Mathématiques

Géométrie analytique

Laurent Gajny

16/01/2023

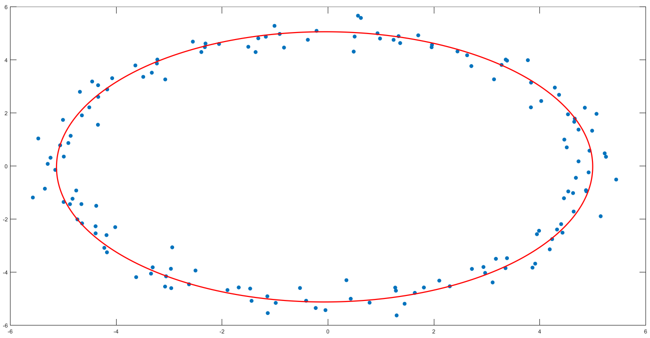
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ARTS ET METIERS
PIS – GI1

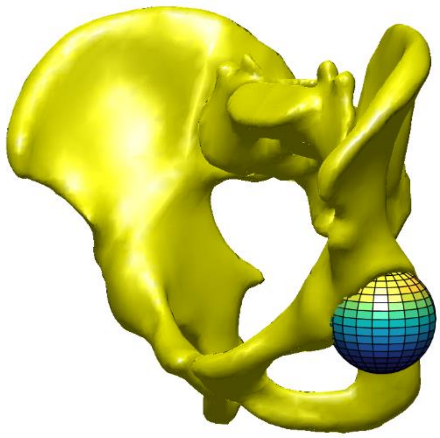
Contenu

I. Introduction

La géométrie analytique est la branche de géométrie dans laquelle les objets sont décrits par des équations ou des inéquations dans un système de coordonnées. Elle est le socle de la modélisation géométrique qui est appliquée dans divers domaines à l'aide par exemple de la conception assistée par ordinateur (CAO) et de la fabrication additive.

Dans ce cours, destiné aux élèves ingénieurs-apprentis de première année en Génie Industriel à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, campus de Paris, nous adressons les bases de la géométrie analytique. Après de brefs rappels de géométrie euclidienne, on s'intéresse aux formulations analytiques de lieux géométriques très classiques dans le plan et/ou l'espace : droite, plan, cercle, sphère mais aussi des objets plus complexes comme les coniques et les quadriques. Ce cours adresse également la question de la régression de points de données en 2D ou 3D par ces lieux géométriques afin de modéliser par exemple le signal obtenu par un capteur ou modéliser une partie d'un nuage de points ou maillage.





Approximation de données bruitées par une ellipse (gauche) et approximation de la surface de l'acetabulum (partie de la hanche sur l'os du bassin) par une sphère (droite).

Contact auteur : Laurent.GAJNY@ensam.eu

II. Notions de bases. Points et vecteurs du plan et de l'espace

Soit E l'ensemble des points du plan, noté $\mathbb{R}^2$, ou de l'espace, noté $\mathbb{R}^3$. On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble (plutôt le corps pour les plus initiés) des nombres réels.

1. Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

A tout couple (A, B) de points est associé le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Soit alors $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, c'est-à-dire $\vec{E}= \{\overrightarrow{AB}\ , (A, B) \in E^2\}$.

Définition : Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un ensemble $\vec{E}$ muni de deux lois.

- Une loi de composition interne notée $+$:

$$+:\ \vec{E}^2 \to \vec{E}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

- Une loi de composition externe notée . :

$$.:\ \mathbb{R} \times \vec{E} \to \vec{E}$$

$$(\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda.\vec{u}$$

$\vec{E}$ vérifie les propriété suivantes :

- $(\vec{E}, +)$ est un groupe abélien. Autrement dit, la loi + est :
  - Associative : $\forall\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}^3;\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
  - Commutative : $\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E};\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
  - Admet $\vec{0}$ pour élément neutre : $\forall\ \vec{u} \in \vec{E}, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.
  - Tout vecteur $\vec{u}$ admet un opposé $-\vec{u}$.
- La loi . vérifie :
  - $\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{R};\quad \lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$.
  - $\forall\ \vec{u} \in \vec{E}, \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2;\quad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$.
  - $\forall\ \vec{u} \in \vec{E}, \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2;\quad (\lambda\mu).\vec{u} = \lambda.(\mu.\vec{u})$.
  - $\forall\ \vec{u} \in \vec{E}, 1.\vec{u} = \vec{u}$.

Exemple : Les vecteurs du plan et de l'espace forment un espace vectoriel.

2. Repérage d'un vecteur et d'un point de l'espace

a. Base d'un espace vectoriel

Définition : Une famille finie $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ de vecteurs de $\vec{E}$ est dite libre si :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i} = \vec{0} \Longrightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Une famille finie $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ de vecteurs de $\vec{E}$ est dite génératrice si :

$$\forall\vec{u} \in \vec{E}, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{tels que} \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i}.$$

Une famille finie $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ de vecteurs de $\vec{E}$ est appelée base $\vec{E}$ si elle est à la fois libre et génératrice.

Dans le plan, les bases sont composées de deux vecteurs (dimension 2). Dans l'espace les bases sont composées de trois vecteurs (dimension 3).

b. Coordonnées cartésiennes

Dans cette section, E et $\vec{E}$ désignent respectivement l'ensemble des points de l'espace et l'espace vectoriel des vecteurs de l'espace.

Définition : Soit O un point de E et $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\vec{\boldsymbol{E}}$. Les coordonnées d'un point M de E dans le repère $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base B.

$$M \text{ de coordonnées } (x, y, z) \text{ dans le repère } (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Cette définition permet de définir les coordonnées d'un vecteur construits via deux points.

Proposition : Si Le point M_1 est de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et le point M_2 est de coordonnées (x_2, y_2, z_2) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, alors le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est de coordonnées $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ dans ce repère.

Preuve : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2}$ (relation de Chasles)

$$= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$ □

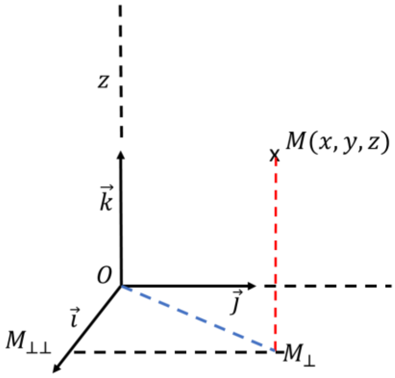
Définition : On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthogonale lorsque les veceurs sont deux à deux orthogonaux. Si de plus, $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$, on parle de base orthonormée.

Exemple : La base canonique de $\vec{E}$ - $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ – est orthonormée.

Proposition : Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Preuve : Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère associé à cette base. Soit $M_\perp$ la projection orthogonale du point M dans le plan défini par $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Autrement dit, $M_\perp$ est de coordonnées $(x,y,0)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.



Par le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{OM_\perp}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{M_\perp M}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{OM_\perp}\right\|^2 + z^2 \end{aligned}$$

Soit maintenant $M_{\perp\perp}$ la projection orthogonale du point $M_\perp$ sur l'axe $(O,\vec{\imath})$. Autrement dit, $M_{\perp\perp}$ est de coordonnées $(x,0,0)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Toujours par Pythagore :

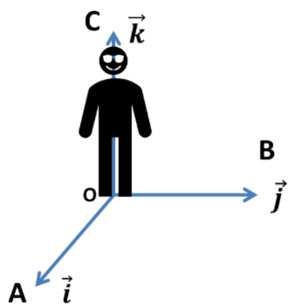
$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{OM_{\perp\perp}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{M_{\perp\perp}M_\perp}\right\|^2 + z^2 \\ &= x^2+y^2+z^2. \end{aligned}$$

□

Corollaire : Si le point M_1 est de coordonnées (x_1,y_1,z_1) et le point M_2 est de coordonnées (x_2,y_2,z_2) dans le repère **orthonormée** $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ alors :

$$d(M_1,M_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

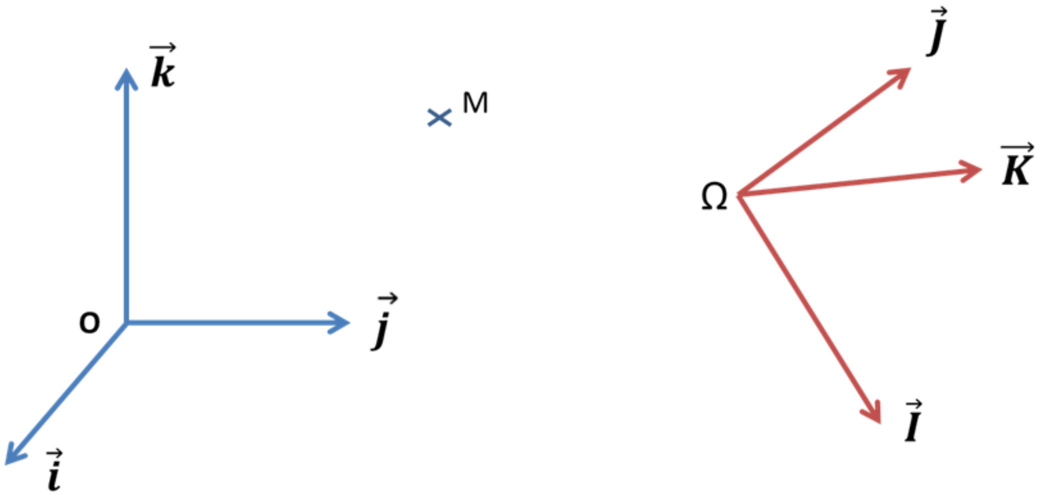
Remarque : On considérera toujours dans ce cours que les bases utilisées sont directes.



Une base $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ de l'espace est directe si et seulement si elle vérifie la « règle du bonhomme d'Ampère » : Un personnage ayant les pieds en O, la tête en C et regardant vers A, voit le point B à sa gauche. Dans le cas contraire, elle est indirecte.

c. Changement de repères, cartésien vers cartésien

Soient deux repères $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $(\Omega,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, et M un point de E. On note (x,y,z) les coordonnées de M dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et (X,Y,Z) ses coordonnées dans $(\Omega,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$.



On suppose $\vec{I}, \vec{J}$ *et* $\vec{K}$ connus par leurs coordonnées dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

- $\vec{I} = a_I\vec{\imath} + b_I\vec{\jmath} + c_I\vec{k}$
- $\vec{J} = a_J\vec{\imath} + b_J\vec{\jmath} + c_J\vec{k}$
- $\vec{K} = a_K\vec{\imath} + b_K\vec{\jmath} + K\vec{k}$

Et Ω connu par ses coordonnées (α,β,γ) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

$$\overrightarrow{\Omega M} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} + Z\,\vec{K}$$

$$\overrightarrow{\Omega M} = (a_IX + a_JY + a_KZ)\vec{\imath} + (b_IX + b_JY + b_KZ)\vec{\jmath} + (c_IX + c_JY + c_KZ)\vec{k}$$

En traduisant ceci sur les coordonnées dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on obtient :

$$\begin{aligned} x - \alpha &= a_IX + a_JY + a_KZ \\ y - \beta &= b_IX + b_JY + b_KZ \\ z - \gamma &= c_IX + c_JY + c_KZ \end{aligned}$$

D'où les relations donnant x, y et z (anciennes coordonnées) en fonction de X, Y et Z (nouvelles coordonnées) :

$$\begin{aligned} x &= a_IX + a_JY + a_KZ + \alpha \\ y &= b_IX + b_JY + b_KZ + \beta \\ z &= c_IX + c_JY + c_KZ + \gamma \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_I & a_J & a_K \\ b_I & b_J & b_K \\ c_I & c_J & c_K \end{bmatrix}}_{=\text{ Matrice de rotation } R} . \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

= vecteur de translation $\vec{t}$

Inversement, nous avons :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_I & a_J & a_K \\ b_I & b_J & b_K \\ c_I & c_J & c_K \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{bmatrix}$$

La matrice de rotation est la matrice de passage entre la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ et la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Si ces deux bases sont orthonormées alors on peut montrer que cette matrice est orthogonale, *i.e.* $RR^T = I = R^T R$ où I est la matrice identité. Elle est inversible et $R^{-1} = R^T$. D'où :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_I & b_I & c_I \\ a_J & b_J & c_J \\ a_K & b_K & c_K \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{bmatrix}$$

La notion de matrice de transformation est souvent utile

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_I & a_J & a_K & \alpha \\ b_I & b_J & b_K & \beta \\ c_I & c_J & c_K & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$ sont alors appelés coordonnées homogènes dans leurs repères respectifs.

Remarque : Quand un changement de base est simplement une rotation d'angle θ autour d'un axe donné du repère initial, la matrice de rotation a une forme bien connue :

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple : Soit M un point de coordonnées $(6,-1,1452)$ dans le repère canonique. Déterminer ses coordonnées dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ où $\vec{I}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{J}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En appliquant strictement la démarche ci-dessus, on reporte les coordonnées des vecteurs de la nouvelles base dans une matrice dite matrice de rotation et on obtient :

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1452 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

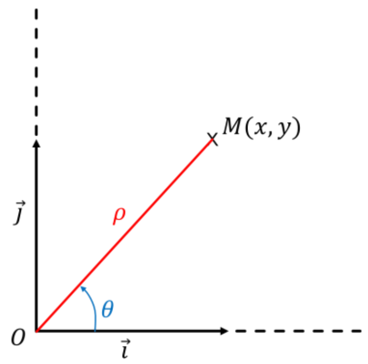
Soit encore :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1452 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3{,}54 \\ -4{,}95 \\ 1452 \end{bmatrix}.$$

d. Coordonnées polaires

Nous avons vu les coordonnées cartésiennes dans $E = \mathbb{R}^3$. Bien sûr et vous le savez bien. Ce formalisme est adapté à $E = \mathbb{R}^2$. Il est possible de localiser un point dans $\mathbb{R}^2$ par un autre système de coordonnées populaire : les coordonnées polaires.

On suppose E muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans ce repère.



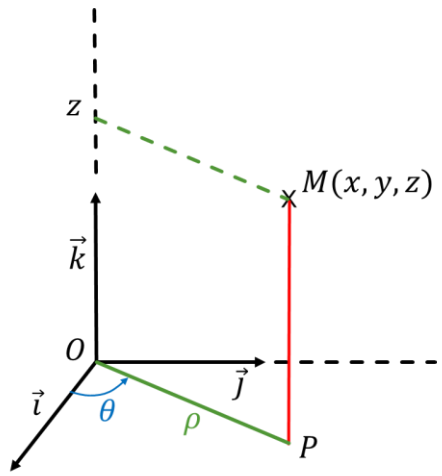
Par les définitions géométriques des fonctions cosinus et sinus. Il vient immédiatement que :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}, \quad \rho \geq 0, \theta \in [-\pi, \pi].$$

(ρ, θ) sont les coordonnées polaires du point M.

e. Coordonnées cylindriques

On suppose E muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.



Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans ce repère. Soit également P la projection orthogonale du point M dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Autrement dit, P est de coordonnées $(x, y, 0)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On repère M par les coordonnées polaires (ρ, θ) de P dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Par convention, $\rho \geq 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Les coordonnées cylindriques de M sont donc (ρ, θ, z) tels que : $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z \end{cases}$

f. Coordonnées sphériques

On suppose E muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

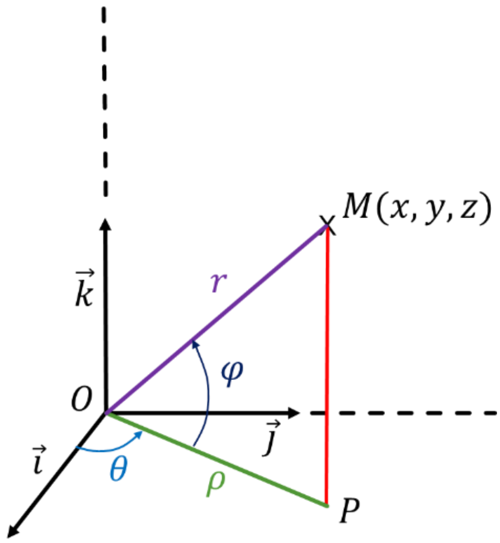
Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans ce repère. Soit également P la projection orthogonale du point M dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Autrement dit, P est de coordonnées $(x,y,0)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

P est de coordonnées polaires (ρ,θ) dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit alors $\vec{u} = \cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath}$. On a donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + z\vec{k} = \rho\vec{u} + z\vec{k}$.

On repère le point M par ses coordonnées polaires (r,φ) dans le repère $(O,\vec{u},\vec{k})$. Mais on peut utiliser plusieurs conventions pour l'angle φ pour assurer l'unicité des coordonnées sphériques. Il existe donc plusieurs variantes des coordonnées sphériques et nous en présentons deux.

<u>Coordonnées sphériques rayon-longitude-latitude (RLL)</u>



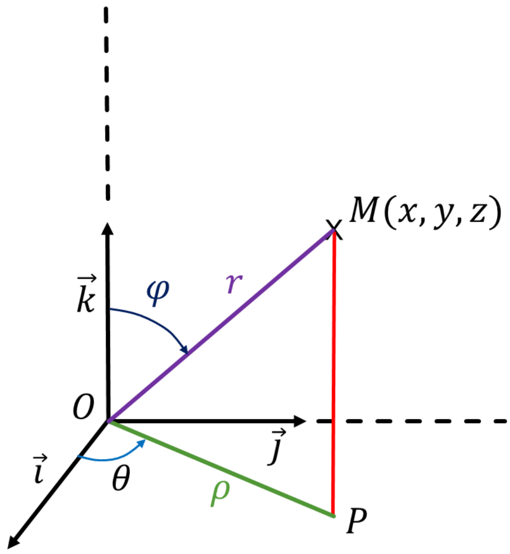
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \rho\vec{u} + z\vec{k}\\ &= r\cos\varphi\,\vec{u} + r\sin\varphi\,\vec{k}\\ &= r\cos\varphi\cos\theta\ \vec{\imath} + r\cos\varphi\ \sin\theta\,\vec{\jmath} + r\sin\varphi\,\vec{k}\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques RLL de M sont donc :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\ \sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

Avec $\rho \geq 0$; $\theta \in [-\pi,\pi]$ et $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

<u>Coordonnées sphériques rayon-longitude-colatitude (RLC)</u>



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \rho\vec{u} + z\vec{k}\\ &= r\sin\varphi\,\vec{u} + r\cos\varphi\,\vec{k}\\ &= r\sin\varphi\cos\theta\ \vec{\imath} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + r\cos\varphi\,\vec{k}\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques RLC de M sont donc :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

Avec $\rho \geq 0$; $\theta \in [-\pi,\pi]$ et $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Remarque : Les coordonnées sphériques RLL sont les coordonnées géographiques (« GPS ») bien connues.

Remarque : Les changements de système de coordonnées (polaire, cylindrique ou sphérique) sont très utiles pour calculer des intégrales multiples !

3. Barycentre

a. Barycentre d'un système de plusieurs points pondérés

On suppose E muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On se place par exemple dans le cas de trois pondérés (A, a), (B, b), (C, c).

Théorème : Si $a + b + c \neq 0$, alors il existe un unique point G vérifiant :

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Preuve : L'égalité $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ peut se réécrire grâce à la relation de Chasles :

$$a\,(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + b\,(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) + c\,(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}.$$

On obtient alors $(a + b + c)\,\overrightarrow{OG} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}$.

Comme $a + b + c \neq 0$, on obtient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a + b + c}(a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}).$$

Cette équation définit bien un unique point G.

□

Remarque : On a également pour tout point M de E, $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b+c}(a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC})$.

Définition : G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b), (C, c)$.

Plus généralement, le barycentre G des points $M_1, M_2, \dots, M_n$ affectés des coefficients respectifs α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ est l'unique point G tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GM_k} = \vec{0}$.

En particulier, L'isobarycentre des points M_1, $M_2, \dots, M_n$ est le barycentre de ces points affectés tous du coefficient 1.

Remarque : L'isobarycentre G de deux points A et B est le milieu de $[AB]$ car d'après la caractérisation ci-dessus : (en prenant $O = A$) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

Exemple :

Construire G le barycentre de $(A, 2), (B, -3), (C, 5)$.

Pour tout point M, on obtient $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2-3+5}(2\,\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB} + 5\,\overrightarrow{MC})$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{4}\,\overrightarrow{MB} + \frac{5}{4}\,\overrightarrow{MC}.$$

En particulier, pour $M = A$, on a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$$

b. Propriété d'homogénéité

Proposition : Si G est le barycentre de $(A, a), (B, b)$ et (C, c) alors, pour tout réel k non nul, G est aussi barycentre de $(A, ka), (B, kb), (C, kc)$.

On ne change donc pas le barycentre en multipliant ou en divisant les coefficients par un même nombre non nul.

c. Propriété d'associativité

Proposition : On suppose $1 \leq p \leq n$, soit G' le barycentre de $M_1, M_2, \dots, M_p$ affectés des coefficients respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. Le barycentre de $M_1, M_2, \dots, M_n$ respectivement affectés de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ est le barycentre G' affecté de $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k$ et de $M_{p+1}, M_{p+2}, \dots, M_n$ affectés des coefficients respectifs $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_n$.

Autrement dit, on peut remplacer $M_1, M_2, \dots, M_p$ par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.

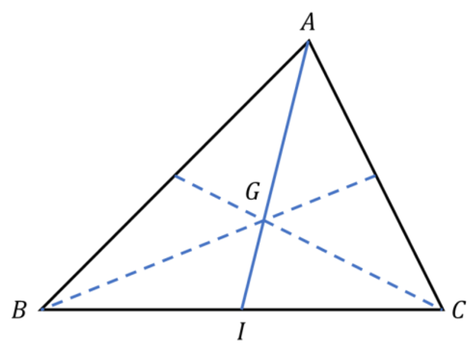
Exemple : Soit A, B, C trois points non alignés, G l'isobarycentre des trois points et I le milieu de $[BC]$. G est le barycentre de I affecté de 2 et de A affecté de 1. On a donc :

$$\forall M \in E, \quad 3\,\overrightarrow{MG} = 2\,\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MA}$$

En particulier, pour $M = A$, on a :

$$3\,\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AA}$$

D'où $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.



G est donc au $\frac{2}{3}$ de la médiane AI. On peut faire le même raisonnement avec les autres médianes. Il en résulte que les médianes sont concourantes en G, appelé centre de gravité du triangle.

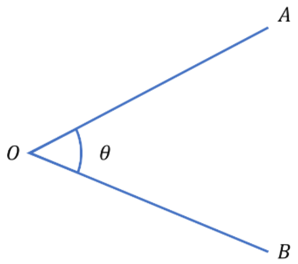
4. Produits de vecteurs usuels

a. Produit scalaire

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ (ou $(\vec{u},\vec{v})$ ou encore $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$) l'opération suivante :

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$ où θ est l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque : $\forall\ (\vec{u},\vec{v})\in\vec{E}^2, \vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$. Le vecteur nul est considéré comme orthogonal à tout vecteur.



Soient O, A, B trois points de E,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos\theta.$$

Proposition :

1. Le produit scalaire est une forme **bilinéaire symétrique** :
   - $\forall\ (\vec{u},\vec{v})\in\vec{E}^2,\ \vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (symétrie)
   - $\forall\ (\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in\vec{E}^3, \forall\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$:
     $\vec{u}.(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha\vec{u}.\vec{v}+\beta\vec{u}.\vec{w}$ (linéarité à gauche)
     $(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}).\vec{w}=\alpha\vec{u}.\vec{v}+\beta\vec{v}.\vec{w}$ (linéarité à droite)
2. $\forall\ \vec{u}\in\vec{E}, \vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
3. $\forall\ (\vec{u},\vec{v})\in\vec{E}^2,\ \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$.

Remarque : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w})=0$ mais cela n'entraîne bien évidemment pas $\vec{v}=\vec{w}$. On peut simplement dire que $\vec{u}\perp(\vec{v}-\vec{w})$.

Proposition : Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthonormée de l'espace. Soient également deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'.$$

Preuve : Par bilinéarité du produit scalaire :

$$\vec{u}.\vec{v}=(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}).(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k})$$

$$=xx'\,\vec{\imath}.\vec{\imath}+xy'\,\vec{\imath}.\vec{\jmath}+xz'\,\vec{\imath}.\vec{k}+yx'\,\vec{\imath}.\vec{\jmath}+yy'\,\vec{\jmath}.\vec{\jmath}+yz'\,\vec{\jmath}.\vec{k}+zx'\,\vec{\imath}.\vec{k}+zy'\,\vec{\jmath}.\vec{k}+zz'\,\vec{k}.\vec{k}$$

Or $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k}$ =1 car les vecteurs sont normés et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$ car les vecteurs sont orthogonaux.

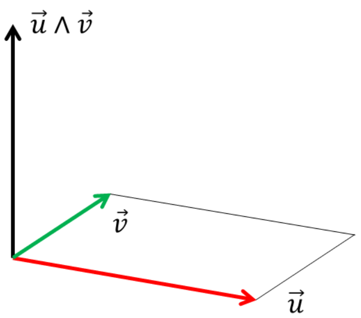
□

Corollaire : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (Attention valable uniquement en base orthonormale).

b. Produit vectoriel

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-colinéaires de $\vec{E}$. On définit le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'unique vecteur $\vec{w}$:

- $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$.
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin\theta|$ où θ est l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe.



Proposition :

1. Le produit vectoriel est antisymétrique : $\forall\ (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2,\ \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
2. Le produit vectoriel est bilinéaire : $\forall\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}^3, \forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w} \qquad \text{(linéarité à gauche)}$$
$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w} \qquad \text{(linéarité à droite)}$$

Proposition : Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace. Soient également deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz'' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$

Exemple : Calculer le produit vectoriel du vecteur $\vec{u}$ par $\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \times (-1) - 2 \times 5 \\ 5 \times (-1) - 3 \times (-1) \\ 3 \times 2 - (-2) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition : (Interprétation géométrique) $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ = **aire du parallélogramme** construit par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (*cf.* figure page précédente).

c. Produit mixte ou déterminant

Définition : Soient $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \vec{E}^3$ et $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\vec{E}$. On appelle déterminant ou produit mixte des vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ et on note $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le nombre réel :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}.$$

Remarque : Cette opération est équivalente au calcul du déterminant de la matrice $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

Proposition : Soient $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \vec{E}^3$.

$$\vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ sont coplanaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Exemple : Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\vec{E}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix}$

Déterminer a pour que les vecteurs soient coplanaires.

On calcule tout d'abord $\vec{u}\wedge\vec{v}$:

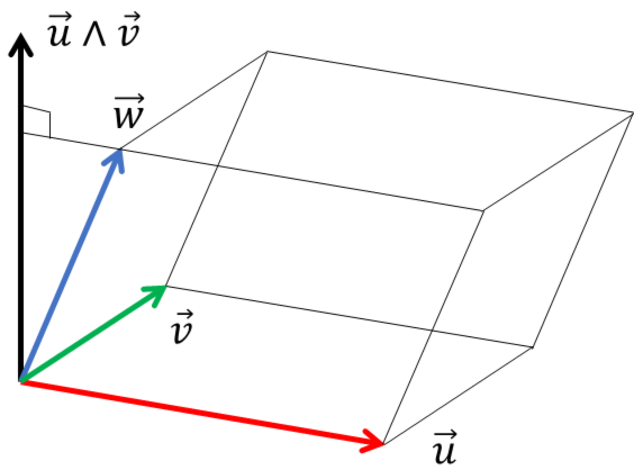
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix} = a - 2 + 2 = a.$$

Ces 3 vecteurs sont donc coplanaires si et seulement $a = 0$. Dans ce cas, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Proposition : (Interprétation géométrique) $|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$ est le **volume du parallélépipède** construit sur $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$.



5. Exercices

Exercice 1 :

On suppose l'ensemble des points du plan muni de son repère canonique $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée.
2) Soit M un point du plan, on note (x, y) les coordonnées de M dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on note (X, Y) les coordonnées de M dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Exprimer x, y en fonction de X et Y et inversement.

Exercice 2 :

Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) Trouver a tel que $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ soient coplanaires.

Exercice 3 :

Le sommet de la montagne du Chimbozaro en Equateur est le point sur Terre le plus loin du centre de la Terre. Ces coordonnées (X, Y, Z) en kilomètres sont :

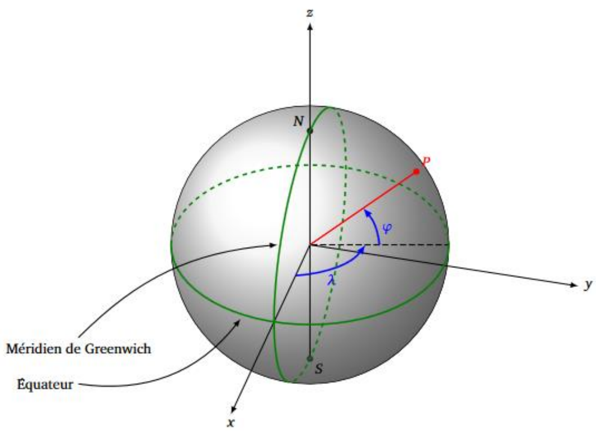
$$X = 1238{,}0; \qquad Y = -6261{,}0; \qquad Z = -163{,}1$$

Calculer la distance r du sommet à l'origine ainsi que la latitude φ et la longitude λ.

Rappel :

On modélise la Terre par une sphère de rayon R=6300 km. Un point à la surface de la Terre est déterminé par :

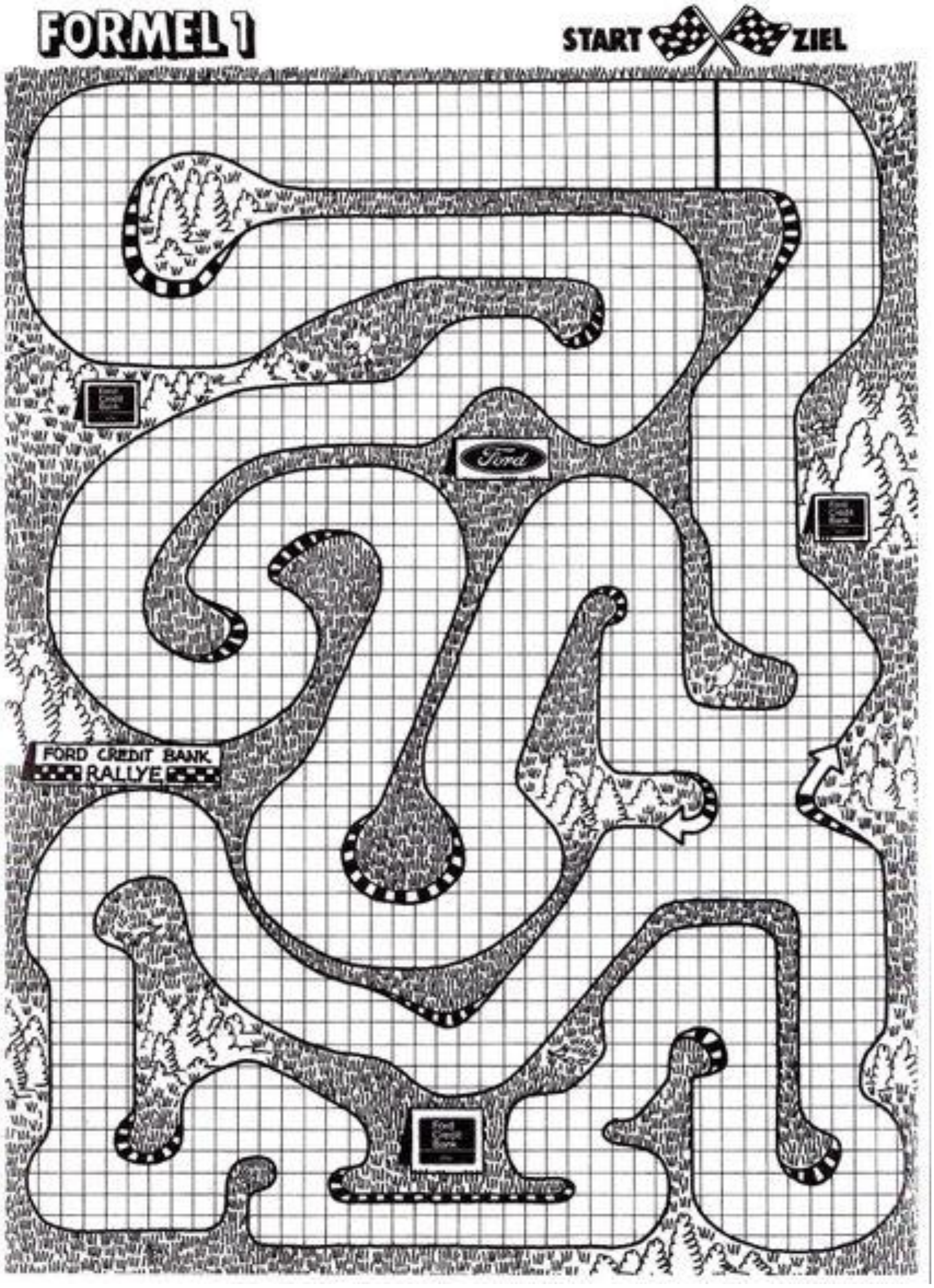
- L'angle φ, qui est la **latitude**, c'est un angle compris entre -90° et 90°. A l'équateur, φ = 0°.
- L'angle λ, qui est la **longitude,** c'est un angle compris entre -180° et 180°. Le méridien de Greenwich correspond à λ = 0°.



Exercice 4 : On se donne trois points de l'espace A, B et C. Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = 3\,\overrightarrow{BC}$. Déterminer les poids associés aux points A, B et C pour que G soit leur barycentre.

6. Racetrack

Terminons ce chapitre par un jeu de stratégie combinatoire abstraite. Racetrack se joue sur une feuille de papier millimétré carrée sur laquelle est dessinée une piste. À chaque tour, un joueur dessine le vecteur de déplacement de sa voiture, qui ne peut différer du vecteur du coup précédent que d'une certaine quantité (par exemple, 2 carrés au total) dans chaque direction. Une bonne dose de planification est donc nécessaire pour négocier les virages en toute sécurité.

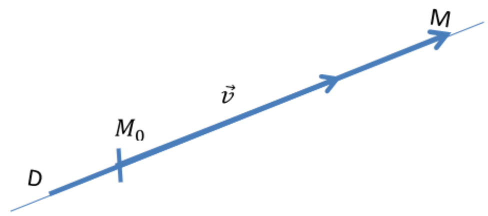


Exemple de grille de Racetrack (boardgamegeek.com)

II. Droites et plans de l'espace

1. Droites de l'espace

Définition : La droite $\boldsymbol{D}$ définie par le point M_0 et le vecteur $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de E tels que $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{v}$.



Ecriture paramétrique : On suppose E muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soient $\boldsymbol{D}$ la droite définie par le point M_0 (x_0, y_0, z_0) et le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et M un point de coordonnées (x, y, z).

$$M \in \boldsymbol{D} \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}.$$

$$\Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x - x_0 = t\alpha \\ y - y_0 = t\beta \\ z - z_0 = t\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$

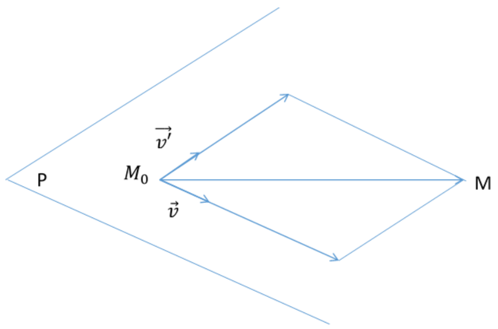
Tout ensemble défini par un paramétrage de ce type avec $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$ est une droite.

Remarque : Dans l'espace, une droite ne s'écrit pas $y = ax + b$ et pas non plus par extension $z = ax + by + c$! Nous allons voir pourquoi dans la section suivante.

2. Plans

Définition : Soit M_0 un point de E, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\vec{E}$ (*i.e.* les vecteurs forment une famille libre). Le plan $\boldsymbol{P}$ défini par le point M_0 et les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ est l'ensemble des points M de E tels que :

$$\exists(\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{v} + \lambda'\vec{v}'.$$



Cette définition permet d'expliciter une équation paramétrique. On suppose E muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient $\boldsymbol{P}$ le plan défini par le point M_0 (x_0, y_0, z_0), les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$. Soit enfin M un point de coordonnées (x, y, z).

$$M \in \boldsymbol{P} \Leftrightarrow \exists(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{v}.$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x - x_0 = \lambda\alpha + \lambda'\alpha' \\ y - y_0 = \lambda\beta + \lambda'\beta' \\ z - z_0 = \lambda\gamma + \lambda'\gamma' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \lambda'\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \lambda'\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \lambda'\gamma' \end{cases}$$

Cette définition est néanmoins peu utilisée en pratique. On lui préfère une équation dite implicite de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0,0,0)$. On peut l'obtenir de différentes façons.

Plan défini par un point et deux vecteurs, ou par trois points non alignés

On suppose E muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. $\boldsymbol{P}$ est le plan défini par le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans ce repère et les vecteurs $\vec{v}$, de coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}'$, de coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ dans la base associée. M est un point de coordonnées (x, y, z) dans ce repère. Comme $(\vec{v}, \vec{v}')$ est supposée libre :

$$M \in \boldsymbol{P} \Leftrightarrow \exists\lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{M_0\,M} = \lambda\vec{v} + \lambda'\vec{v}'$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{v}, \vec{v}'\right) \text{ est lié}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{v}, \vec{v}'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(à développer).}$$

Plan défini par un point et un vecteur orthogonal

On suppose E muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. M_0 est un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans ce repère et $\vec{n}$ un vecteur non nul de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et M un point de coordonnées (x, y, z).

$$\overrightarrow{M_0\,M} \perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

3. Intersections

En pratique, on est souvent amené à déterminer des intersections de structures géométriques. La géométrie analytique permet un calcul efficace et relativement simple de ces intersections.

a. Intersection d'une droite et d'un plan

On suppose E muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $\boldsymbol{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $\boldsymbol{D}$ la droite définie par M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Le point M de coordonnées (x, y, z) est dans l'intersection de $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{P}$ si et seulement si :

$$\left\{ \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que} \begin{pmatrix} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{pmatrix} \text{ et } ax + by + cz + d = 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que} \begin{pmatrix} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{pmatrix} \text{ et } ax_0 + by_0 + cz_0 + d + t(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0 \right\}$$

Si $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer t dans l'équation paramétrique de la droite par cette valeur.

Exemple : On considère les points $A(0,4,1), B(1,3,0), C(2,-1,-2)$ et $D(7,-1,4)$. Calculer l'intersection du plan formé par les points A, B, C, noté (ABC) et de la droite passant par D de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On va tout d'abord déterminer une équation implicite du plan (ABC). Deux vecteurs directeurs de celui-ci sont par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Un vecteur normal est alors :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Une équation implicite est donc :

$$-2x + y - 3z + d = 0.$$

Pour déterminer d, on utilise par exemple le fait que $A \in (ABC)$. On injecte ses coordonnées dans l'équation ci-dessus. Il vient alors $d = -1$ et donc :

$$(ABC): -2x + y - 3z - 1 = 0.$$

La droite $(D,\vec{u})$ a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

On injecte ces expressions de x, y et z dans l'équation implicite du plan (ABC).

$$(ABC) \cap (D,\vec{u}) : -2(7 + 2t) + (-1 - t) - 3(4 + 3t) - 1 = 0$$

$$-14t = 28$$

$$t = -2.$$

L'unique point d'intersection est (en remplaçant t par -2 dans l'équation paramétrique de la droite) le point de coordonnées $(3,1,-2)$.

<u>Remarque :</u> L'intersection d'un plan et d'une droite n'existe pas nécessairement ! Par ailleurs, la droite peut appartenir au plan !

b. Intersection de deux plans

On suppose E muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $\boldsymbol{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $\boldsymbol{P}'$ le plan d'équation $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

On note $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ et $\vec{n}' = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath} + c'\vec{k}$. On a 3 cas possibles :

- $\boldsymbol{P} \,//\, \boldsymbol{P}' \Leftrightarrow \vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ *ie.* $\exists\, k \in \mathbb{R}, a' = ka;\ b' = kb;\ c' = kc$ **($\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires).**
- $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}, a' = ka;\ b' = kb;\ c' = kc;\ d' = kd$ **(équations proportionnelles).**
- $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P}'$ sont sécants $\Leftrightarrow$ l'intersection est donnée par le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$.

Un système de la forme $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ avec des coefficients de x, y, z non proportionnels représente une droite. C'est une alternative à l'écriture paramétrique d'une droite vue précédemment !

<u>Exemple :</u> Calculer l'intersection des 2 plans d'équation respective :

$$2x + 3y - z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + 2z - 1 = 0$$

On peut vérifier très rapidement qu'ils ne sont pas parallèles ou égaux en vérifiant qu'il n'existe pas de rapport de proportionnalité respectivement entre les 3 premiers et les 4 premiers coefficients des équations.

Calculer l'intersection de ces 2 plans, c'est donc mettre en évidence une équation de droite. On en donnera une écriture paramétrique. On peut par exemple désigner la valeur de z comme paramètre *ie.* $z = t, t \in \mathbb{R}$. On cherche donc à exprimer x et y en fonction de t.

$$\begin{cases} 2x + 3y - t + 1 = 0 \\ x + 2y + 2t - 1 = 0 \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - t + 1 = 0 \\ x = -2y - 2t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2y - 2t + 1) + 3y - t + 1 = 0 \\ x = -2y - 2t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -5t + 3 \\ x = -2y - 2t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

On conclut et on remet de l'ordre…

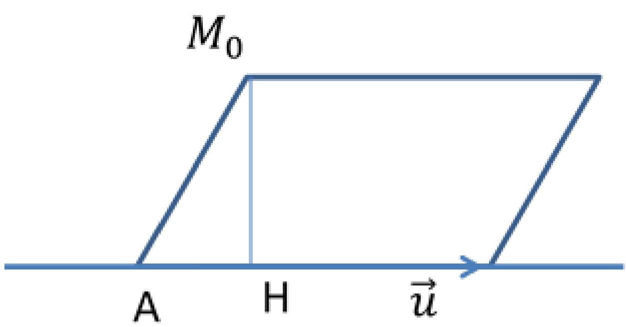
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8t - 5 \\ y = -5t + 3\,, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

4. Distances

Un autre outil tout à fait utile en pratique sont les formules de distance. Les formules les plus utiles sont rappelées ci-dessous.

a. Distance entre un point et une droite de l'espace

Proposition : Soit $\boldsymbol{D}$ la droite définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. La distance d'un point M_0 de E à la droite $\boldsymbol{D}$ est donnée par : $d(M_0, \boldsymbol{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

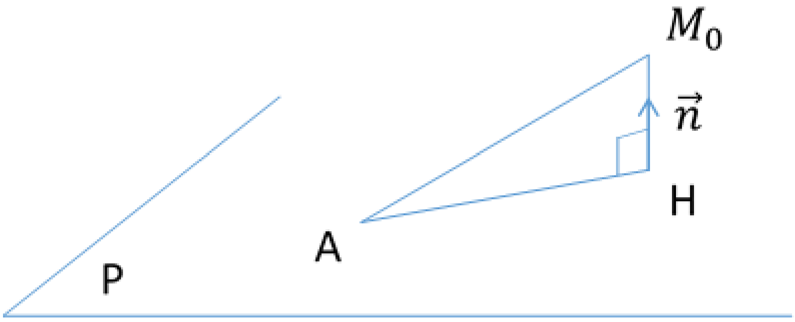


Preuve : $\|\overrightarrow{AM_0} \wedge \vec{u}\| = \|\underbrace{\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{HM_0} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM_0}\|.\|\vec{u}\|$ car $\overrightarrow{HM_0}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. □

b. Distance entre un point et un plan

Proposition : Soit $\boldsymbol{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de E n'appartenant pas au plan $\boldsymbol{P}$.

Alors $\mathrm{dist}(M_0, \boldsymbol{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



Preuve : Soit $H(x_H, y_H, z_H)$ le projeté orthogonal de M_0 sur $\boldsymbol{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur orthogonal à $\boldsymbol{P}$. Les vecteurs $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{M_0H} = \lambda\vec{n}$. Il vient :

$$\begin{pmatrix} x_H - x_0 \\ y_H - y_0 \\ z_H - z_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

De plus $H \in \boldsymbol{P}$ donc $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$.

Nous devons donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_H = \lambda a + x_0 \\ y_H = \lambda b + y_0 \\ z_H = \lambda c + z_0 \\ ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \end{cases}$$

On substitue x, y et z dans la 4e équation par leurs valeurs issues 3 premières. Il vient :

$$a(\lambda a + x_0) + b(\lambda b + y_0) + c(\lambda c + z_0) + d = 0$$

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d + \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

Donc,

$$\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

(a, b, c sont nous tous nuls car $\boldsymbol{P}$ est un plan).

Enfin, $\mathrm{dist}(M_0, \boldsymbol{P}) = \left\|\overrightarrow{M_0H}\right\| = |\lambda|\|\vec{n}\| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. □

5. Exercices

Exercice 1 :

Soit un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On donne les points $A(1,2,-1), B(3,2,0), C(2,1,-1)$ et $D(1,0,4)$. Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

Exercice 2 :

Déterminer l'intersection de la droite (D) : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = 7 \end{cases}$ et du plan (P) : $x+3y-5z+2=0$

Exercice 3 :

On considère la famille de plans (P_m) avec $m \in \mathbb{R}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2x + (2m-1)y + mz = 3$$

1. Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :
   - $A(1,1,1) \in P_m$
   - $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à P_m
   - $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de P_m
2. Montrer qu'il existe un unique point Q appartenant aux plans P_m.

Exercice 4 :

1. Déterminer la distance du point A au plan (P)
   - $A(1,0,2)$ et (P) : $2x+y+z+4=0$
   - $A(3,2,1)$ et (P) : $-x+5y-4z=5$
2. Calculer la distance du point $A(1,2,3)$ à la droite (D) : $\begin{cases} -2x+y-3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$

Exercice 5 :

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. Soient les points $A(-1,1,0), B(2,0,1)$ et la droite D définie par l'intersection des 2 plans d'équation :

$$\begin{cases} x-y+z+3=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}.$$

1. **Sans paramétrer la droite,** déterminer un vecteur directeur de la droite D.
2. Déterminer un plan P passant par A et B et parallèle à la droite D.

Exercice 6 :

Soient (D_1) et (D_2) deux droites d'équations respectives :

$$(D_1) : \begin{cases} x + y = 2 \\ y - 2z = 3 \end{cases} \quad et \quad (D_2) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = a \end{cases}.$$

1. (D_1) et (D_2) sont-elles parallèles ?

2. Déterminer la valeur de a pour laquelle ces deux droites s'intersectent en un point dont vous donnerez les coordonnées.

Exercice 7 :

Soient trois droites *D, F, G* dont les équations paramétriques sont données ci-dessous :

$$D : \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \ ; \\ z = 1 \end{cases} \qquad F : \begin{cases} x = -1 \\ y = 7 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}; \\ z = 3 - s \end{cases} \qquad G : \begin{cases} x = r \\ y = 4, \quad r \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 2r \end{cases}$$

1. Trouvez un point A de D, un point B de F et un point C de G tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 8 :

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite $D_\lambda : (1 - \lambda^2)\, x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.

Montrer qu'il existe un point M_0 équidistant de toutes les droites D_λ.

Exercice 9 :

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère (D_m) la droite d'équation $(2m - 1)x + (m + 1)y - 4m - 1 = 0$.

1. Montrer que les droites (D_m) sont concourantes en un point A que l'on précisera.
2. Expliciter la pente et l'ordonnée à l'origine des droites (Dm). Toute droite passant par A est-elle une droite (D_m) ?

III. Cercles et coniques

1. Cercle

Définition : Soit Ω un point de E (plan), R un nombre réel strictement positif. Le cercle (du plan) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de E tels que $\|\overrightarrow{\Omega M}\| = R$.

Equation cartésienne : On note C le cercle, (a, b) les coordonnées de Ω dans un repère **orthonormé** de E et (x, y) celle de M.

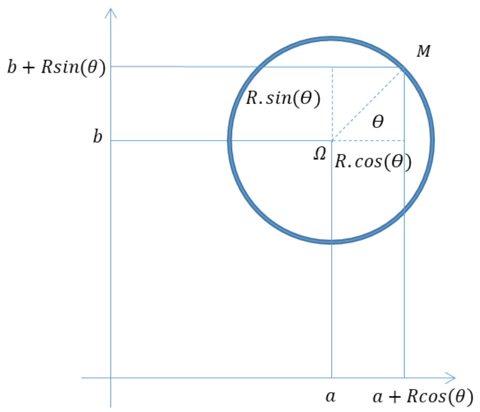
$$\forall M \in E, \quad M \in C \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Un cercle a donc une équation dans un repère **orthonormé** du plan de la forme : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (où $c = a^2 + b^2 - R^2$).

Réciproquement, toute partie du plan ayant pour équation dans un repère orthonormé $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est :

- si $c < a^2 + b^2$; un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$;
- si $c = a^2 + b^2$; un point ;
- si $c > a^2 + b^2$; l'ensemble vide.

Equation paramétrique :



On peut également paramétrer le cercle :

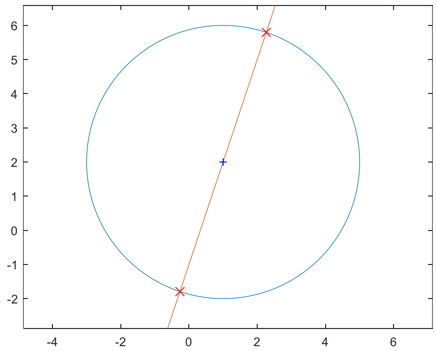
$$\forall M \in E, \quad M \in C \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[, \begin{cases} \dfrac{x-a}{R} = \cos\theta \\ \dfrac{y-b}{R} = \sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[, \begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$$

Exemple : Calculer intersection du cercle de centre (1,2) et de rayon 4 avec la droite de vecteur directeur (1,3) et d'ordonnée à l'origine -1.



L'équation cartésienne du cercle est :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16.$$

L'équation cartésienne de la droite est :

$$y = -1 + 3x.$$

On injecte cette expression dans l'équation du cercle. Il vient :

$$(x-1)^2 + (3x-3)^2 = 16.$$

Ou encore :

$$10(x-1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{8}{5}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{5}}\right)^2 = 0$$

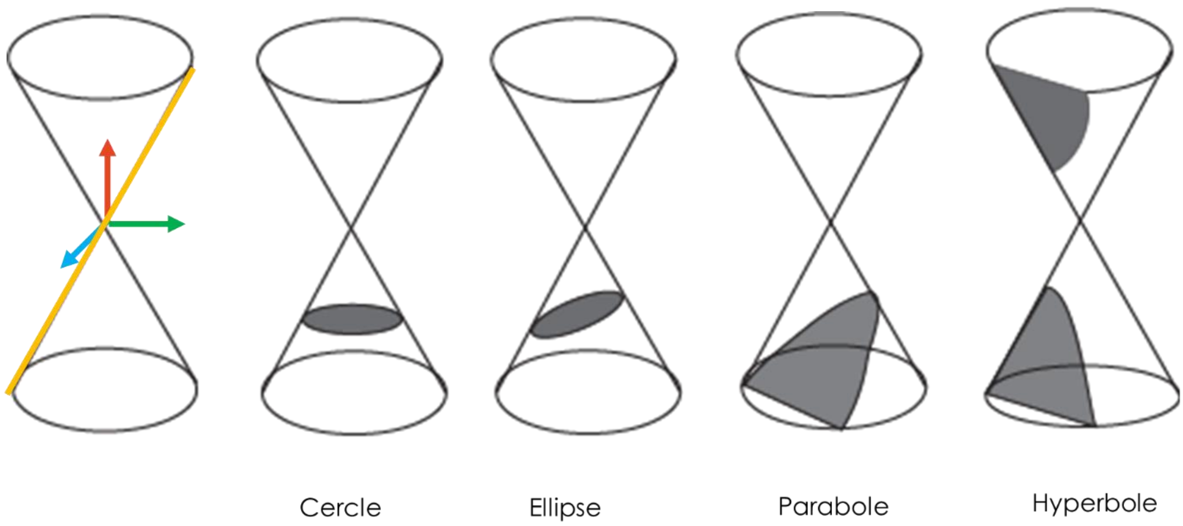
$$\Leftrightarrow \left(x - 1 - \sqrt{\frac{8}{5}}\right)\left(x - 1 + \sqrt{\frac{8}{5}}\right) = 0$$

Donc $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{8}{5}}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{\frac{8}{5}}$.

En utilisant l'équation de la droite, il vient que $y_1 = 2 + 3\sqrt{\frac{8}{5}}$ et $y_2 = 2 - 3\sqrt{\frac{8}{5}}$.

2. Coniques

Une conique est une courbe plane obtenue en coupant un cône de révolution par un plan. On appelle coniques propres les cercles, ellipses, paraboles et hyperboles obtenus. Sauf mention du contraire, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

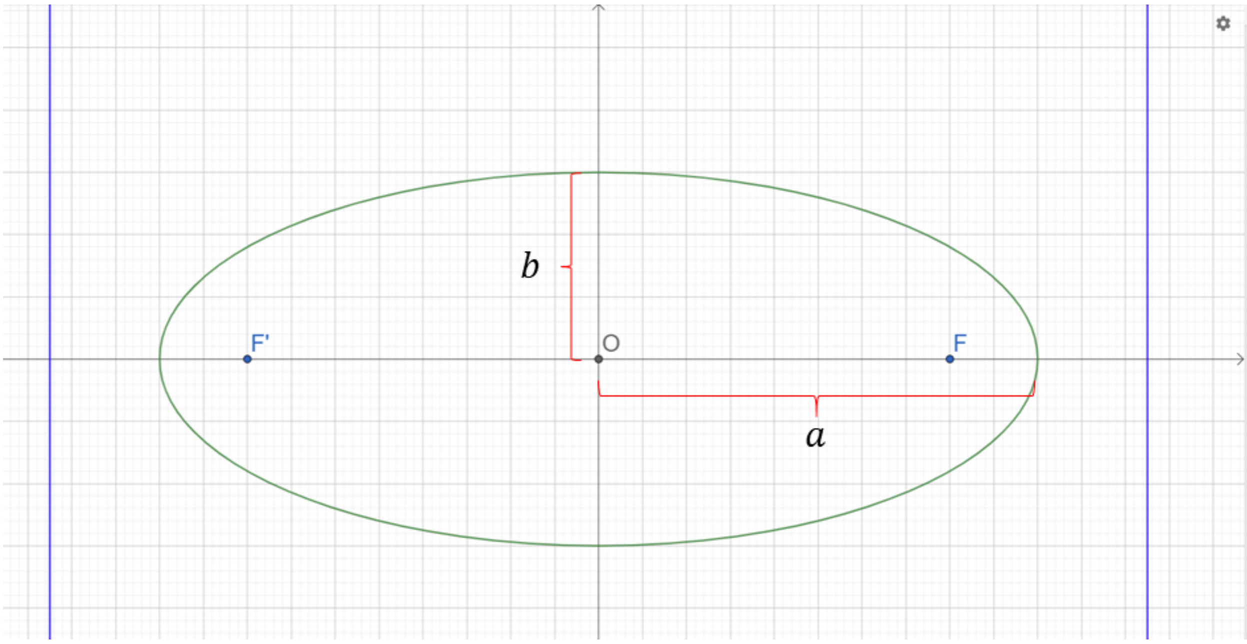


Le cône de révolution est obtenu par révolution/rotation d'une droite (représentée ci-dessus en jaune) autour d'un axe (ici l'axe rouge).

a. Ellipses

Soit $a > 0$ et $b > 0$.
Soit la (C) courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Si $a = b$ alors (C) est un cercle.
- Si $a \neq b$ alors (C) est une ellipse de sommets $A(a, 0), A'(-a, 0), B(0, b)$ et $B'(0, -b)$ de centre O.



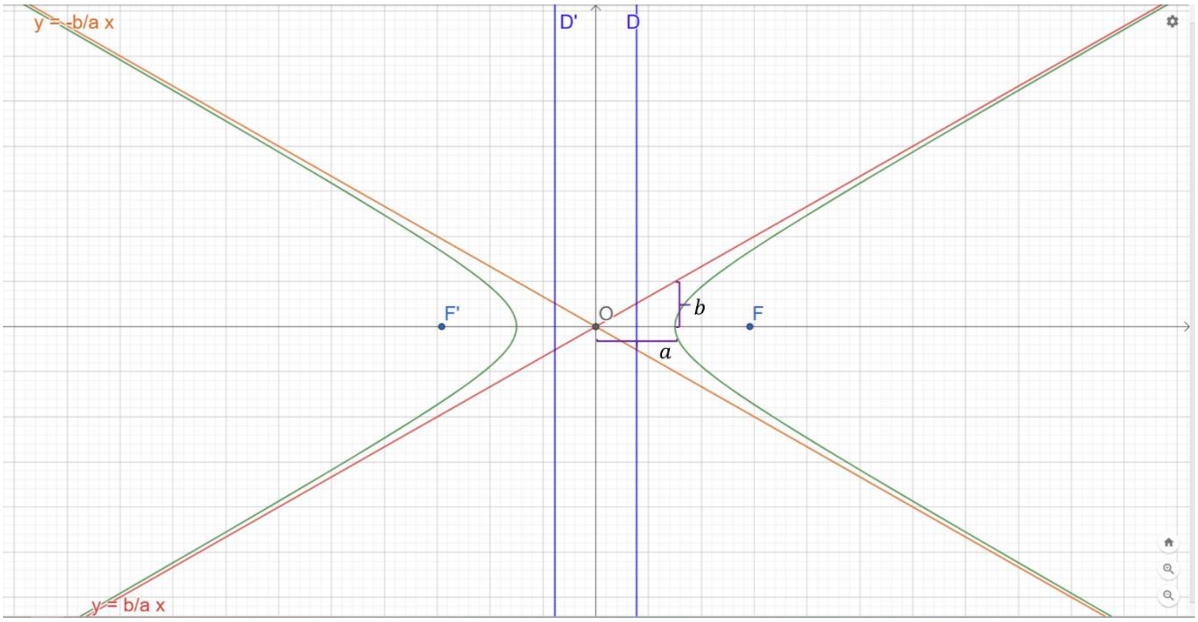
Terminologie :

- Axe focal : ici (Ox).
- Foyers de l'ellipse : $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ avec c = $\sqrt{a^2 - b^2}$.
- Excentricité $e = \frac{c}{a}$.
- Directrices $x = \pm \frac{a^2}{c}$
- Si $a > b$, a est souvent appelé le « demi grand axe » et b le « demi petit axe ».

b. Hyperboles

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Les courbes d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ sont des hyperboles de centre 0, respectivement d'axe focal (Ox) et (Oy).

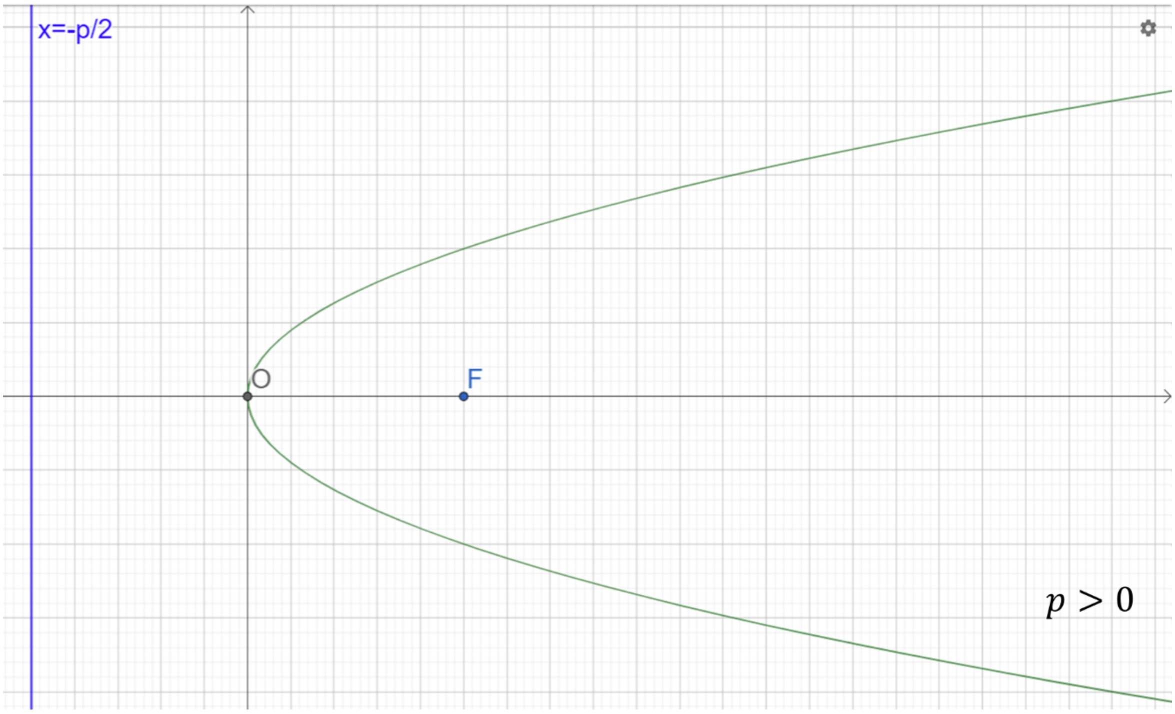


Terminologie :

- Asymptotes $y = \pm \frac{b}{a} x$
- Foyers de l'ellipse : $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ avec c = $\sqrt{a^2 + b^2}$.
- Excentricité $e = \frac{c}{a}$.
- Directrices $x = \pm \frac{a^2}{c}$

c. Paraboles

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe d'équation $y^2 = 2px$ est la parabole de foyer $F\ (\frac{p}{2}, 0)$ et de directrice d'équation $x = -\frac{p}{2}$. $|p|$ est le paramètre de la parabole et O est le sommet de la parabole.



d. Equation générale d'une conique

Nous avons vu des équations de coniques dans des repères prédéfinis, les axes du repère coïncidant avec les axes des coniques. En toute généralité, on ne peut faire cette hypothèse mais il existe une équation cartésienne générale des coniques.

Définition : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on appelle conique tout ensemble de point $M(x, y)$ vérifiant une égalité de la forme :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

où A, B, C, D, E, F sont des constantes réelles telles que A, B et C sont non tous nuls.

Remarque : Si A, B et C étaient tous nul, l'équation des coniques revient à une équation de droite.

e. Réduction des coniques

Supposons donnée une équation de conique définie comme précédemment, celle-ci peut être obtenue par ajustement *(fiiting)* de points de données, éventuellement issues d'un capteur ou d'un appareil de mesure. Nous y reviendrons ultérieurement. Il faut être capable de la simplifier pour identifier si cette équation décrit une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Pour cela, **on va chercher un repère orthonormé dans lequel l'équation de la conique sera la plus simple possible**, autrement dit aussi simple que les équations réduites présentées dans les paragraphes a, b et c.

Premièrement, trouver un bon repère revient à trouver un repère dans lequel les termes en xy disparaissent. En effet, on note qu'il n'y a pas de termes croisés dans les équations réduites des paragraphes précédent.

On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$. Si $\Phi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors on peut montrer aisément que :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \Phi^T M \Phi$$

Nous allons voir qu'annuler les termes en xy revient à diagonaliser la matrice M. Elle est diagonalisable dans une base orthonormée car symétrique et réelle ! (théorème spectral) Cette base est la base des vecteurs propres de M.

$$M = PDP^T$$

où $P = (\vec{u}, \vec{v})$ contient les vecteurs propres de M et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale avec sur la diagonale les valeurs propres triées par ordre croissant.

On a alors

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 &= \Phi^T PD\, P^T \Phi \\ &= (P^T\Phi)^T D P^T \Phi \end{aligned}$$

On définit alors $\Psi = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T\Phi$ les coordonnées du point dans le nouveau repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On a alors :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \Psi^T D \Psi = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

Dans les équations réduites, on a vu que les signes des coefficients devant les termes en x et y caractérisait le type de conique. Si l'un des deux est nuls, on a une parabole. S'ils sont de même signe, on a une ellipse. Sinon, on a une hyperbole. On peut donc caractériser aussi ici à partir des valeurs propres le type de conique auquel on a affaire.

Si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ alors la conique est une parabole.

Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ alors la conique est une ellipse.

Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ alors la conique est une hyperbole.

Or, $\lambda_1\lambda_2 = det(M) = AC - B^2$. Donc avant même de diagonaliser, on peut déterminer le type de conique.

Si $AC - B^2 = 0$ alors la conique est une parabole.

Si $AC - B^2 > 0$ alors la conique est une ellipse.

Si $AC - B^2 < 0$ alors la conique est une hyperbole.

On suppose que diagonaliser une matrice 2×2 est acquis. On en reverra un exemple par la suite.

A ce stade, on peut réécrire la conique comme suit :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + (D\ E).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + (D\ E).P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0$$

On cherche maintenant à factoriser cette expression comme la somme de carrés parfaits. On mettra alors en évidence les paramètres de la conique mais aussi leur origine. Nous allons voir ceci à travers un exemple.

Exemple : Réduire l'équation de conique suivante :

$$13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0.$$

On pose la matrice $M = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}$.

Son déterminant vaut $det(M) = 13 \times 37 - (-16)^2 = 225 > 0$. On va donc mettre en évidence une équation d'ellipse.

Il y a un terme en xy qu'on va chercher à éliminer en se déplaçant dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ approprié. Pour cela, on diagonalise M dans une base orthonormée (directe) de vecteurs propres. Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} det(M - \lambda\, I_2) &= \begin{vmatrix} 13-\lambda & -16 \\ -16 & 37-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (13-\lambda)(37-\lambda) - (-16)^2 \\ &= 481 - 13\lambda - 37\lambda + \lambda^2 - 256 \\ &= \lambda^2 - 50\lambda + 225 \end{aligned}$$

On résout cette équation du second degré en λ.

$$\Delta = (-50)^2 - 4 \times 225 = 2500 - 900 = 1600 = 40^2$$

D'où $\lambda_1 = \frac{50-40}{2} = 5$ et $\lambda_2 = \frac{50+40}{2} = 45$.

Donc $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$. Cherchons maintenant les vecteurs propres associés.

On cherche donc un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ tel que $M\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}$. En faisant le produit matrice vecteur, il vient :

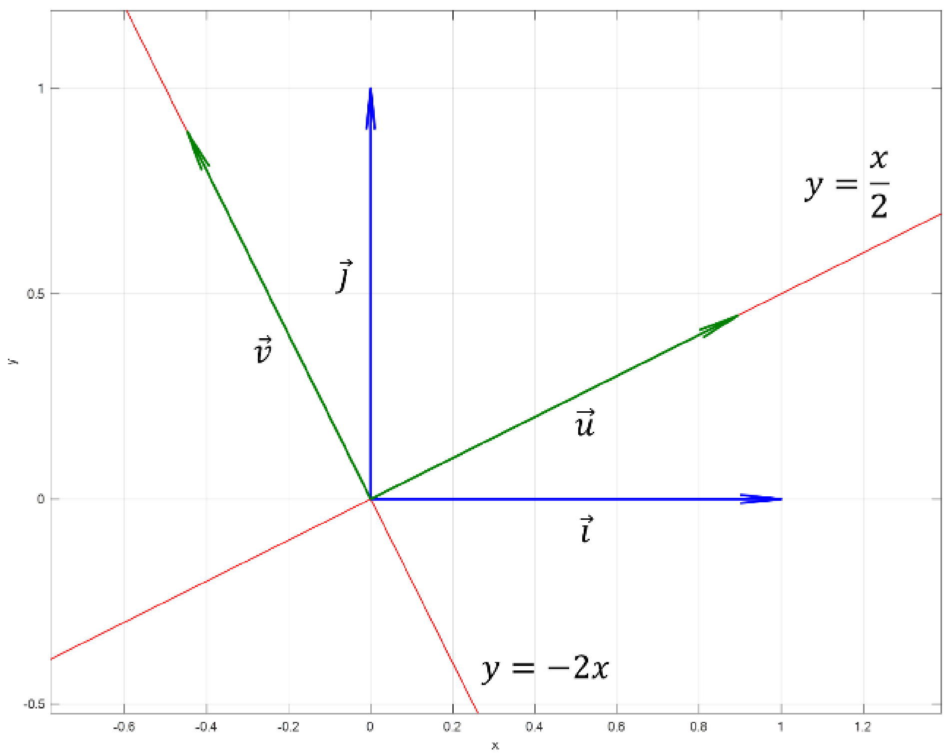
$$\begin{cases} 13u_1 - 16u_2 = 5u_1 \\ -16u_1 + 37u_2 = 5u_2 \end{cases}$$

Les deux équations sont redondantes et on obtient $u_1 = 2u_2$. En particulier, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_1. Il n'est pas normé. Donc finalement, on choisit $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

On effectue de même pour la seconde valeur propre. Et on obtient le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. On note qu'on a choisi le signe de $\vec{v}$ de sorte que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base directe.

On définit la matrice $P = (\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ la matrice contenant les vecteurs propres de M et qui permet de passer de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$ via les formules :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



A ce stade, on peut réécrire temporairement l'équation de la conique avec deux systèmes de coordonnées :

$$5x'^2 + 45y^2 - 2x + 14y - 5 = 0.$$

Par la formule du changement de repère, on a $x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\ y'$ et $y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\ y'$.

Il vient donc :

$$5x'^2 + 45y^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\ y' + \frac{14}{\sqrt{5}}x' + \frac{28}{\sqrt{5}}\ y' - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x'^2 + 45y'^2 + \frac{10}{\sqrt{5}}x' + \frac{30}{\sqrt{5}}\ y' = 5$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}x' + 9y'^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}\ y' = 1$$

On fait alors apparaître des carrés parfaits.

$$\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y\ + \frac{1}{3\sqrt{5}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y\ + \frac{1}{3\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{7}{5}.$$

Notons que le centre de l'ellipse Ω a pour coordonnées $(x_0', y_0') = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{3\sqrt{5}}\right)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}} x_0' - \frac{1}{\sqrt{5}}\, y_0' = -\frac{1}{3}$$

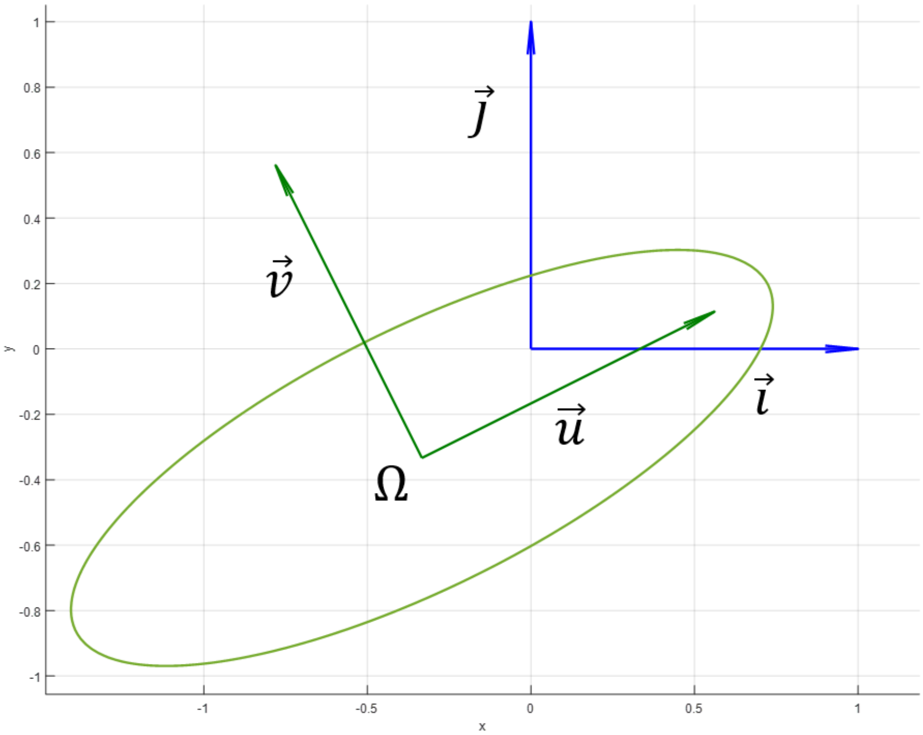
$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} x_0' + \frac{2}{\sqrt{5}}\, y_0' = -\frac{1}{3}$$

Finalement, dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

$$\frac{X^2}{\frac{7}{5}} + \frac{Y^2}{\frac{7}{45}} = 1$$

Et la formule de passage du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ au repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}.$$



3. Exercices

Exercice 1 :

Soit C la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

1. Quel objet reconnait-on dans cette courbe ?
2. Déterminer l'intersection de C et du cercle de centre (1,0) et de rayon 2.

Exercice 2 :

Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives

$$y = 2x + 1$$
$$y = 2x + 7$$
$$y = -\frac{1}{2}x$$

Exercice 3 :

Soient A et B deux points distincts du plan, I le milieu de $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MI^2 = MA \times MB$.

Conseil : raisonner dans le repère suivant : I origine, $A(1,0)$ et $B(-1,0)$.

Exercice 3 :

Soient 2 objets géométriques d'équations respectives :

$$S_1 : \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{y}^2 = 80$$

$$S_2 : \mathrm{x}^2 = 4\mathrm{y}$$

1. Déterminer la nature et les paramètres associés de S_1 et S_2. Tracer à main levée l'allure de ces courbes.
2. Déterminer l'intersection de S_1 et S_2.

Exercice 4 :

Trouver les points intersection de (P) : $3y = 3x^2 - 11x + 13$ avec $(H) : y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Exercice 5 :

Déterminer la nature et l'équation réduite dans un repère adapté des coniques d'équation :

$$x^2 - 6xy + y^2 + 10x + 2y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + xy - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$2x^2 + y + 12x + 16 = 0$$

IV. Sphères et quadriques

1. Sphère

Définition : Soit Ω un point de E (espace), R un nombre réel strictement positif. La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de E tels que $\|\overrightarrow{\Omega M}\| = R$.

Equation cartésienne : On note S la sphère, (a, b, c) les coordonnées de Ω dans un repère **orthonormé** de E et (x, y, z) celles de M.

$$\forall\, M \in E, \quad M \in S \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Un cercle a donc une équation dans un repère **orthonormé** du plan de la forme : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (où $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$).

Réciproquement, toute partie du plan ayant pour équation dans un repère orthonormé $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ est :

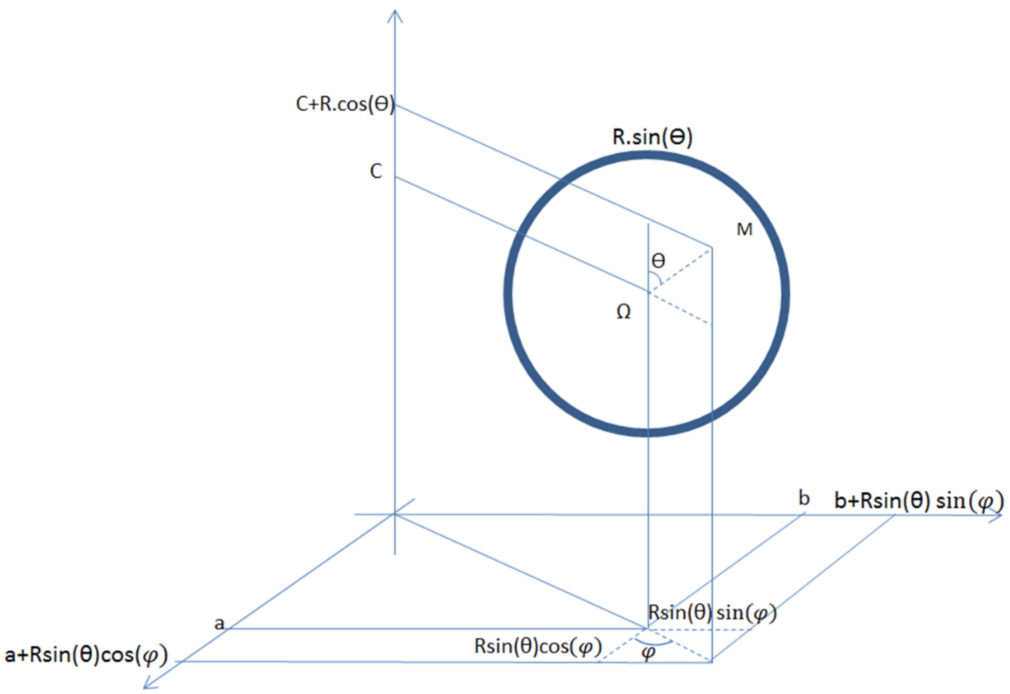
- si $d < a^2 + b^2 + c^2$; une sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$;
- si $d = a^2 + b^2 + c^2$; un point ;
- si $d > a^2 + b^2 + c^2$; l'ensemble vide.

Equation paramétrique :

On peut également paramétrer la sphère :

$$\forall\, M \in E, \quad M \in S \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

$$\iff \exists\, \rho \in [0, +\infty[, \quad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2 \\ (z-c)^2 + \rho^2 = R^2 \end{cases}$$



En appliquant deux fois ce qui a été fait au chapitre précédent pour le paramétrage d'un cercle :

$$\exists\, \rho \in [0,+\infty[, \qquad \exists\, \theta \in [0,\pi[, \qquad \exists\, \varphi \in [0,2\pi[\; ; \; \begin{cases} x = a + \rho cos\varphi \\ y = b + \rho sin\varphi \\ z = c + Rcos\theta \\ \rho = Rsin\theta \end{cases}$$

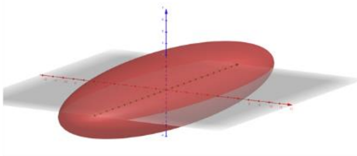
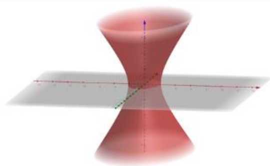
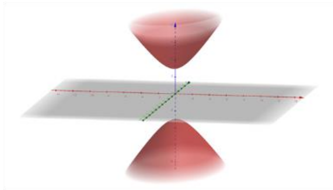
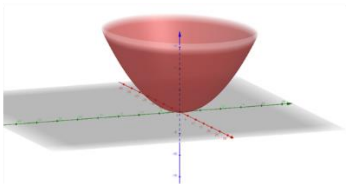
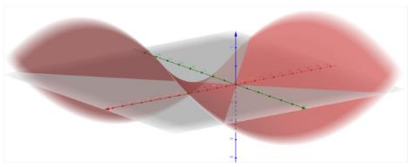
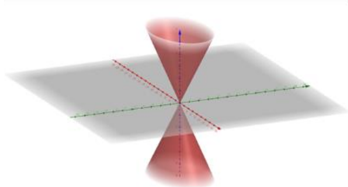
$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \theta \in [0,\pi[, \qquad \exists\, \varphi \in [0,2\pi[\; ; \; \begin{cases} x = a + Rsin\theta cos\varphi \\ y = b + Rsin\theta sin\varphi \\ z = c + Rcos\theta \end{cases}$$

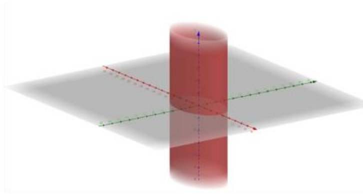
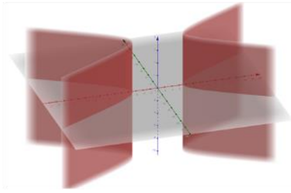
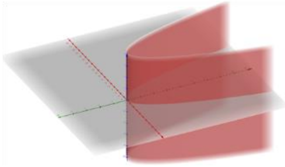
<u>Remarque :</u> ça ressemble quand même drôlement aux coordonnées sphériques non ?

2. Quadriques

a. Equations réduites des quadriques

Nous listons ci-après les quadriques et leurs équations réduites.

Ellipsoïde	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$	
Hyperboloïde à une nappe	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$	
Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$	
Paraboloïde elliptique	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	
Paraboloïde hyperbolique	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$	
Cône à base elliptique	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	

Cylindre elliptique	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	
Cylindre hyperbolique	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	
Cylindre parabolique	$x^2=2py$	

b. Equations générale des quadriques et réduction

A l'instar des coniques, nous avons vu des équations de quadriques dans des repères prédéfinis, les axes du repère coïncidant avec les axes des quadriques. En toute généralité, on ne peut faire cette hypothèse mais il existe une équation cartésienne générale des quadriques.

Définition : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on appelle quadrique tout ensemble de point $M(x, y, z)$ vérifiant une égalité de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Comme pour les quadriques, nous allons étudier la réduction de cette équation générale. Du fait de la nature très calculatoire de cet exercice, nous le verrons de manière partielle.

La forme quadratique dans l'équation générale des quadriques :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

peut se réécrire à l'aide d'une matrice notée M :

$$M = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas des coniques, la matrice M aide à définir la nature de la quadrique ; cependant ici seulement de manière partielle. Elle est symétrique, réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral). Donc, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que :

$$M = PDP^T \qquad \text{où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Le signe des λ_i va donner des indications sur la quadrique. Par exemple, on remarque dans l'équation réduite d'une ellipsoïde dans le paragraphe précédent que les coefficients devant x^2, y^2 et z^2 sont tous positifs. Donc si tous les λ_i sont strictement positives, alors la quadrique est une ellipsoïde ! De même si elles sont toutes négatives car on pourra in fine multiplier toute l'équation par -1. Par extension de ce raisonnement, on obtient le tableau suivant :

Nombre de v.p. > 0	**Nombre de v.p.< 0**	**Nombre de v.p. = 0**	**Type de quadrique**
3	0	0	Ellipsoïde
0	3	0	Ellipsoïde
0	0	3	Pas une quadrique, c'est un plan
2	1	0	Hyperboloïde à une ou 2 nappes ; cône à base elliptique
1	2	0	Hyperboloïde à une ou 2 nappes ; cône à base elliptique
2	0	1	Cylindre elliptique ; paraboloïde elliptique
1	0	2	Cylindre parabolique
0	2	1	Cylindre elliptique ; paraboloïde elliptique
0	1	2	Cylindre parabolique
1	1	1	Paraboloïde hyperbolique

<u>Exemple :</u> Déterminer la nature de la quadrique d'équation générale :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0.$$

La matrice associée à la forme quadratique de cette quadrique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisons celle-ci.

$$\det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda) - 1] - (2-\lambda)$$

$$= (\lambda-2)[1 - (2-\lambda)(1-\lambda) + 1]$$

$$= (\lambda-2)(2 - (2 - 3\lambda + \lambda^2)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda)$$

$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Les 3 valeurs propres sont 0, 2 et 3. Nous avons donc deux valeurs propres strictement positives et une nulle. Par lecture du tableau précédent, cette quadrique est un cylindre elliptique ou un paraboloïde elliptique.

Une réduction complète de cette quadrique est possible en suivant le même mode opératoire que pour les coniques. Cependant, nous ne décrivons pas dans ce document le processus dans son intégralité.

3. Exercices

Exercice 1 :

Trouver la sphère passant par les cercles définis par $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$

Exercice 2 :

Soient deux ensembles de points dans l'espace muni d'un repère orthonormé direction :

$$A_1 : 2x + y = 0 \qquad et \qquad A_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 39 = 0$$

1. Quelle est la nature de A_1 et de A_2 ?
2. Démontrer que l'intersection de A_1 et A_2 est un cercle dont on donnera les coordonnées du centre dans le repère initial et le rayon.

Exercice 3 :

Soit A, B et C trois points de l'espace. Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Exercice 4 :

Soient la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et le cylindre à base circulaire d'équation $x^2 + y^2 = Rx$. L'intersection de ces 2 surfaces est une courbe appelée fenêtre de Viviani. Dans cet exercice, on supposera $R = 1$.

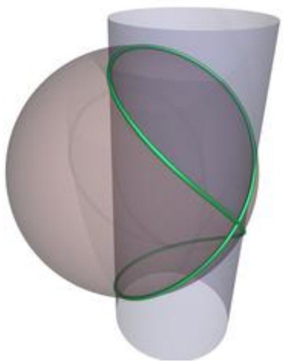
L'objectif de cet exercice est d'obtenir une représentation paramétrée de la fenêtre de Viviani.

1. Déterminer le rayon du cylindre. Déterminer son axe directeur (le centre de la base circulaire et un vecteur). Cette question est indépendante du reste de l'exercice.

2. Justifier que l'équation :

$$\begin{cases} x = \cos\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\cos\varphi \\ z = \sin\ \varphi \end{cases}, \qquad -\pi < \theta < \pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

est une équation paramétrée de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



3. En injectant l'équation paramétrée de sphère dans l'équation du cylindre, démontrer que $\cos\theta = \cos\varphi$.
4. En déduire une équation paramétrée en θ de la fenêtre de Viviani.

Exercice 5 :

Soit (C) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 7 = 0$

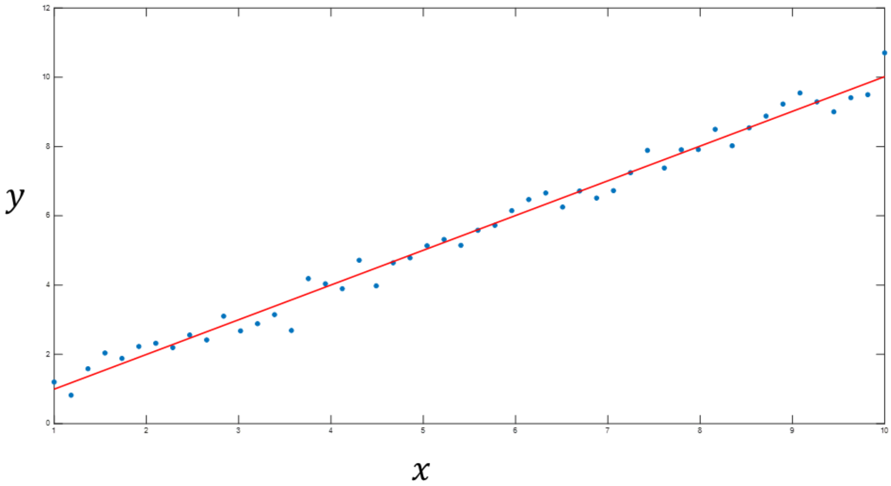
1. Déterminer la nature de (C).
2. Soit (D) d'équation : $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Démontrer que (D) est une droite.

3. Déterminer $D \cap C$.

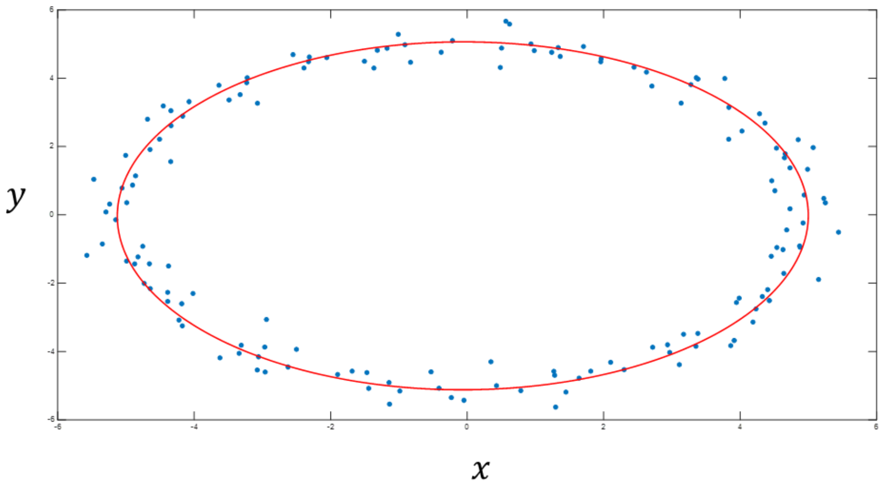
V. Régression par un objet géométrique

1. Motivation

Dans la grande majorité des domaines scientifiques, ingénierie ou sciences fondamentales, on est amené à observer des données et la tentation est souvent forte d'interpréter le comportement de ces données avec un objet géométrique simple. L'exemple le plus simple est celui de la régression linéaire où on approche des données par une droite.



On peut évidemment envisager des objets plus complexes comme des ellipses… des coniques, des quadriques, des sphères ! Et bien d'autres encore ! (des polynômes, des splines, des fonctions gaussiennes…)

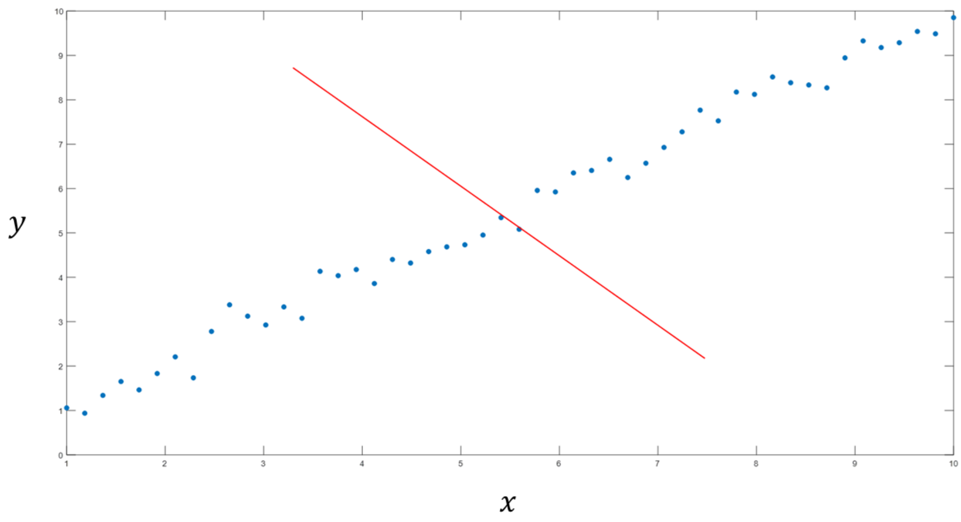


Dans la « vraie vie », ce type de régression est très utile et je suis certain que vous êtes nombreux à les utiliser, peut-être sans le savoir… Un exemple concret de planification de pose de prothèse de hanche vous est proposé dans une capsule vidéo. Je vous conseille de la consulter avant de se lancer dans la théorie !

2. Régression linéaire dans le plan

Supposons connus n points du plan muni d'un repère orthonormé direct $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n$. Ces données (quand c'est pertinent) peuvent être approchées par une droite d'équation $y =$

$ax + b$. Nous avons donc deux inconnus. Deux points seraient théoriquement suffisant pour trouver a et b. Cela impliquerait que la droite interpolerait (passerait par) ces deux points. C'est bien sûr une très mauvaise stratégie comme illustré ci-dessous.



Il faut bien sûr tenir compte de tous les points. Dans un monde idéal, on voudrait donc trouver une droite d'équation $y = ax + b$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad y_i = ax_i + b.$$

Malheureusement, c'est impossible. Sauf si c'est fait exprès, mais ça n'a que peu d'intérêt. En pratique, les données sont très souvent bruitées et ne suivent pas strictement une droite. Nous allons donc revoir nos ambitions à la baisse et faire en sorte que les erreurs :

$$\varepsilon_i = |y_i - (ax_i + b)|$$

soient les plus petites possibles. Pour cela, on peut très classiquement choisir de minimiser la norme euclidienne du vecteur $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$. Autrement dit, notre problème revient au problème d'optimisation :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2}.$$

On parle de problème de moindres carrés. Dans la pratique, on s'épargne la racine carrée qui ne change rien à la solution du problème. Donc, notre problème est le suivant :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 .$$

Nous allons réécrire ce problème de manière matricielle. Pour cela, on remarque que :

$$\begin{pmatrix} ax_1 + b \\ ax_2 + b \\ \vdots \\ ax_n + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On pose alors $\vec{u} = \binom{a}{b}$, $Q = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Notre problème s'écrit donc :

$$\min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^2} \|Q\vec{u} - \vec{y}\|.$$

Ce type de problème est en fait très facile à résoudre en pratique et ce, grâce au théorème suivant.

Théorème : Un vecteur $\overrightarrow{u^*}$ est solution du problème :

$$\min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^2} \|Q\vec{u} - \vec{y}\|$$

si et seulement si $\overrightarrow{u^*}$ est solution du problème :

$$Q^T Q\, \vec{u} = Q^T \vec{y}.$$

Preuve : On doit démontrer une équivalence. On doit donc démontrer que l'un implique l'autre et réciproquement. Commençons par la réciproque (un peu plus facile…)

$\Leftarrow$) Soit $\overrightarrow{u^*} \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q^T Q\, \overrightarrow{u^*} = Q^T \vec{y}$. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ un autre vecteur :

$$\begin{aligned}
\|Q\vec{u} - \vec{y}\|^2 &= (Q\vec{u} - \vec{y}, Q\vec{u} - \vec{y}) \qquad \text{(carré scalaire)} \\
&= \left(Q\vec{u} - \vec{y} + Q\overrightarrow{u^*} - Q\overrightarrow{u^*}, Q\vec{u} - \vec{y} + Q\overrightarrow{u^*} - Q\overrightarrow{u^*}\right) \\
&= \left(Q\left(\vec{u} - \overrightarrow{u^*}\right) + Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}, Q\left(\vec{u} - \overrightarrow{u^*}\right) + Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right) \\
&= \left\|Q(\vec{u} - \overrightarrow{u^*})\right\|^2 + \left\|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right\|^2 + 2\left(Q\left(\vec{u} - \overrightarrow{u^*}\right), Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right)
\end{aligned}$$

On utilise maintenant une propriété du produit scalaire que nous n'avions pas encore vu :

$$\left(Q\left(\vec{u} - \overrightarrow{u^*}\right), Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right) = \left(\vec{u} - \overrightarrow{u^*}, Q^T\left(Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right)\right)$$

On peut en effet « passer » la matrice dans le second membre du produit scalaire mais il faut alors la transposer. Il vient :

$$\|Q\vec{u} - \vec{y}\|^2 = \left\|Q(\vec{u} - \overrightarrow{u^*})\right\|^2 + \left\|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right\|^2 + 2\left(\vec{u} - \overrightarrow{u^*}, \underbrace{Q^T Q\overrightarrow{u^*} - Q^T\vec{y}}_{=\,0 \text{ par hypothèse}}\right)$$

$$\|Q\vec{u} - \vec{y}\|^2 = \underbrace{\left\|Q(\vec{u} - \overrightarrow{u^*})\right\|^2}_{\geq\, 0} + \left\|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right\|^2$$

Donc

$$\|Q\vec{u} - \vec{y}\| \geq \|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\|, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2.$$

Donc $\overrightarrow{u^*}$ est un vecteur qui minimise $F(\vec{u}) = \|Q\vec{u} - \vec{y}\|$.

$\Rightarrow$) Soit $\overrightarrow{u^*}$ un vecteur qui minimise $F(\vec{u}) = \|Q\vec{u} - \vec{y}\|$. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse de minimalité :

$$\left\|Q\left(\overrightarrow{u^*} + t\vec{u}\right) - \vec{y}\right\|^2 \geq \left\|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right\|^2$$

$$\left\|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y} + tQ\vec{u}\right\|^2 \geq \left\|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right\|^2$$

$$\left\|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right\|^2 + t^2\|Q\vec{u}\|^2 + 2t\left(Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}, Q\vec{u}\right) \geq \left\|Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}\right\|^2$$

$$t^2\|Q\vec{u}\|^2 + 2t\left(Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}, Q\vec{u}\right) \geq 0$$

Je veux simplifier par t mais je dois prendre quelques précautions car je travaille avec une inégalité.

<u>1er cas :</u> $t > 0$

$$t\|Q\vec{u}\|^2 + 2\left(Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}, Q\vec{u}\right) \geq 0.$$

<u>2ème cas :</u> $t < 0$

$$t\|Q\vec{u}\|^2 + 2\left(Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}, Q\vec{u}\right) \leq 0.$$

D'une part, en faisant tendre t vers 0^+, par le premier cas, on a :

$$\left(Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}, Q\vec{u}\right) \geq 0.$$

D'autre part, en faisant tendre t vers 0^-, par le second cas, on a :

$$\left(Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}, Q\vec{u}\right) \leq 0.$$

Donc :

$$\left(Q\overrightarrow{u^*} - \vec{y}, Q\vec{u}\right) = 0, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$$

$$\left(Q^TQ\overrightarrow{u^*} - Q^T\vec{y}, \vec{u}\right) = 0, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$$

On conclut donc que $Q^TQ\overrightarrow{u^*} - Q^T\vec{y} = 0$.

□

<u>Remarque 1:</u> Si Q^TQ est inversible, la solution est unique et vaut $\vec{u} = (Q^TQ)^{-1}Q^T\vec{y}$.

<u>Remarque 2:</u> Ce résultat reste vrai quel que soit la dimension du vecteur $\vec{u}$.

Exemple : Soient $A(0\ ;\ 0{,}1)$; $B(1\ ;\ 0{,}9)$; $C(2\ ;1{,}05)$ et $D(3\ ;3{,}02)$ quatre points donnés. Déterminer la droite de meilleure approximation de ces quatre points.

Avec les notations précédentes :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ;\ \vec{y} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \\ 2{,}05 \\ 3{,}02 \end{pmatrix}$$

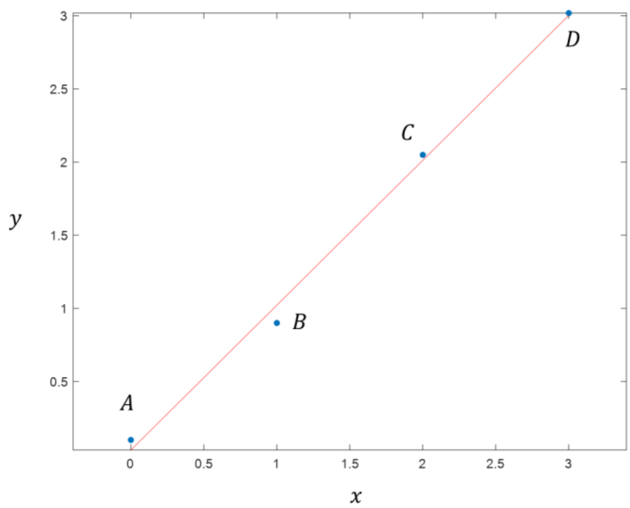
En utilisant votre logiciel de calcul scientifique préféré, on calcule :

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $14 \times 4 - 6 \times 6 \neq 0$, elle est donc inversible.

Les coefficients de la droite de régression $y = ax + b$ sont obtenus par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (Q^T Q)^{-1} Q^T \vec{y} \approx \begin{pmatrix} 0.99 \\ 0.03 \end{pmatrix}.$$



Remarque : Cette approche pour décrire la régression linéaire est purement numéricienne (i.e. liée à l'analyse numérique). Elle ne fait pas appel à des concepts statistiques tels que la covariance. Vous verrez ou peut-être avez déjà vu que ces concepts permettent une autre écriture élégante de la droite de régression.

3. Régression dans le plan par un cercle

Nous avons vu dans le cours qu'un cercle avait pour équation générale :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad avec\ c < a^2 + b^2.$$

Etant donnés (x_i, y_i) ; $i = 1, \dots, n$; n points du plan.

On souhaiterait trouver a, b et c tels que :

$$x_i^2 + y_i^2 - 2ax_i - 2by_i + c = 0 \ ; \quad i = 1, \dots, n.$$

Pour les mêmes raisons que pour la régression linéaire, cet objectif est irréalisable en générale. On va plutôt chercher une solution au problème :

$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 - 2ax_i - 2by_i + c\right)^2.$$

Ainsi on souhaite garantir que les quantités $x_i^2 + y_i^2 - 2ax_i - 2by_i + c$ soient le plus proche possible de 0 comme l'équation de cercle le requiert. Réécrivons maintenant ce problème de manière matricielle. Notons que :

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c \\ x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 2by_2 + c \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 - 2ax_n - 2by_n + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -1 \\ 2x_2 & 2y_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & -1 \\ 2x_n & 2y_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Posons :

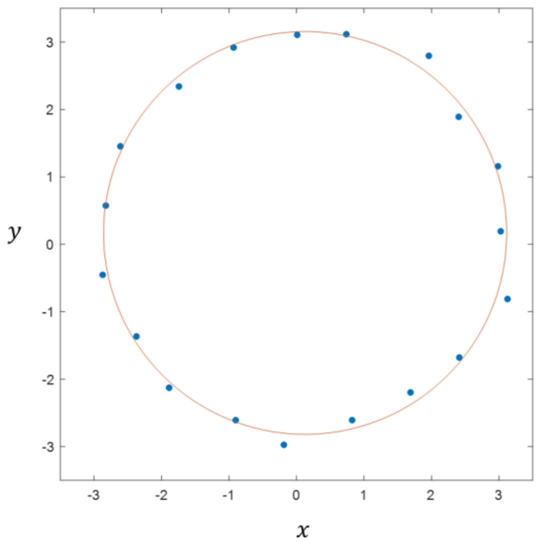
$$Q = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -1 \\ 2x_2 & 2y_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_n & 2y_n & -1 \end{pmatrix}; \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}; \ \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix}.$$

Le problème de régression par un cercle revient donc à résoudre :

$$\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^3} \|Q\vec{u} - \vec{\alpha}\|.$$

Par le théorème précédent, cela revient à résoudre le problème linéaire :

$$Q^T Q \, \vec{u} = Q^T \vec{\alpha}.$$



Cette technique est déclinable avec toutes les structures géométriques vues dans ce cours.

4. Régression dans l'espace par un plan

Un plan admet pour équation générale :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

En pratique, pour éviter la solution triviale $a = b = c = d = 0$, on divise toute l'équation par $-d$. Il vient :

$$Ax + By + Cz = 1$$

avec $A = -a/d$; $B = -b/d$ et $C = -c/d$.

Etant donnés (x_i, y_i) ; $i = 1, \dots, n$; n points du plan. On pose :

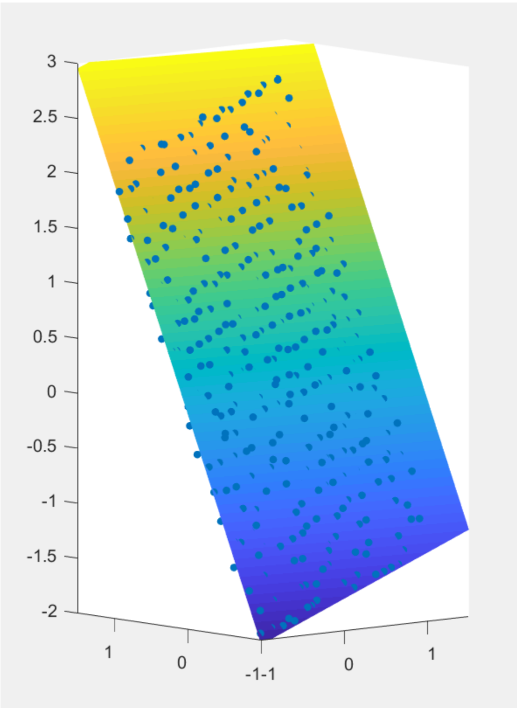
$$Q = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix} ; \; \vec{u} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} ; \; \vec{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le problème de régression par un plan revient donc à résoudre :

$$\min_{\vec{u} \in \mathbb{R}^3} \| Q\vec{u} - \vec{\mathbf{1}} \|.$$

Par le théorème précédent, cela revient à résoudre le problème linéaire :

$$Q^T Q \, \vec{u} = Q^T \vec{\mathbf{1}}.$$



L'écriture des problèmes de régression par une conique, une quadrique ou encore une sphère est extrêmement similaire aux trois exemples de ce chapitre. Nous vous le laissons à titre d'exercice !

5. Exercices

Exercice 1 :

Soient $(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, 100;$ 100 points de données dans un repère orthonormé direct.

1. Ecrire le problème matriciel d'approximation au sens des moindres carrés de ces points par une quadrique. Donner la formule de l'unique solution à ce problème.
2. La résolution numérique de ce problème a donné après arrondi :

$$x^2 - 2xy + 2xz + x + y + 1 = 0.$$

Déterminer la nature de cette quadrique et son équation réduite.

Exercice 2 :

Soient $P_1(1,-1), P_2(1,2), P_3(4,-1)$ trois points du plan. L'objectif de ce problème est de mettre en évidence le cercle circonscrit et l'ellipse circonscrite au triangle $P_1P_2P_3$.

Partie A : Cercle circonscrit

1. Démontrer que tout cercle peut s'écrire sous la forme :
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

où c est une constante que vous expliciterez.

2. On rappelle que le cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ est l'unique cercle passant par ses 3 sommets. Déterminer l'équation de ce cercle, ainsi que son centre et son rayon.

Partie B : Ellipse circonscrite de Steiner

L'ellipse circonscrite de Steiner au triangle $P_1P_2P_3$ est l'unique ellipse passant par les points P_1, P_2, P_3 et dont le centre est l'isobarycentre du triangle.

3. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre, noté G, du triangle $P_1P_2P_3$.
4. Calculer les coordonnées de P_1' et P_2' respectivement les points symétriques de P_1 et P_2 par rapport à G.
5. Démontrer que l'unique conique passant par les points $P_1, P_2, P_3, P_1', P_2'$ est solution du problème matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 9 & -12 & 4 & 3 & -2 \\ 16 & -8 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6. Par résolution numérique, on obtient que $(A, B, C, D, E)^T = (1, 0.5, 1, -4, -2)^T$. Vérifier que P_3', le symétrique de P_3 par rapport à G, appartient au graphe de cette conique.

Partie C : Réduction de conique

7. Déterminer la nature et l'équation réduite dans un repère adapté de la conique :
$$x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

VI. Références

- Exo7 http://exo7.emath.fr/
- Pas à pas en prépa, Mathématiques, MPSI, Marc Lorré, Editions Ellipses, 2004.