l'application d'une transformation orthogonale au tenseur \mathbf{A} revient à appliquer cette même transformation à l'image de ce tenseur par la fonction \mathbf{B} .

C.2 Evaluation

Un tenseur \mathbf{A} symétrique possède des valeurs propres A_α auxquelles correspondent les directions propres \mathbf{n}_α (avec $\alpha = 1, 2$ ou 3) telles que :

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha} (A_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha) \quad (\text{C.3})$$

Une fonction scalaire $b(\mathbf{A})$ est isotrope dès lors qu'elle ne dépend que des valeurs propres du tenseur \mathbf{A} . Le caractère isotrope de la fonction $b(\mathbf{A})$ se manifeste par l'absence d'effet des vecteurs propres, donc de l'orientation, du tenseur \mathbf{A} . Aussi, si les composantes d'un tenseur dépendent de la base dans laquelle elles sont exprimées, il existe néanmoins un certain nombre de grandeurs scalaires caractéristiques d'un tenseur, appelées invariants, qui sont indépendants de la base retenue. Les valeurs propres A_1 , A_2 et A_3 sont ainsi des invariants du tenseur \mathbf{A} .

Toute grandeur scalaire qui ne dépend que des invariants d'un tenseur est également un invariant de ce même tenseur. Il est donc possible de construire une infinité d'invariants. Il est courant de définir une fonction scalaire isotrope à partir de trois invariants dits principaux notés I_A , II_A et III_A . Ces invariants sont obtenus par le théorème de Cayley-Hamilton qui, pour un tenseur d'ordre deux \mathbf{A} , indique que :

$$\mathbf{A}^3 - I_A \mathbf{A}^2 + II_A \mathbf{A} - III_A \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (\text{C.4})$$

Les invariants I_A , II_A et III_A s'expriment en fonction des valeurs propres

de \mathbf{A} à partir des relations suivantes :

$$I_A = a_1 + a_2 + a_3 = \text{tr}(\mathbf{A}) \quad (\text{C.5})$$

$$II_A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)) \quad (\text{C.6})$$

$$III_A = a_1a_2a_3 = \frac{1}{6} (\text{tr}(\mathbf{A})^3 - 3\text{tr}(\mathbf{A}^2)\text{tr}(\mathbf{A}) + 2\text{tr}(\mathbf{A}^3)) \quad (\text{C.7})$$

En résumé (et de manière abusive), une fonction scalaire isotrope peut s'écrire suivant l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$b(\mathbf{A}) = b(A_1, A_2, A_3) \quad (\text{C.8})$$

$$= b(I_A, II_A, III_A) \quad (\text{C.9})$$

$$= b(\text{tr}(\mathbf{A}), \text{tr}(\mathbf{A}^2), \text{tr}(\mathbf{A}^3)) \quad (\text{C.10})$$

Si la fonction tensorielle $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ est isotrope, alors les vecteurs propres de \mathbf{A} sont également des vecteurs propres de \mathbf{B} . Il est ainsi possible d'exprimer le tenseur \mathbf{B} comme suit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}) = \sum_{\alpha} (B_{\alpha}(A_1, A_2, A_3) \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha}) \quad (\text{C.11})$$

La relation précédente montre que les valeurs propres B_1 , B_2 et B_3 de la fonction tensorielle $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ sont des fonctions des valeurs propres A_1 , A_2 et A_3 . La relation précédente est largement utilisée en pratique, notamment lorsqu'il s'agit d'évaluer le logarithme, l'exponentielle ou la racine carrée d'un tenseur d'ordre deux symétrique¹.

Dès lors que $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ est une fonction isotrope, il est également possible de l'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}) = s_0(\mathbf{A})\mathbf{1} + s_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + s_2(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 \quad (\text{C.12})$$

où s_0 , s_1 et s_2 sont des fonctions scalaires du tenseur \mathbf{A} . Puisque les deux relations précédentes sont équivalentes, ces fonctions sont des solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & A_1 & A_1^2 \\ 1 & A_2 & A_2^2 \\ 1 & A_3 & A_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

¹De telles évaluations sont par exemple nécessaires pour déterminer les tenseurs des déformations de Seth-Hill à partir des tenseurs de Cauchy-Green droit et gauche.

Lorsque les valeurs propres de \mathbf{A} sont distinctes (i.e. $A_1 \neq A_2 \neq A_3$), la solution du système linéaire permet d'exprimer s_0 , s_1 et s_2 à partir des valeurs propres de \mathbf{A} à partir de :

$$s_0 = \frac{(A_3^2 A_2 - A_3 A_2^2) B_1 + (A_3 A_1^2 - A_3^2 A_1) B_2 + (A_2^2 A_1 - A_2 A_1^2) B_3}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)} \quad (\text{C.14})$$

$$s_1 = \frac{(A_2^2 - A_3^2) B_1 + (A_3^2 - A_1^2) B_2 + (A_1^2 - A_2^2) B_3}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)} \quad (\text{C.15})$$

$$s_2 = \frac{(A_3 - A_2) B_1 + (A_1 - A_3) B_2 + (A_2 - A_1) B_3}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)} \quad (\text{C.16})$$

Si seules deux valeurs propres sont distinctes (i.e. $A_1 \neq A_2 = A_3$), il est possible d'utiliser la représentation (C.12) en prenant $s_2 = 0$ auquel cas :

$$s_0 = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 - A_2} \quad (\text{C.17})$$

$$s_1 = \frac{B_1 - B_2}{A_1 - A_2} \quad (\text{C.18})$$

Enfin, quand les trois valeurs propres sont identiques (i.e. $A_1 = A_2 = A_3$), le tenseur \mathbf{A} est purement sphérique, la représentation (C.12) peut se faire en choisissant $s_1 = s_2 = 0$ avec :

$$s_0 = B_1 \quad (\text{C.19})$$

Les relations précédentes montrent que la fonction tensorielle isotrope $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ peut être évaluée pour un tenseur symétrique \mathbf{A} sans en calculer les vecteurs propres. Il suffit en effet de connaître les valeurs propres de \mathbf{A} , donc par extension celles de \mathbf{B} , pour évaluer la fonction $\mathbf{B}(\mathbf{A})$.

C.3 Dérivation

Pour certaines applications, notamment en thermodynamique, il est nécessaire de dériver une fonction scalaire d'un tenseur d'ordre deux symétrique. Lorsque la fonction est isotrope, elle ne dépend que des invariants retenus pour sa définition. Ainsi, si une fonction isotrope est définie à partir des valeurs propres du tenseur \mathbf{A} , la dérivation en chaîne permet d'écrire que :

$$\frac{\partial b}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{\alpha} \frac{\partial b}{\partial A_{\alpha}} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial \mathbf{A}} \quad (\text{C.20})$$

avec :

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \quad (\text{C.21})$$

Démonstration Pour établir les expressions (C.21) et (C.27), on s'appuie sur la définition d'un vecteur propre et d'une valeur propre. Spécifiquement, pour un tenseur d'ordre symétrique \mathbf{A} , un couple valeur propre A_α et vecteur propre \mathbf{n}_α vérifie :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{A} = A_\alpha \mathbf{n}_\alpha$$

La dérivation de la relation précédente par rapport au temps conduit à :

$$\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{n}_\alpha = \dot{A}_\alpha \mathbf{n}_\alpha + A_\alpha \dot{\mathbf{n}}_\alpha - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha$$

Puisque $\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = 1$, le produit scalaire de la relation précédente par \mathbf{n}_α montre que :

$$\mathbf{n}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{n}_\alpha = \dot{A}_\alpha \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha + A_\alpha \mathbf{n}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha - \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha = \dot{A}_\alpha$$

Cette dernière relation permet d'établir l'expression (C.21). Aussi, pour un vecteur propre \mathbf{n}_β différent de \mathbf{n}_α (donc $\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{n}_\alpha = 0$), on obtient que :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\beta \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{n}_\alpha &= \dot{A}_\alpha \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{n}_\alpha + A_\alpha \mathbf{n}_\beta \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha - \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha \\ &= A_\alpha \mathbf{n}_\beta \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha - A_\beta \mathbf{n}_\beta \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha \end{aligned}$$

Le produit scalaire $\mathbf{n}_\beta \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha$ est donc donné par :

$$\mathbf{n}_\beta \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha = \frac{1}{A_\alpha - A_\beta} (\mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\alpha) : \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{A_\alpha - A_\beta} (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta) : \dot{\mathbf{A}}$$

Aussi, puisque le produit scalaire $\dot{\mathbf{n}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha$ étant nul, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_\alpha &= \sum_{\beta \neq \alpha} (\mathbf{n}_\beta \cdot \dot{\mathbf{n}}_\alpha) \mathbf{n}_\beta \\ &= \sum_{\beta \neq \alpha} \left(\frac{1}{2(A_\alpha - A_\beta)} (\mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta) : \dot{\mathbf{A}} \right) \mathbf{n}_\beta \end{aligned}$$

La relation précédente correspond à l'expression (C.27) qui fournit la dérivée d'un vecteur propre par rapport à un tenseur d'ordre deux symétrique.

Une autre option courante consiste à expliciter la fonction scalaire isotrope $b(\mathbf{A})$ à partir des invariants principaux du tenseur \mathbf{A} . Dans ce cas, la dérivée de la fonction scalaire b par rapport à la variable tensorielle \mathbf{A} est donnée par :

$$\frac{\partial b}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial b}{\partial I_A} \frac{\partial I_A}{\partial \mathbf{A}} + \frac{\partial b}{\partial II_A} \frac{\partial II_A}{\partial \mathbf{A}} + \frac{\partial b}{\partial III_A} \frac{\partial III_A}{\partial \mathbf{A}} \quad (\text{C.22})$$

avec :

$$\frac{\partial I_A}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{1} \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{\partial II_A}{\partial \mathbf{A}} = \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{1} - \mathbf{A}^t = \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{1} - \mathbf{A} \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{\partial III_A}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-t} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{C.25})$$

Aussi, pour la dérivation d'une fonction tensorielle isotrope \mathbf{B} par rapport à un tenseur symétrique \mathbf{A} , les règles de dérivation en chaîne permettent d'écrire que :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{\alpha} \frac{\partial B_{\alpha}}{\partial A_{\beta}} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \sum_{\alpha} B_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}}{\partial \mathbf{A}} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}}{\partial \mathbf{A}} \right) \quad (\text{C.26})$$

Pour l'évaluation de la relation précédente, il est nécessaire de connaître la dérivée d'un vecteur propre \mathbf{n}_{α} par rapport au tenseur d'ordre deux \mathbf{A} . Cette dérivée est donnée par :

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{2(A_{\alpha} - A_{\beta})} \mathbf{n}_{\beta} \otimes (\mathbf{n}_{\beta} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\beta}) \quad (\text{C.27})$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}}{\partial \mathbf{A}} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{2\mathbb{G}_{\alpha\beta}}{(A_{\alpha} - A_{\beta})} \quad (\text{C.28})$$

Dans un souci de concision, la relation précédente utilise le tenseur $\mathbb{G}_{\alpha\beta}$ tel que :

$$\mathbb{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (\mathbf{n}_{\beta} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\beta}) \otimes (\mathbf{n}_{\beta} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\beta}) \quad (\text{C.29})$$

$$= \mathbb{G}_{\beta\alpha} \quad (\text{C.30})$$

En combinant les relations précédentes, on obtient que :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial B_{\alpha}}{\partial A_{\beta}} \mathbb{M}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{B_{\alpha} - B_{\beta}}{A_{\alpha} - A_{\beta}} \mathbb{G}_{\alpha\beta} \quad (\text{C.31})$$

avec :

$$\mathbb{M}_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\beta} \otimes \mathbf{n}_{\beta} \quad (\text{C.32})$$

Remarque Le terme $(B_{\alpha} - B_{\beta}) / (A_{\alpha} - A_{\beta})$, qui apparaît dans (C.31), ne peut pas être évalué lorsque deux valeurs propres A_{α} et A_{β} sont égales. Une solution pour remédier à cette difficulté consiste à remplacer ce terme par $\partial B_{\alpha} / \partial A_{\alpha} - \partial B_{\beta} / \partial A_{\alpha}$ (voir Šilhavý (1996)).

Annexe D

Notations de Voigt et de Mandel

Les notations de Voigt et de Mandel sont couramment utilisées pour représenter les tenseurs symétriques (e.g. tenseur des contraintes, tenseur des déformations ou tenseur de rigidité) en réduisant leur ordre. L'introduction de ces notations est motivée par le fait que, en raison de la symétrie, certaines composantes de ces tenseurs sont égales. Il existe donc une forme de redondance de l'information dans la représentation matricielle conventionnelle de ces tenseurs. Cette redondance peut être évitée en remplaçant les couples d'indices équivalents de la notation conventionnelle par un unique indice dans les notations de Voigt ou de Mandel. La correspondance entre ces différentes notations est détaillée dans le Tableau D.1. L'intérêt d'une telle notation est de limiter le nombre de composantes nécessaires à la définition d'un tenseur, sans pour autant perdre d'information. Les principes, les avantages et les limites de ces représentations particulières des tenseurs symétriques sont brièvement présentés dans ce qui suit.

D.1 Notation de Voigt

Les mesures de l'état de contrainte utilisées dans le cadre de la mécanique des milieux continus sont représentées par des tenseurs d'ordre deux. La

Indices	
Notation conventionnelle	Notations de Voigt et de Mandel
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
31 ou 13	5
12 ou 21	6

Tableau D.1: Correspondance entre les indices utilisés dans la notation conventionnelle et ceux utilisés par les notations de Voigt et de Mandel.

représentation matricielle d'un tel tenseur des contraintes, noté de manière générique Σ , correspond à :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Parmi les différentes mesures de l'état de contrainte, nombreuses sont celles pour lesquelles les tenseurs associés sont symétriques (e.g. Cauchy ou Hencky). Puisqu'un tenseur symétrique fait intervenir six composantes indépendantes, la notation de **Voigt** (1910) consiste à le représenter par un vecteur de dimension six de sorte que :

$$[\Sigma] = [\Sigma_1 \quad \Sigma_2 \quad \Sigma_3 \quad \Sigma_4 \quad \Sigma_5 \quad \Sigma_6] \quad (\text{D.2})$$

$$= [\Sigma_{11} \quad \Sigma_{22} \quad \Sigma_{33} \quad \Sigma_{23} \quad \Sigma_{31} \quad \Sigma_{12}] \quad (\text{D.3})$$

Par rapport à la représentation matricielle classique, la représentation de Voigt permet d'éviter la redondance d'information en utilisant le fait que certaines composantes de contrainte tangentielle, qui sont nécessaires à la définition de l'état de contrainte en un point, sont identiques (i.e. $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$).

La représentation matricielle d'une mesure de l'état de déformation, à laquelle on associe le tenseur \mathbf{E} , est classiquement donnée par :

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Puisque toutes les mesures de l'état de déformation sont symétriques, la représentation de Voigt d'un tenseur des déformations consiste à ne con-

sidérer que les six composantes indépendantes qui le définissent, ce qui conduit à l'écriture :

$$[\mathbf{E}] = [E_1 \ E_2 \ E_3 \ E_4 \ E_5 \ E_6] \quad (\text{D.5})$$

$$= [E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ 2E_{23} \ 2E_{31} \ 2E_{12}] \quad (\text{D.6})$$

Il est important de remarquer que la représentation de Voigt d'une mesure tensorielle de l'état de déformation est quelque peu différente de celle d'une mesure de l'état de contrainte en cela que les composantes de cisaillement sont le double de celles utilisées dans la représentation matricielle usuelle (i.e. $E_\alpha = 2E_{ij}$ si $i \neq j$). La présence de ce facteur deux permet d'assurer que la puissance de déformation spécifique p introduite au 7.4.3 puisse être calculée de manière équivalente avec les représentations de Voigt ou les représentations classiques des tenseurs des contraintes et des taux de déformation. Pour une mesure de l'état de contrainte et pour le taux de déformation qui lui est conjugué, la puissance de déformation spécifique p est en effet donnée par :

$$p = \frac{1}{\varrho_0} \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} = \frac{1}{\varrho_0} \Sigma_\alpha \dot{E}_\alpha \quad (\text{D.7})$$

La notation de Voigt, lorsqu'elle est utilisée pour un tenseur de rigidité \mathbb{C} , consiste à représenter ce dernier par une matrice de dimension six. Suivant la correspondance entre indices présentée au Tableau D.1, la représentation de Voigt d'un tenseur de rigidité \mathbb{C} est donc :

$$[\mathbb{C}] = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} & \mathbb{C}_{14} & \mathbb{C}_{15} & \mathbb{C}_{16} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} & \mathbb{C}_{24} & \mathbb{C}_{25} & \mathbb{C}_{26} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} & \mathbb{C}_{34} & \mathbb{C}_{35} & \mathbb{C}_{36} \\ \mathbb{C}_{41} & \mathbb{C}_{42} & \mathbb{C}_{43} & \mathbb{C}_{44} & \mathbb{C}_{45} & \mathbb{C}_{46} \\ \mathbb{C}_{51} & \mathbb{C}_{52} & \mathbb{C}_{53} & \mathbb{C}_{54} & \mathbb{C}_{55} & \mathbb{C}_{56} \\ \mathbb{C}_{61} & \mathbb{C}_{62} & \mathbb{C}_{63} & \mathbb{C}_{64} & \mathbb{C}_{65} & \mathbb{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{1111} & \mathbb{C}_{1122} & \mathbb{C}_{1133} & \mathbb{C}_{1123} & \mathbb{C}_{1131} & \mathbb{C}_{1112} \\ \mathbb{C}_{2211} & \mathbb{C}_{2222} & \mathbb{C}_{2233} & \mathbb{C}_{2223} & \mathbb{C}_{2231} & \mathbb{C}_{2212} \\ \mathbb{C}_{3311} & \mathbb{C}_{3322} & \mathbb{C}_{3333} & \mathbb{C}_{3323} & \mathbb{C}_{3331} & \mathbb{C}_{3312} \\ \mathbb{C}_{2311} & \mathbb{C}_{2322} & \mathbb{C}_{2333} & \mathbb{C}_{2323} & \mathbb{C}_{2331} & \mathbb{C}_{2312} \\ \mathbb{C}_{3111} & \mathbb{C}_{3122} & \mathbb{C}_{3133} & \mathbb{C}_{3123} & \mathbb{C}_{3131} & \mathbb{C}_{3112} \\ \mathbb{C}_{1211} & \mathbb{C}_{1222} & \mathbb{C}_{1233} & \mathbb{C}_{1223} & \mathbb{C}_{1231} & \mathbb{C}_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Une telle matrice est le résultat de la symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations qui conduit à l'égalité entre certaines composantes du

tenseur de rigidité (i.e. $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{ijlk}$). Outre les conditions de symétrie mineure précédentes, le tenseur de rigidité dispose également de caractéristiques de symétrie majeure (i.e. $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij}$). Ainsi, contrairement à ce que peut laisser entendre la représentation de Voigt, seules vingt-et-une composantes indépendantes sont nécessaires à la construction du tenseur de rigidité puisque la matrice correspondante est symétrique (i.e. $\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \mathbb{C}_{\beta\alpha}$).

La représentation de Voigt du tenseur de souplesse, qui correspond à l'inverse du tenseur de rigidité, est donnée par :

$$[\mathbb{S}] = \begin{bmatrix} \mathbb{S}_{11} & \mathbb{S}_{12} & \mathbb{S}_{13} & \mathbb{S}_{14} & \mathbb{S}_{15} & \mathbb{S}_{16} \\ \mathbb{S}_{21} & \mathbb{S}_{22} & \mathbb{S}_{23} & \mathbb{S}_{24} & \mathbb{S}_{25} & \mathbb{S}_{26} \\ \mathbb{S}_{31} & \mathbb{S}_{32} & \mathbb{S}_{33} & \mathbb{S}_{34} & \mathbb{S}_{35} & \mathbb{S}_{36} \\ \mathbb{S}_{41} & \mathbb{S}_{42} & \mathbb{S}_{43} & \mathbb{S}_{44} & \mathbb{S}_{45} & \mathbb{S}_{46} \\ \mathbb{S}_{51} & \mathbb{S}_{52} & \mathbb{S}_{53} & \mathbb{S}_{54} & \mathbb{S}_{55} & \mathbb{S}_{56} \\ \mathbb{S}_{61} & \mathbb{S}_{62} & \mathbb{S}_{63} & \mathbb{S}_{64} & \mathbb{S}_{65} & \mathbb{S}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{S}_{1111} & \mathbb{S}_{1122} & \mathbb{S}_{1133} & 2\mathbb{S}_{1123} & 2\mathbb{S}_{1131} & 2\mathbb{S}_{1112} \\ \mathbb{S}_{2211} & \mathbb{S}_{2222} & \mathbb{S}_{2233} & 2\mathbb{S}_{2223} & 2\mathbb{S}_{2231} & 2\mathbb{S}_{2212} \\ \mathbb{S}_{3311} & \mathbb{S}_{3322} & \mathbb{S}_{3333} & 2\mathbb{S}_{3323} & 2\mathbb{S}_{3331} & 2\mathbb{S}_{3312} \\ 2\mathbb{S}_{2311} & 2\mathbb{S}_{2322} & 2\mathbb{S}_{2333} & 4\mathbb{S}_{2323} & 4\mathbb{S}_{2331} & 4\mathbb{S}_{2312} \\ 2\mathbb{S}_{3111} & 2\mathbb{S}_{3122} & 2\mathbb{S}_{3133} & 4\mathbb{S}_{3123} & 4\mathbb{S}_{3131} & 4\mathbb{S}_{3112} \\ 2\mathbb{S}_{1211} & 2\mathbb{S}_{1222} & 2\mathbb{S}_{1233} & 4\mathbb{S}_{1223} & 4\mathbb{S}_{1231} & 4\mathbb{S}_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Au contraire du tenseur de rigidité, on constate qu'il est nécessaire d'introduire un facteur deux ou quatre pour certaines composantes du tenseur de souplesse.

La notation de Voigt est intéressante en cela qu'elle permet de construire une représentation matricielle des tenseurs d'ordre quatre. Du point de vue numérique, elle offre aussi l'avantage de réduire le nombre de calculs nécessaires à la réalisation d'une opération tensorielle. On peut par exemple remarquer que, pour réaliser une opération du type $\mathbb{C} : \mathbf{E}$ ou $\mathbb{S} : \mathbf{\Sigma}$, la notation de Voigt revient à multiplier une matrice de dimension six par un vecteur de la même dimension (donc trente-six multiplications et trente additions). Lorsque la notation conventionnelle est adoptée, il s'agit en fait de multiplier une matrice et un vecteur de dimension neuf dont les éléments correspondent respectivement aux quatre-vingt-et-une composantes du tenseur d'ordre quatre et au neuf composantes du tenseur d'ordre deux (soit quatre-vingt-et-une multiplications et soixante-douze additions).

Remarque Les facteurs deux et quatre qui interviennent dans la représentation de Voigt d'un tenseur de souplesse sont le résultat de la représentation de Voigt d'un tenseur de déformation ainsi que de la symétrie d'un tenseur des contraintes. En particulier, ces facteurs se déduisent des quatre situations qu'il faut considérer pour la représentation de Voigt des propriétés de souplesse :

$$\mathbb{S}_{\alpha\beta} = \frac{\partial E_\alpha}{\partial \Sigma_\beta} = \begin{cases} \partial E_{ij} / \partial \Sigma_{kl} = \mathbb{S}_{ijkl} & \text{si } i = j \text{ et } k = l \\ \partial(2E_{ij}) / \partial \Sigma_{kl} = 2\mathbb{S}_{ijkl} & \text{si } i \neq j \text{ et } k = l \\ \partial E_{ij} / \partial \Sigma_{kl} + \partial E_{ij} / \partial \Sigma_{lk} = 2\mathbb{S}_{ijkl} & \text{si } i = j \text{ et } k \neq l \\ \partial(2E_{ij}) / \partial \Sigma_{kl} + \partial(2E_{ij}) / \partial \Sigma_{lk} = 4\mathbb{S}_{ijkl} & \text{si } i \neq j \text{ et } k \neq l \end{cases}$$

La notation de Voigt dispose toutefois de quelques inconvénients dans la mesure où certaines opérations telles que l'évaluation de la norme nécessitent de prendre quelques précautions. Par exemple, les normes des tenseurs de contrainte et de déformation ne correspondent pas aux normes des vecteurs de leurs représentations de Voigt puisque :

$$\|\boldsymbol{\Sigma}\| = \sqrt{\Sigma_{ij}\Sigma_{ij}} = \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 + 2(\Sigma_4^2 + \Sigma_5^2 + \Sigma_6^2)} \quad (\text{D.12})$$

$$\neq \sqrt{\Sigma_\alpha \Sigma_\alpha} \quad (\text{D.13})$$

$$\|\mathbf{E}\| = \sqrt{E_{ij}E_{ij}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \frac{1}{2}(E_4^2 + E_5^2 + E_6^2)} \quad (\text{D.14})$$

$$\neq \sqrt{E_\alpha E_\alpha} \quad (\text{D.15})$$

Aussi, comme discuté précédemment, la représentation de Voigt d'un tenseur symétrique ne dépend pas uniquement de l'ordre du tenseur mais également de sa signification physique. La représentation de Voigt d'un tenseur des contraintes symétrique n'est ainsi pas identique à celle d'un tenseur des déformations quand bien même ces deux tenseurs possèdent des caractéristiques identiques. De même, la représentation de Voigt d'un tenseur de rigidité est différente de celle d'un tenseur de souplesse. Avant de construire une représentation de Voigt d'une grandeur tensorielle, il convient donc de se poser la question de la signification physique de cette dernière pour décider de la stratégie à adopter.

D.2 Notation de Mandel

La notation de [Mandel \(1965\)](#) est une alternative à la notation de Voigt. Elle repose néanmoins sur un principe semblable, à savoir réduire l'ordre d'un tenseur symétrique en considérant que certaines de ses composantes sont égales. Elle remédie toutefois à certains inconvénients, en particulier ceux liés à la différence de représentation entre les mesures de contrainte symétrique et les mesures de déformation. Pour ce faire, la notation de Mandel utilise également six composantes indépendantes (Σ_1 à Σ_6) pour la définition du tenseur des contraintes de sorte que :

$$[\boldsymbol{\Sigma}] = [\Sigma_1 \quad \Sigma_2 \quad \Sigma_3 \quad \Sigma_4 \quad \Sigma_5 \quad \Sigma_6] \quad (\text{D.16})$$

$$= [\Sigma_{11} \quad \Sigma_{22} \quad \Sigma_{33} \quad \sqrt{2}\Sigma_{23} \quad \sqrt{2}\Sigma_{31} \quad \sqrt{2}\Sigma_{12}] \quad (\text{D.17})$$

Aussi, pour n'importe quelle mesure tensorielle \mathbf{E} de l'état de déformation, la représentation de Mandel correspondante est telle que :

$$[\mathbf{E}] = [E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad E_5 \quad E_6] \quad (\text{D.18})$$

$$= [E_{11} \quad E_{22} \quad E_{33} \quad \sqrt{2}E_{23} \quad \sqrt{2}E_{31} \quad \sqrt{2}E_{12}] \quad (\text{D.19})$$

Un avantage immédiat de cette notation est que, au contraire de la notation de Voigt, la norme d'un tenseur des contraintes ou des déformations correspond à la norme du vecteur utilisé dans sa représentation de Mandel :

$$\|\boldsymbol{\Sigma}\| = \sqrt{\Sigma_{ij}\Sigma_{ij}} = \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2 + 2(\Sigma_4^2 + \Sigma_5^2 + \Sigma_6^2)} \quad (\text{D.20})$$

$$= \sqrt{\Sigma_\alpha \Sigma_\alpha} \quad (\text{D.21})$$

$$\|\mathbf{E}\| = \sqrt{E_{ij}E_{ij}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + 2(E_4^2 + E_5^2 + E_6^2)} \quad (\text{D.22})$$

$$= \sqrt{E_\alpha E_\alpha} \quad (\text{D.23})$$

La représentation de Mandel d'un tenseur de rigidité découle de celles adoptées pour les tenseurs des contraintes et des déformations. On obtient en effet que la représentation de Mandel d'un tenseur de rigidité correspond

à la matrice carrée de dimension six suivante :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} & \mathbf{C}_{15} & \mathbf{C}_{16} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{24} & \mathbf{C}_{25} & \mathbf{C}_{26} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} & \mathbf{C}_{34} & \mathbf{C}_{35} & \mathbf{C}_{36} \\ \mathbf{C}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{C}_{43} & \mathbf{C}_{44} & \mathbf{C}_{45} & \mathbf{C}_{46} \\ \mathbf{C}_{51} & \mathbf{C}_{52} & \mathbf{C}_{53} & \mathbf{C}_{54} & \mathbf{C}_{55} & \mathbf{C}_{56} \\ \mathbf{C}_{61} & \mathbf{C}_{62} & \mathbf{C}_{63} & \mathbf{C}_{64} & \mathbf{C}_{65} & \mathbf{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{D.24})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1111} & \mathbf{C}_{1122} & \mathbf{C}_{1133} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{1123} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{1131} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{1112} \\ \mathbf{C}_{2211} & \mathbf{C}_{2222} & \mathbf{C}_{2233} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{2223} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{2231} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{2212} \\ \mathbf{C}_{3311} & \mathbf{C}_{3322} & \mathbf{C}_{3333} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{3323} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{3331} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{3312} \\ \sqrt{2}\mathbf{C}_{2311} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{2322} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{2333} & 2\mathbf{C}_{2323} & 2\mathbf{C}_{2331} & 2\mathbf{C}_{2312} \\ \sqrt{2}\mathbf{C}_{3111} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{3122} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{3133} & 2\mathbf{C}_{3123} & 2\mathbf{C}_{3131} & 2\mathbf{C}_{3112} \\ \sqrt{2}\mathbf{C}_{1211} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{1222} & \sqrt{2}\mathbf{C}_{1233} & 2\mathbf{C}_{1223} & 2\mathbf{C}_{1231} & 2\mathbf{C}_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{D.25})$$

La représentation de Mandel d'un tenseur de souplesse est identique à celle d'un tenseur de rigidité à savoir que :

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} & \mathbf{S}_{15} & \mathbf{S}_{16} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} & \mathbf{S}_{25} & \mathbf{S}_{26} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} & \mathbf{S}_{35} & \mathbf{S}_{36} \\ \mathbf{S}_{41} & \mathbf{S}_{42} & \mathbf{S}_{43} & \mathbf{S}_{44} & \mathbf{S}_{45} & \mathbf{S}_{46} \\ \mathbf{S}_{51} & \mathbf{S}_{52} & \mathbf{S}_{53} & \mathbf{S}_{54} & \mathbf{S}_{55} & \mathbf{S}_{56} \\ \mathbf{S}_{61} & \mathbf{S}_{62} & \mathbf{S}_{63} & \mathbf{S}_{64} & \mathbf{S}_{65} & \mathbf{S}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{D.26})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1111} & \mathbf{S}_{1122} & \mathbf{S}_{1133} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{1123} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{1131} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{1112} \\ \mathbf{S}_{2211} & \mathbf{S}_{2222} & \mathbf{S}_{2233} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{2223} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{2231} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{2212} \\ \mathbf{S}_{3311} & \mathbf{S}_{3322} & \mathbf{S}_{3333} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{3323} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{3331} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{3312} \\ \sqrt{2}\mathbf{S}_{2311} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{2322} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{2333} & 2\mathbf{S}_{2323} & 2\mathbf{S}_{2331} & 2\mathbf{S}_{2312} \\ \sqrt{2}\mathbf{S}_{3111} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{3122} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{3133} & 2\mathbf{S}_{3123} & 2\mathbf{S}_{3131} & 2\mathbf{S}_{3112} \\ \sqrt{2}\mathbf{S}_{1211} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{1222} & \sqrt{2}\mathbf{S}_{1233} & 2\mathbf{S}_{1223} & 2\mathbf{S}_{1231} & 2\mathbf{S}_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{D.27})$$

Comparativement à la notation de Voigt, outre le fait que la notation de Mandel permet d'évaluer directement la norme d'un tenseur à partir de sa représentation sous forme vectorielle ou matricielle, la construction de la représentation de Mandel d'un tenseur symétrique a pour avantage de ne pas dépendre de sa signification physique. Les différents facteurs qui relient la représentation de Mandel d'un tenseur à sa représentation conventionnelle ne dépendent en effet que de l'ordre du tenseur.

Remarque Comme pour la notation de Voigt, la notation de Mandel fait intervenir des facteurs spécifiques ($\sqrt{2}$ ou 2) lors de la représentation d'un tenseur de rigidité ou de souplesse. Ces facteurs sont une conséquence de la représentation de Mandel des tenseurs des contraintes et des déformations. À titre d'exemple, pour les propriétés de rigidité, on montre que :

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Sigma_\alpha}{\partial E_\beta} = \begin{cases} \partial \Sigma_{ij} / \partial E_{kl} = \mathbb{C}_{ijkl} & \text{si } i = j \text{ et } k = l \\ \partial(\sqrt{2}\Sigma_{ij}) / \partial E_{kl} = \sqrt{2}\mathbb{C}_{ijkl} & \text{si } i \neq j \text{ et } k = l \\ \partial \Sigma_{ij} / \partial(\sqrt{2}E_{kl}) + \partial \Sigma_{ij} / \partial(\sqrt{2}E_{lk}) = \sqrt{2}\mathbb{C}_{ijkl} & \text{si } i = j \text{ et } k \neq l \\ \partial(\sqrt{2}\Sigma_{ij}) / \partial(\sqrt{2}E_{kl}) + \partial(\sqrt{2}\Sigma_{ij}) / \partial(\sqrt{2}E_{lk}) = 2\mathbb{C}_{ijkl} & \text{si } i \neq j \text{ et } k \neq l \end{cases}$$

Bibliographie

- Adams, J. J., Agosta, D. S., Leisure, R. G., and Ledbetter, H. (2006). Elastic constants of monocrystal iron from 3 to 500 k. *Journal of Applied Physics*, 100(11):113530.
- Amiable, J. (2006). *Contributions à l'étude de la fatigue des matériaux métalliques sous sollicitations multiaxiales*. PhD thesis, Université de Versailles, Versailles, France.
- Armstrong, P. J. and Frederick, C. O. (1966). A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. Technical Report RD/B/N 731, Central Electricity Generating Board.
- B., C. (1956). Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. In *Proceeding of the international conference on fatigue of metals*, London. Institution of Mechanical Engineers.
- Bai, Y. and Wierzbicki, T. (2010). Application of extended mohr–coulomb criterion to ductile fracture. *International Journal of Fracture*, 49(1):1–20.
- Basquin, O. (1910). The exponential law of endurance tests. *Proceedings of the American Society of Testing of Materials*, 10:625–630.
- Bažant, Z. P. (1998). Easy-to-Compute Tensors With Symmetric Inverse Approximating Hencky Finite Strain and Its Rate. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 120(2):131–136.
- Bažant, Z. P. and Jirasek, M. (2002). Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(11):1119–1149.
- Borino, G., Failla, B., and Parrinello, F. (2003). A symmetric nonlocal damage theory. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14):3621–3645.

- Brooks, C. and Bingham, R. (1968). The specific heat of aluminum from 330 to 890°k and contributions from the formation of vacancies and anharmonic effects. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 29(9):1553–1560.
- Bui, H. (1966). Ecrouissage des métaux. *Cr. Acad. Sci.*, AB262:401–404.
- Bui, H. D. (1969). *Evolution des frontières d'élasticité des métaux cubiques avec l'écrouissage et relation de comportement élasto-plastique des métaux cubiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- Chaboche, J. (1989). Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 5(3):247–302.
- Cockcroft, M. (1968). Ductility and workability of metals. *J. of Metals*, 96:2444.
- Coleman, B. D. and Truesdell, C. (1960). On the Reciprocal Relations of Onsager. *The Journal of Chemical Physics*, 33(1):28–31.
- Coulomb, C.-A. (1776). Essai sur une application des règles des maximis et minimis a quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mem. Acad. Roy. Div. Sav.*, 7:343–387.
- Dang Van, K. (1973). Sur un critère de fatigue des matériaux sous sollicitations multiaxiales. *Revue de Mécanique Appliquée et de Génie Mécanique*, 22(5):15–22.
- Debye, P. (1912). Zur theorie der spezifischen wärmen. *Annalen der Physik*, 344(14):789–839.
- Drucker, D. C. and Prager, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(2):157–165.
- Fatemi, A. and Socie, D. F. (1988). A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including the effects of mean stress. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 11(3):149–159.
- Findley, W. (1959). A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load. *Journal of Applied Mechanics*, 26(1):169–173.
- Frederick, C. O. and Armstrong, P. (2007). A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. *Materials at high temperatures*, 24(1):1–26.

- Frémond, M. and Nedjar, B. (1996). Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8):1083–1103.
- Godfrey, T. G., Fulkerson, W., Kollie, T. G., Moore, J. P., and McElroy, D. L. (1964). Thermal conductivity of uranium dioxide and armco iron by an improved radial heat flow technique. Technical report, University of North Texas Libraries, Tennessee (United States).
- Gurtin, M. E., Fried, E., and Anand, L. (2010). *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press.
- Hill, R. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 193(1033):281–297.
- Hill, R. (1968). On constitutive inequalities for simple materials—i. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(4):229–242.
- Hosford, W. F. (1972). A Generalized Isotropic Yield Criterion. *Journal of Applied Mechanics*, 39(2):607–609.
- Hust, J. G. (1969). Thermal conductivity standard reference materials from 4 to 300 k. i. armco iron. Technical Report ADA382103, Cryogenics Division, Institute for Basic Standards, National Bureau of Standards, Boulder, Colorado (United States).
- Hust, J. G. (1984). Thermal conductivity of aluminum, copper, iron, and tungsten for temperatures from 1 k to the melting point. Technical Report 84-3007, National Institute of Standards and Technology (NIST).
- Ireman, P. and Nguyen, Q.-S. (2004). Using the gradients of temperature and internal parameters in continuum thermodynamics. *Comptes Rendus Mécanique*, 332(4):249–255.
- Isaak, D. G. and Masuda, K. (1995). Elastic and viscoelastic properties of α iron at high temperatures. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 100(B9):17689–17698.
- Johnson, G. and Cook, W. (1983). A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates, and high temperatures. In *Proceedings 7th International Symposium on Ballistics*, pages 541–547, The Hague.

- Johnson, V. J. (1960). A compendium of the properties of materials at low temperature (phase i). part ii. properties of solids. Technical Report WADD-TR-63-56(Pt.II), National Bureau of Standards. Cryogenic Engineering Lab, Boulder, Colorado (United States).
- Kachanov, L. M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk*, 8:26–31.
- Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Springer, Berlin, Germany.
- Kim, C. S. (1975). Thermophysical properties of stainless steels. Technical Report ANL-75-55, Argonne National Lab., Illinois (United States).
- Köster, W. (1948a). The temperature dependence of the elasticity modulus of pure metals. *Z. Metallkd.*, 39:1–9.
- Köster, W. (1948b). Über eine sondererscheinung im temperaturgang von elastizitätsmodul und dämpfung der metalle kupfer, silber, aluminium und magnesium. *Z. Metallkd.*, 39:9–12.
- Kube, C. M. (2016). Elastic anisotropy of crystals. *AIP Advances*, 6(9):095209.
- Kuhl, E. and Steinmann, P. (2003). Mass- and volume-specific views on thermodynamics for open systems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2038):2547–2568.
- Ladevèze, P. (1983). Sur une théorie de l'endommagement anisotrope. Technical Report 34, Laboratoire de Mécanique et Technologie.
- Ledbetter, H. (1982). Temperature behaviour of young's moduli of forty engineering alloys. *Cryogenics*, 22(12):653–656.
- Lee, E. H. (1969). Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36(1):1–6.
- Lode, W. (1926). Versuche über den einfluß der mittleren hauptspannung auf das fließen der metalle eisen, kupfer und nickel. *Zeitschrift für Physik*, 36:913–939.
- Lou, Y., Huh, H., Lim, S., and Pack, K. (2012). New ductile fracture criterion for prediction of fracture forming limit diagrams of sheet metals.

- International Journal of Solids and Structures*, 49(25):3605–3615. New Challenges in Mechanics & Materials for Sheet Metal Forming.
- Mandel, J. (1965). Generalisation de la theorie de plasticite de w. t. koiter. *International Journal of Solids and Structures*, 1(3):273–295.
- Matsuishi, M. and Endo, T. (1968). Fatigue of metals subjected to varying stress. *Japan Society of Mechanical Engineers*, 11(2):65–72.
- Maugin, G. A. (1990). Internal variables and dissipative structures. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 15(2):173–192.
- Mazars, J. (1986). A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5):729–737.
- Miehe, C., Hofacker, M., and Welschinger, F. (2010). A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45-48):2765–2778.
- Miner, M. A. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 12:159–164.
- Mises, R. v. (1913). Mechanik der festen körper im plastisch- deformablen zustand. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913:582–592.
- Onsager, L. (1931). Reciprocal relations in irreversible processes. i. *Phys. Rev.*, 37:405–426.
- Perzyna, P. (1966). Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 9:243–377.
- Phillips, A. and Juh-Ling, T. (1972). The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures. *International Journal of Solids and Structures*, 8(4):463–474.
- Rabotnov, Y. N. (1969). Creep rupture and damage mechanics. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk*, 33:1207–1211.
- Rankine, W. J. M. (1857). Ii. on the stability of loose earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 147:9–27.

- Rittel, D., Zhang, L., and Osovski, S. (2017). The dependence of the Taylor–Quinney coefficient on the dynamic loading mode. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 107:96–114.
- Seth, B. (1962). Generalized strain measure with applications to physical problems. In *IUTAM Symposium on Second Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Mechanics*, Haifa.
- Sidoroff, F. (1974). Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *Journal de Mécanique*, 13(4):679–713.
- Sines, G. (1959). Behavior of materials under complex stress. *Engineering Fracture Mechanics*, 1:106–115.
- Srinivasa, A. (2012). On the use of the upper triangular (or qr) decomposition for developing constitutive equations for green-elastic materials. *International Journal of Engineering Science*, 60:1–12.
- Stromeyer, C. (1914). The determination of fatigue limits under alternating stress conditions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 90(620):411–425.
- Taylor, G. I. and Quinney, H. (1934). The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 143(849):307–326.
- Touloukian, Y. S. and Ho, C. Y. (1977). Thermophysical properties of selected aerospace materials. part 2. thermophysical properties of seven materials. Technical Report ADA129295, Purdue Univ. Thermophysical and Electronic Properties Information Center, Lafayette, Indiana (United States).
- Touloukian, Y. S., Kirby, R. K., Taylor, R. E., and Desai, P. D. (1975). Thermophysical properties of matter - the tprc data series. volume 12. thermal expansion metallic elements and alloys. (reannouncement). data book. Technical Report AD-A-129115/2/XAB, Purdue Univ. Thermophysical and Electronic Properties Information Center, Lafayette, Indiana (United States).
- Tresca, H. (1868). *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*. Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. Imp. impériale.

- Truesdell, C. and Toupin, R. (1960). *The classical field theories*. Springer.
- Tsai, S. W. and Wu, E. M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of composite materials*, 5(1):58–80.
- Varshni, Y. P. (1970). Temperature dependence of the elastic constants. *Phys. Rev. B*, 2:3952–3958.
- Voce, E. (1955). A practical strain hardening function. *Metallurgia*, 51:219–226.
- Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik)*. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden.
- Šilhavý, M. (1996). *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Springer Berlin, Heidelberg.
- Wachtman, J. B., Tefft, W. E., Lam, D. G., and Apstein, C. S. (1961). Exponential temperature dependence of young's modulus for several oxides. *Phys. Rev.*, 122:1754–1759.
- White, G. K. and Collocott, S. J. (1984). Heat capacity of reference materials: Cu and w. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 13(4):1251–1257.
- Williams, M. L., Landel, R. F., and Ferry, J. D. (1955). The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society*, 77(14):3701–3707.
- Zhang, J., Nyilas, A., and Obst, B. (1991). New technique for measuring the dynamic young's modulus between 295 and 6 k. *Cryogenics*, 31(10):884–889.