

Comportement de la MEF en présence de singularités

L. CHAMPANEY et Ph. TROMPETTE

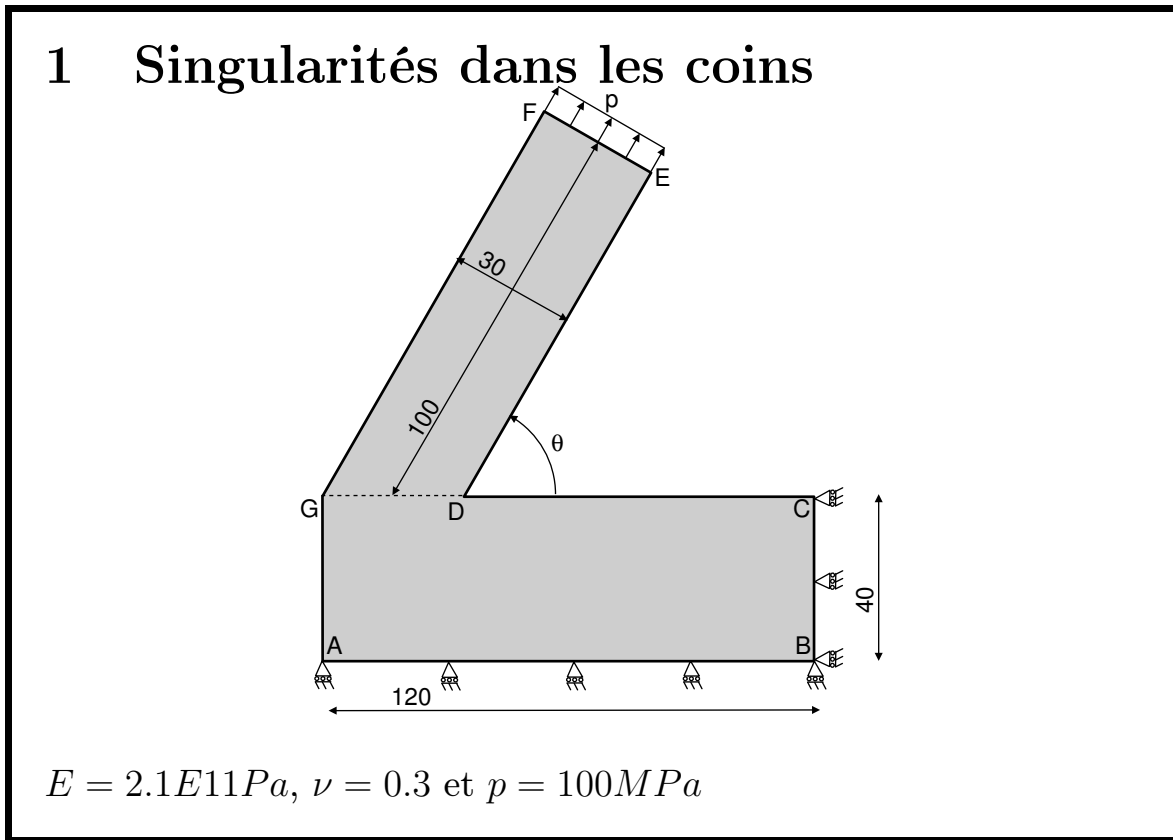
Objectifs :

- Effet des singularités,
- Coins rentrants et sortants,
- Interfaces entre deux matériaux,
- Comparaison de solutions.

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement de la méthode des éléments finis dans les zones où une structure présente des singularités. Nous étudions le cas des coins rentrants en comparant les contraintes dans un coin rentrant et un coin sortant.

Table des matières

1	Singularités dans les coins	2
1.1	Maillages utilisés	3
1.2	Déformée	4
1.3	Contrainte	5
1.4	Contraintes près des coins	6
1.5	Influence de l'angle	9
2	Singularités dans un bi-matériau	10
2.1	Problème : bilame	10
2.2	Déformée	11
2.3	Contraintes	12
3	Conclusions	13



Pour cette étude, nous considérons le problème imaginaire présenté sur la figure ci-dessus. La structure présente deux coins particuliers D et G qui sont chargés :

- En D il y a un coin rentrant caractérisé par un angle θ .
- En G il y a un coin sortant caractérisé par un angle $(370 - \theta)$.

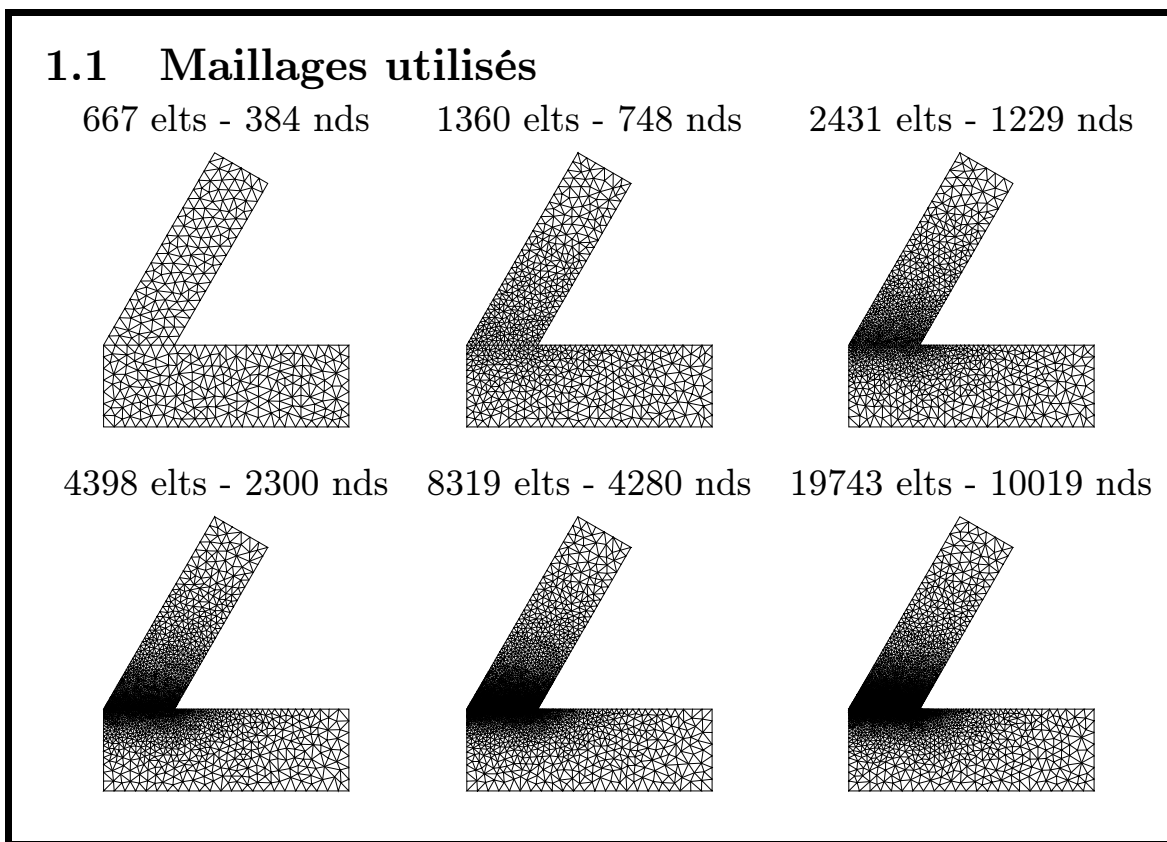
La solution analytique [1] prédit une singularité dans un coin dès lors que l'angle d'ouverture est inférieur à 180° . Nous devons donc observer une singularité en D mais pas en G .

Dans ce type de problème, la singularité s'exprime de la manière suivante : l'état de contrainte dans le matériau près du coin à la forme :

$$\sigma = K \frac{1}{r^\alpha}$$

où r est la distance au point de singularité, K (*facteur d'intensité des contraintes*) et α sont des paramètres qui dépendent du problème. Par exemple, dans le cas d'une fissure ($\theta = 0$), α vaut 0.5.

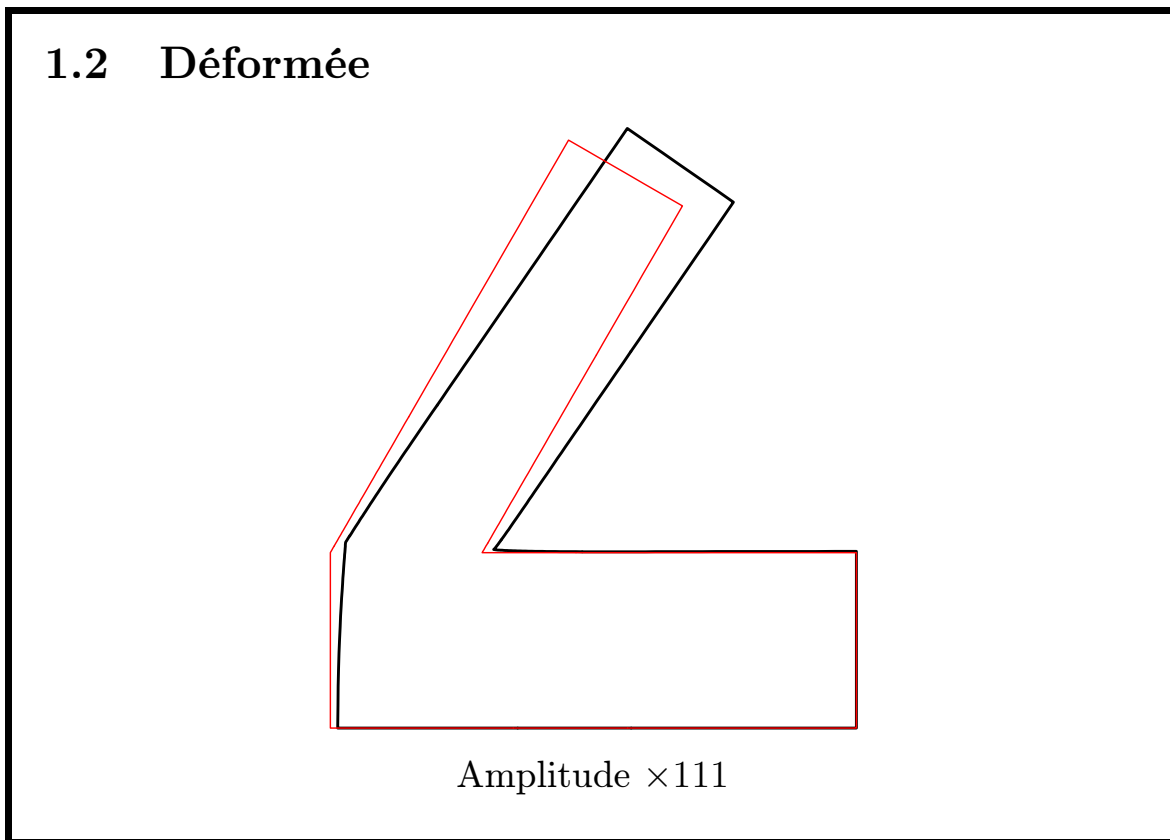
C'est-à-dire que la contrainte est infinie au point de singularité. Dans la pratique, obtenir les contraintes au point de singularité n'a pas de sens (puisqu'elles sont infinies), c'est plutôt le coefficient K qui est recherché par des techniques adaptées dont nous ne parlons pas ici.



Pour étudier comment la méthode des éléments finis converge dans une telle situation, nous enseigeons sept maillages différents (dont les six premiers sont représenté ci-dessus). Ces maillages sont de plus en plus raffinés près des coins D et G .

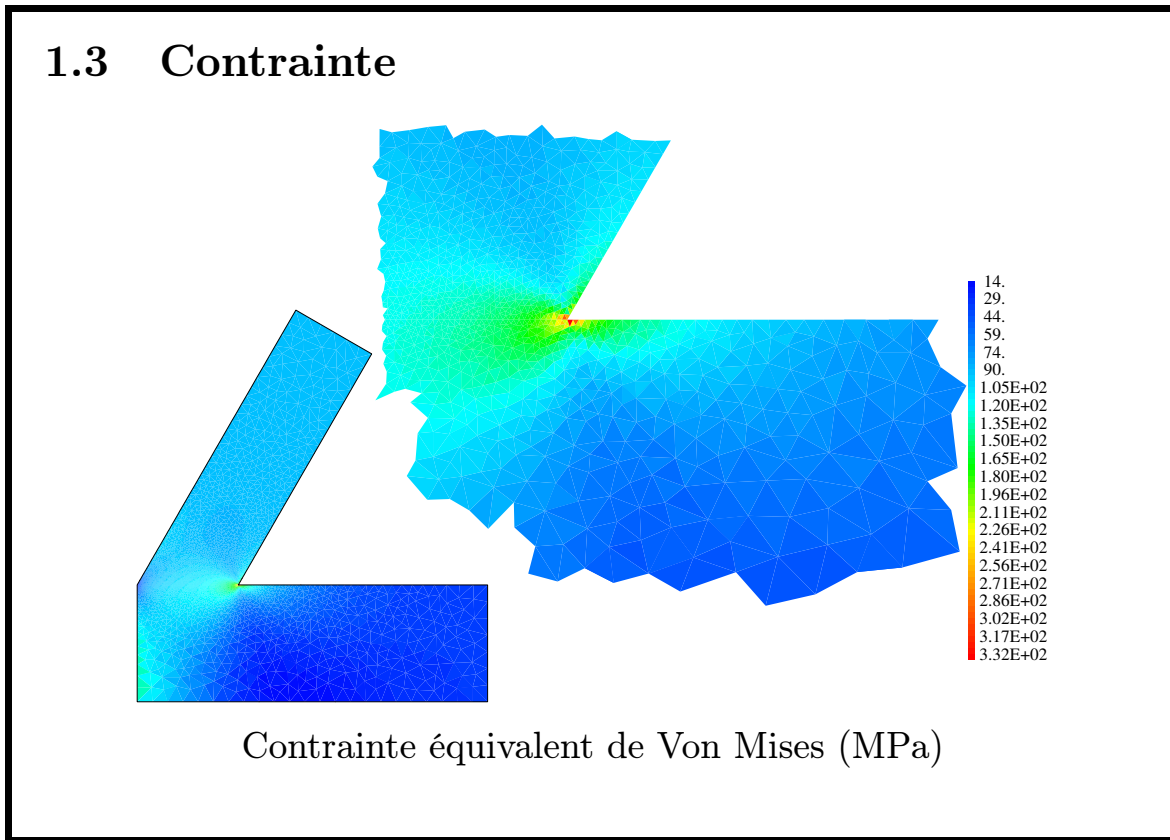
Il sont constitués d'éléments triangulaires à trois noeuds et sont caractérisés par la taille des mailles près des deux points (exprimée en mm). Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau ci-dessous.

Maillage	Taille h	Nbre éléments	Nbre noeuds	Nbre ddl
M1	5.	667	384	768
M2	2.5	1360	748	1496
M3	1.	2431	1299	2598
M4	0.5	4398	2300	4600
M5	0.25	8319	4280	8560
M6	0.1	19743	10019	20038
M7	0.05	38683	19511	39022



La figure ci-dessus présente la structure déformée dans le cas du maillage quatre (4398 éléments) et pour un angle $\theta = 60^\circ$.

Les conditions aux limites (symétries sur AB et sur BC) ont été choisies de manière à ne pas introduire de singularité ni de concentration de contraintes ailleurs dans la structure.

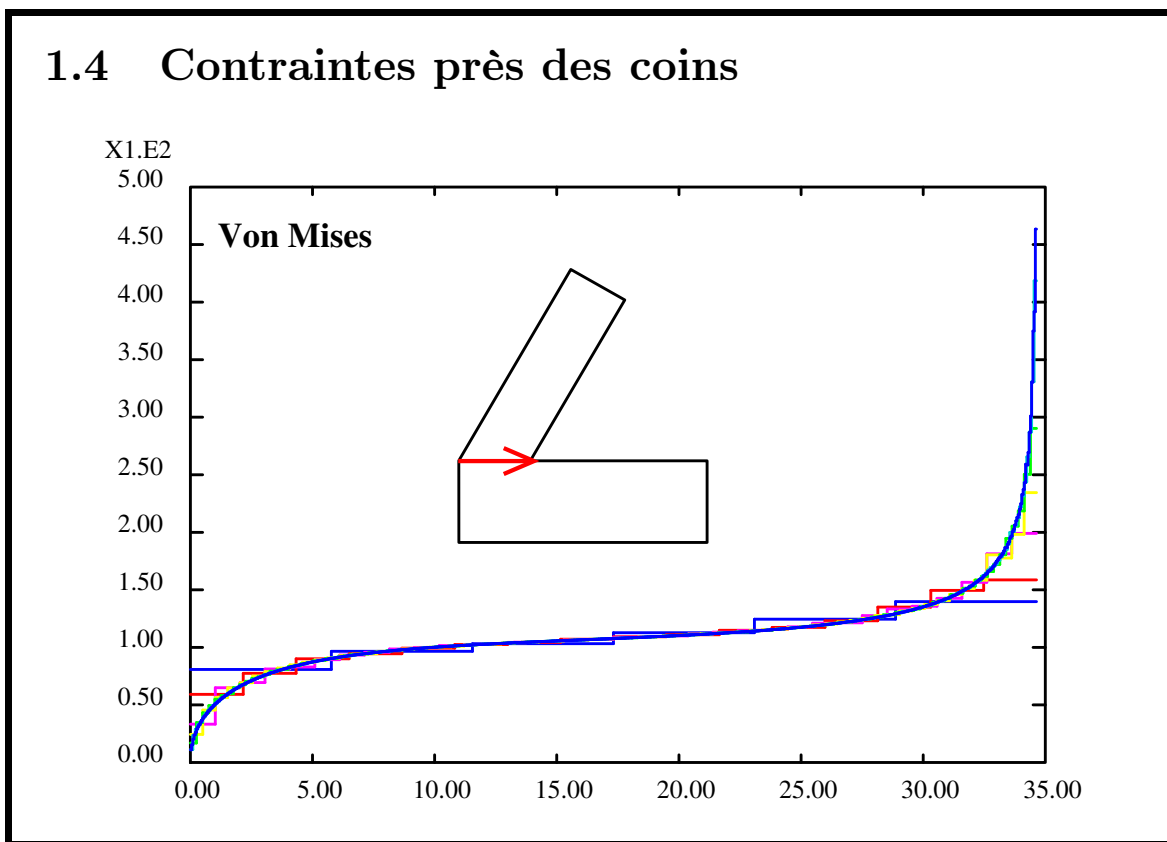


La figure ci-dessus présente les isovaleurs de la contrainte équivalente de Von Mises dans le même cas particulier du maillage quatre et pour un angle $\theta = 60^\circ$. Cette contrainte équivalente est choisie ici pour représenté globalement l'état de contrainte. Les isovaleurs sont tracées sur la pièce complète et sur zoom près du coin D .

On constate que le branche supérieure en est état de traction quasi uniforme sauf à sa base près des coins D et G . Les contraintes sont extrêmement concentrées au point D .

Au point D seuls quelques éléments sont très fortement contraints. C'est une caractéristique d'une solution par éléments finis dans une zone de singularité.

Les contraintes restent très faibles près du coin G .



Pour étudier les états de contraintes près des points D et G , on trace l'évolution des contraintes le long de la ligne GD .

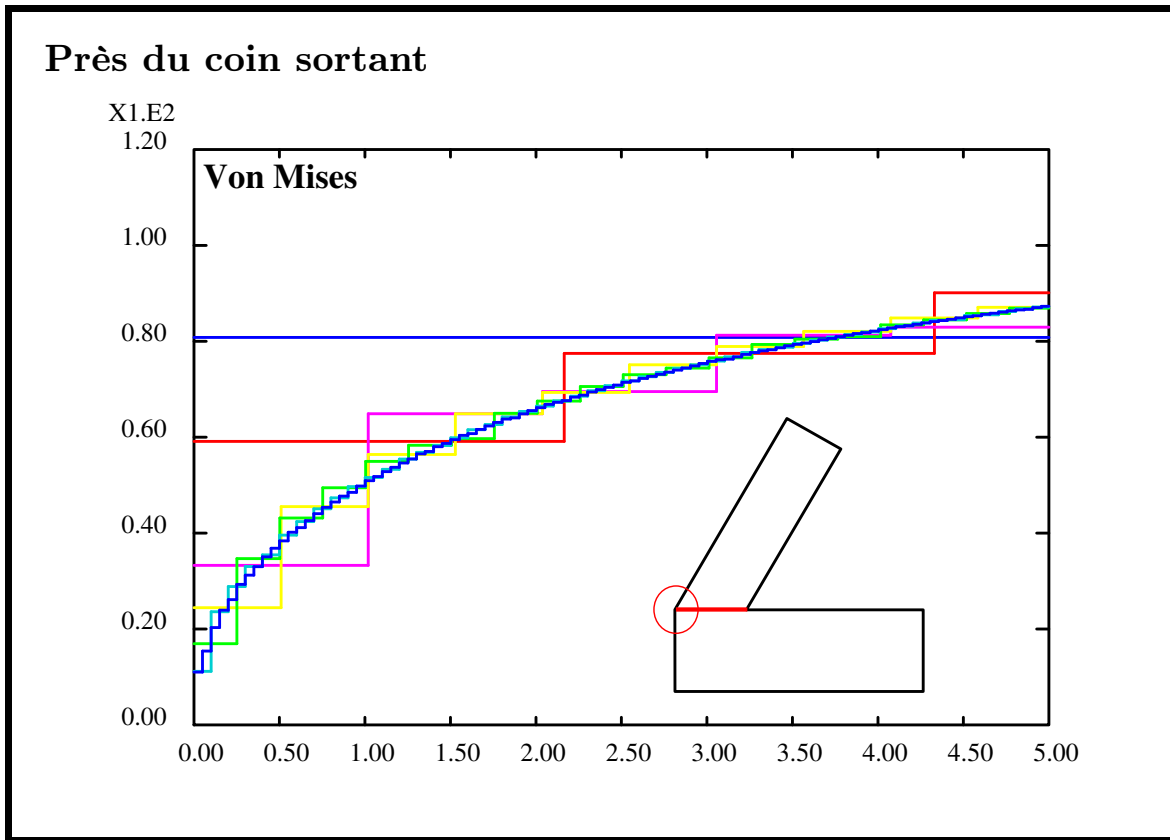
Les éléments utilisés sont des triangles à trois noeuds linéaires en déplacement. Les contraintes sont donc constantes dans chaque élément. Il y a discontinuité des contraintes entre deux éléments.

La figure ci-dessus présente l'état la répartition de la contrainte équivalente de Von Mises sur la ligne GD pour les sept mailles considérés.

On constate que les les contraintes sont très fortes près du point D (plusieurs centaines de MPa) et que le gradient de coontrainte est très fort.

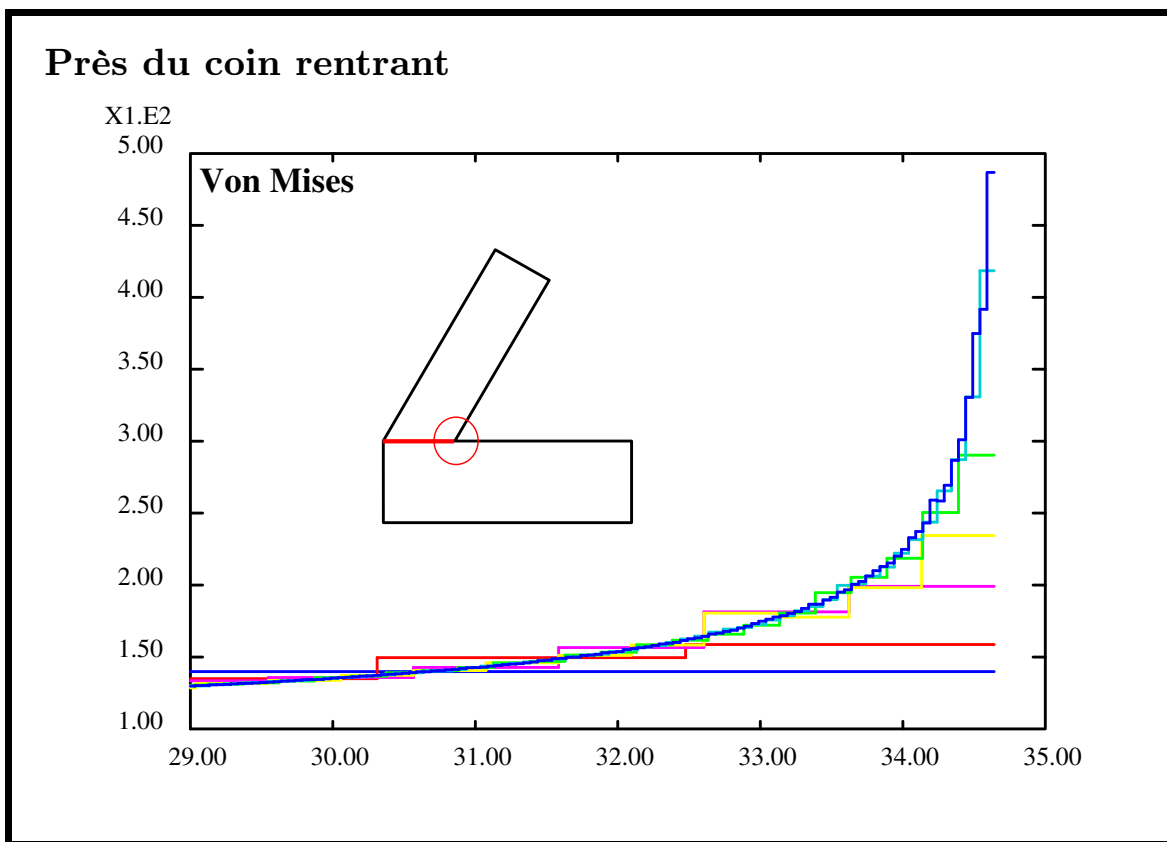
Le point G , par contre, est très peu chargé (quelques dizaines de MPa) et les gradient est plus faible.

Les deux figures suivantes présentent des zoom de cette évolution près des points G et D .



La figure ci-dessus présente l'état de contraintes équivalent de Von Mises près du coin sortant G pour les sept maillages considérés.

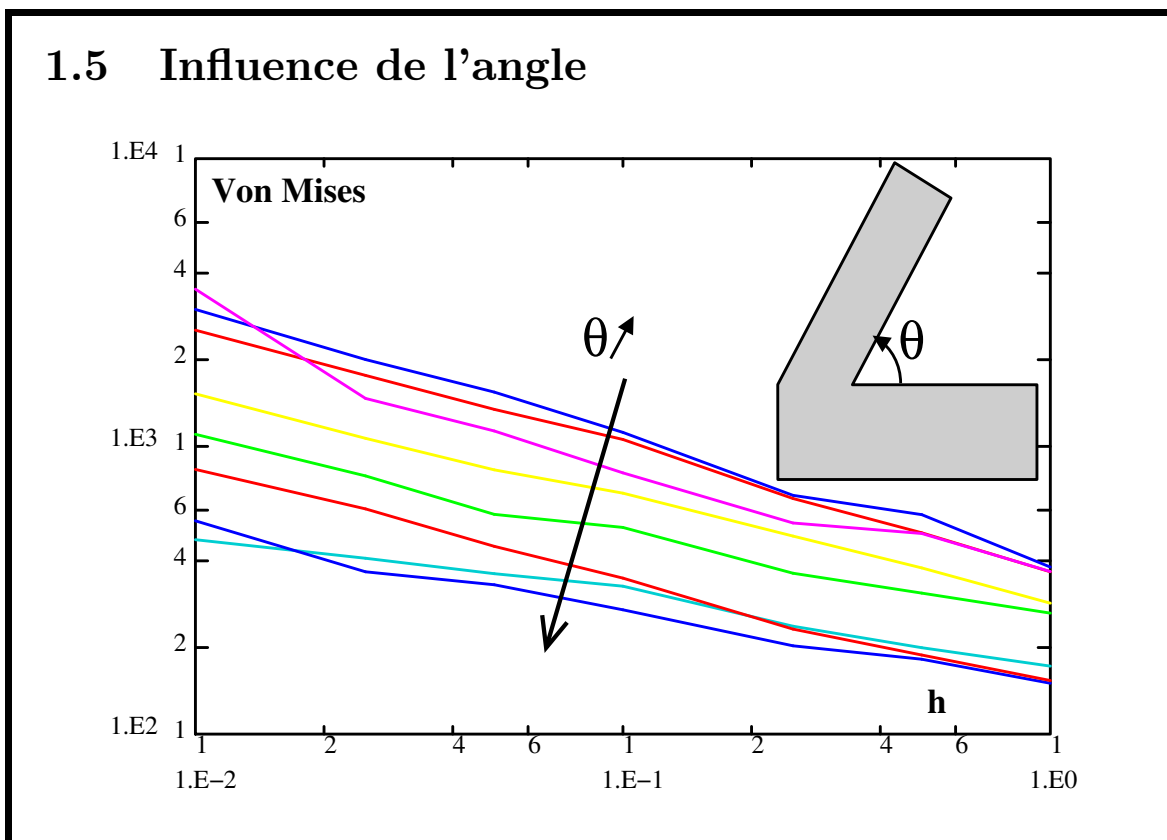
On constate qu'il a bien convergence de la solution éléments finis lorsque le maillage est raffiné. La contrainte équivalents se stabilise à $10MPa$ au point G .



La figure ci-dessus présente l'état de contraintes équivalent de Von Mises près du coin rentrant G pour les sept maillages considérés.

Il n'y a pas convergence en ce point vers une valeur fixée de la contrainte. Mais il y a bien convergence vers la solution infinie analytique.

A mesure que le maillage est raffiné, la contrainte est de plus en plus forte. Faire une adaptation du maillage dans cette zone n'a donc pas de sens. Par ailleurs, en ce point la contrainte analytique est infinie et la contrainte EF à une valeur finie, donc l'erreur est toujours infinie. Certains estimateurs d'erreur détectent les points de singularité et bloquent l'adaptation du maillage près de ces points.



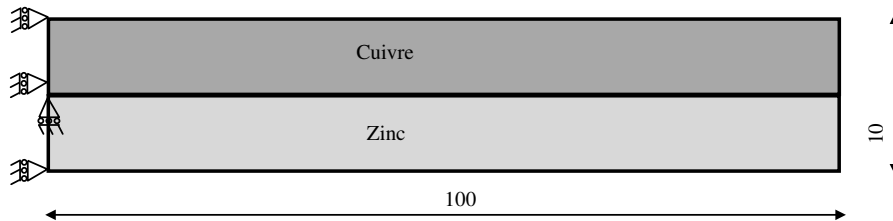
Pour montrer la dépendance de la singularité à la géométrie, nous traçons sur la figure ci-dessus l'évolution de la contrainte équivalente de Von Mises calculée par élément finis au point G lorsque le maillage est raffiné (diminution du paramètre h) est lorsque l'angle θ varie.

Il y a donc 8 courbes ($\theta = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ et 90°) de contrainte fonction de h .

On constate qu'il y a singularité quelque soit l'angle et que plus l'angle est élevé moins les contraintes le sont. La fissure ($\theta = 0$) est la singularité la plus forte.

2 Singularités dans un bi-matériau

2.1 Problème : bilame



Zinc : $E = 80000MPa$, $\nu = 0.3$ et $\alpha = 2.9E - 5K^{-1}$

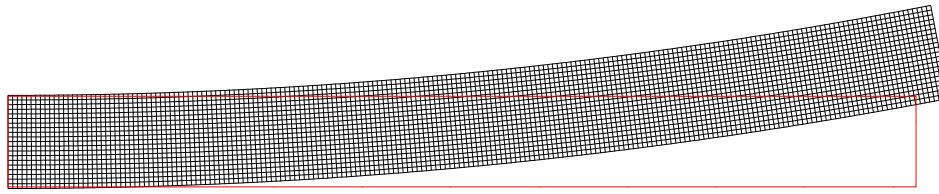
Cuivre : $E = 125000MPa$, $\nu = 0.3$ et $\alpha = 1.7E - 5K^{-1}$

Élévation de température $100^\circ C$

Nous montrons simplement ici une singularité dans un bi-matériau. Il s'agit d'un bilame constitué d'une lame de cuivre et d'une lame de Zinc. Ces deux matériaux ont des coefficients de dilatation thermique différents ce qui assure le fonctionnement du bilame.

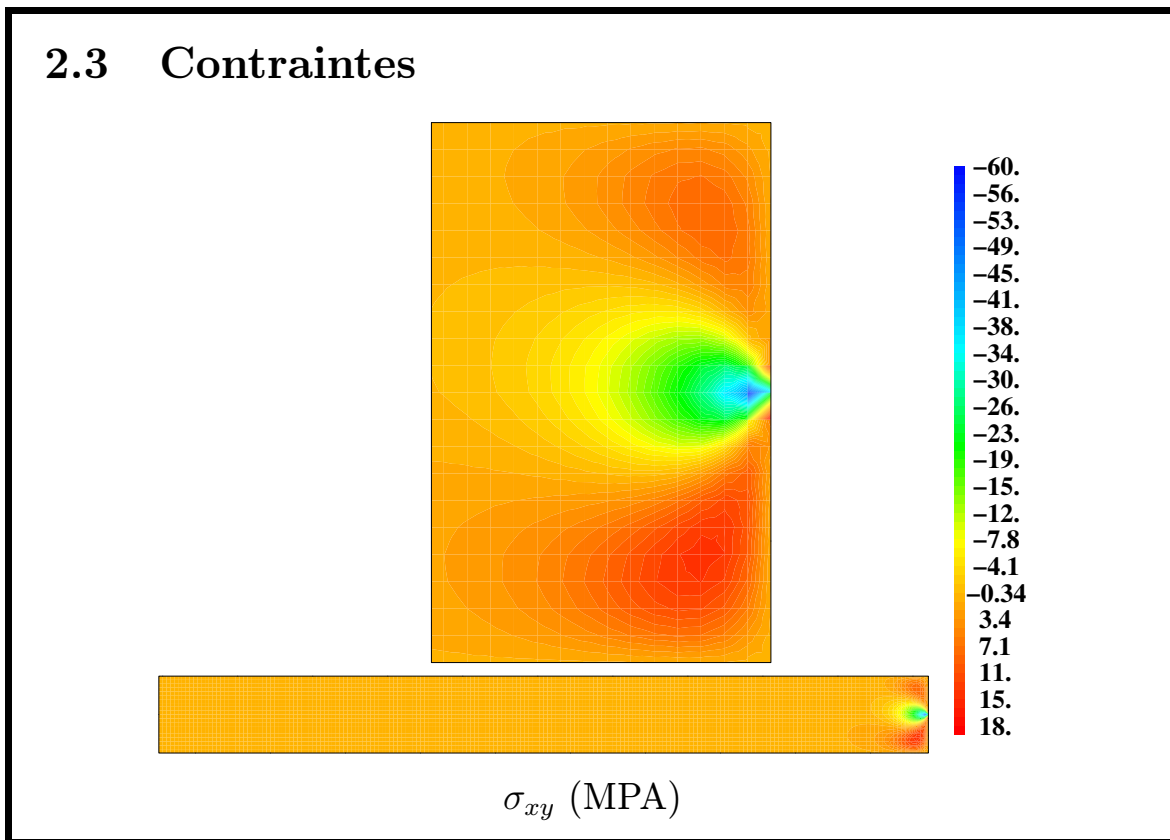
La structure est soumise à une élévation de température uniforme de $100^\circ C$.

2.2 Déformée



Amplitude $\times 8.6$

Le zinc se dilatant plus que le cuivre on observe évidemment une flexion du bilame vers le haut.



La concentration de contrainte est particulièrement visible sur la contrainte de cisaillement. On constate une singularité au niveau de la surface libre à l'extrémité de la poutre. Cette contrainte est celle qui est dimensionnante pour le l'apparition de délaminage entre les deux matériaux.

Il s'agit aussi d'un singularité, c'est-à-dire que la contrainte est infinie en ce point dans la solution analytique. Le contrainte EF augmente indéfiniment lorsqu'on raffine le maillage.

3 Conclusions

- Solution analytique en contrainte infinie sur une singularité,
- Solution EF converge vers la solution analytique,
- Augmentation de la contrainte EF lorsqu'on raffine le maillage,
- Singularités :
 - coins, fissures,
 - encastrement,
 - bi-matériau.

Références

- [1] Leguillon D. et Sanchez-Palencia E., *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.