

Dimensionnement

Support : Stockage inertiel d'énergie

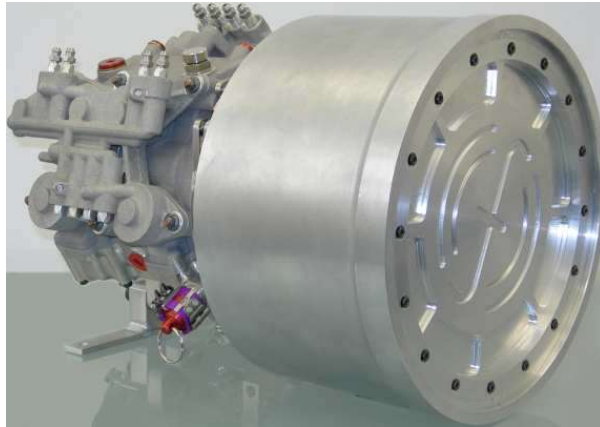


Figure 1 – KERS pour véhicule automobile

Présentation

Pour ralentir un véhicule automobile, la solution classique consiste à dissiper l'énergie cinétique sous forme de chaleur. Cette dissipation résulte généralement des actions de frottement sec dans les disques de freins. Plutôt que de dissiper intégralement cette énergie, on souhaite en récupérer une partie dans l'objectif de la restituer, partiellement ou totalement, dans une phase d'accélération.

L'objectif de ce travail est de donner des pistes de dimensionnement d'un système mécanique de récupération d'énergie.

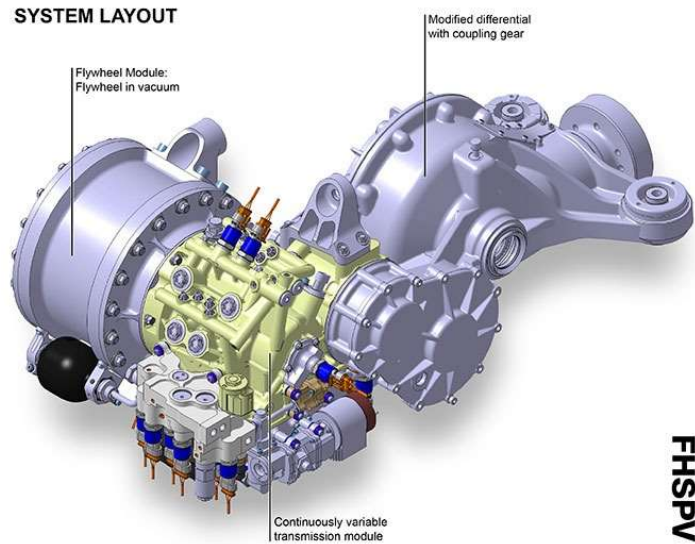


Figure 2 – Kinetic Energy Recovery System (Jaguar)

1 Cahier des charges et étude préliminaire

Question 1 • Déterminer l'énergie à dissiper pour freiner jusqu'à l'arrêt un véhicule de masse $M_v = 1t$ alors qu'il est à une vitesse de $V_v = 110km/h$. On supposera que 90% de l'énergie est dissipée dans le système de freinage, le reste l'étant par pertes de roulement et de frottement.

Question 1 • Éléments de solution

Energie cinétique du véhicule :

$$E_{c,v} = \frac{1}{2} M_v V_v^2 = 4.6710^5 J = 1,63kWh$$

Energie à dissiper par le système de freinage :

$$E_{fr} = 0.9 \times E_{c,v} = 4.210^5 J$$

Il existe plusieurs Systèmes de Récupération d'Énergie Cinétique (SREC ou KERS en anglais). On peut citer deux grandes familles associées au type d'énergie stockée :

- le SREC mécanique : l'énergie cinétique du véhicule récupérée permet la mise en rotation d'un volant d'inertie ;
- le SREC électrique : l'énergie cinétique du véhicule récupérée est transformée en énergie électrique au moyen d'un alternateur, puis stockée dans une batterie ;

Le SREC mécanique possède un rendement assez élevé, de l'ordre de 80%, alors que le SREC électrique, du fait des multiples transformations d'énergie (mécanique - électrique - chimique, puis chimique - électrique - mécanique lors de la restitution) est de l'ordre de 35%. On propose donc ici de retenir la solution du SREC mécanique.

Question 2 • On suppose que le SREC à un rendement de 90% pour emmagasiner l'énergie. Donner la quantité d'énergie à stocker dans le système.

Question 2 • Éléments de solution

Energie à stocker :

$$E_{st} = 0.9 \times E_{fr} = 3.8 \cdot 10^5 J$$

Question 3 • Les contraintes mécaniques permettant le dimensionnement du SREC sont multiples. Mais un élément limitant essentiel est la vitesse de rotation. Précisez quelles peuvent être les causes de dysfonctionnement liés à la vitesse.

Question 3 • Éléments de solution

- sous les effets centrifuges, le volant peut éclater ;
- les éléments du système de guidage en rotation ont un régime de fonctionnement maximal qui ne peut pas être dépassé ;
- à haute vitesse, un très léger déséquilibre provoque des vibrations très importantes ;
- à très haute vitesse les pertes par frottement avec l'air environnant peuvent être importante,
- ...

On ne peut donc pas emmagasiner une énergie supérieure à une valeur maximale. Cela veut dire qu'il faut conserver un système de freinage classique en parallèle.

Pour des raisons de place disponible dans le véhicule on se limite à un système de 30cm de diamètre ($\pm 10\%$) et de 20cm de long ($\pm 10\%$). Pour des raison de consommation de carburant, on souhaite réaliser un système de moins de 100kg afin de ne pas trop augmenter la masse totale du véhicule.

Pour simplifier l'étude, on assimile le volant à un anneau circulaire de section carrée de rayon intérieur r_1 , rayon extérieur r_2 et d'épaisseur e . Cet anneau est supposé libre d'effort sur ces bords et soumis à un mouvement de rotation autour de son axe à une vitesse ω . On commencera le dimensionnement avec les valeurs suivantes : $r_1 = 10mm$, $r_2 = 150mm$, $e = 100mm$ et en considérant un disque en acier : $E = 210MPa$, $\nu = 0.3$ et $\rho = 7800kg/m^3$.

Question 4 • Déterminer les caractéristiques inertielles du volant.

Question 4 • Éléments de solution

Masse :

$$m = \rho e \pi (r_2^2 - r_1^2)$$

Moment d'inertie :

$$J = \frac{1}{2} \rho e \pi (r_2^4 - r_1^4) = \frac{1}{2} m (r_2^2 + r_1^2)$$

Question 5 • Déterminer la vitesse de rotation d'un tel volant afin qu'il puisse stocker l'énergie voulue.

Question 5 • Éléments de solution

Energie stockable :

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Pour le véhicule considéré :

$$E_c = E_{st} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_{st}}{J}} = 1957 \text{rd.s}^{-1} = 18670 \text{tr.mn}^{-1}$$

2 Dimensionnement Mécanique

On cherche dans un premier temps à quantifier les risques d'éclatement du volant. Pour cela on cherche à déterminer l'état de contrainte dans le disque en rotation. On ne s'intéresse pas à la liaison entre le volant et son axe.

Question 6 • Poser le problème d'élasticité correspondant au disque seul en rotation autour de son axe à une vitesse ω . Rappeler les différentes manières de résoudre un tel problème.

Question 6 • Éléments de solution

- Equilibre : $\text{div } \bar{\bar{\sigma}} = -\rho r \omega^2 \underline{e}_r$
- Conditions aux limites : sur tout le bord $\bar{\bar{\sigma}} \underline{n} = 0$.
- Comportement : $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{K}} \bar{\bar{\epsilon}}$

Pour résoudre :

- approche en contraintes
- approche en déplacement

Question 7 • On fait une hypothèse de contraintes planes dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. Représenter la forme du tenseur des contraintes dans un système d'axe cylindrique. Quelles est la validité de cette hypothèse ?

Question 7 • Éléments de solution

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)}$$

Hypothèse valable pour épaisseur faible uniquement.

Question 8 • On ne fait donc qu'une résolution du problème dans le plan $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$. On suppose que le champ de déplacement plan est de la forme :

$$\underline{U}(r, \theta) = u(r) \underline{e}_r$$

Justifier cette hypothèse.

Question 8 • Éléments de solution

Axisymétrie.

Question 9 • Donner la forme du champ de déformation correspondant à cette hypothèse.

Question 9 • Éléments de solution

$$\varepsilon_{rr} = u_{,r} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta r} = 0$$

Question 10 • Exprimer la relation de comportement (contraintes fonction des déformations) pour cette situation. E et ν sont les caractéristiques élastiques du matériau.

Question 10 • Éléments de solution

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{rr} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{rr} + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_{\theta\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_{rr} + \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{\theta\theta} \end{cases}$$

Question 11 • Traduire l'équilibre en volume du volant sous forme de condition sur la composante de déplacement.

Question 11 • Éléments de solution

Equilibre :

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho r \omega^2$$

donne :

$$\varepsilon_{rr,r} + \nu \varepsilon_{\theta\theta,r} + \frac{1-\nu}{r}(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}) = -\frac{\rho(1-\nu^2)}{E} r \omega^2$$

soit en remplaçant :

$$u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2} = -\frac{\rho(1-\nu^2)}{E} r \omega^2$$

Question 12 • Intégrer pour déterminer la forme du champ de déplacement.

Question 12 • Éléments de solution

En remarquant que :

$$u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2} = \left(\frac{1}{r}(ru)_{,r}\right)_{,r}$$

on obtient, après intégration :

$$u = \frac{(1-\nu^2)}{E} \left(\lambda r + \frac{\mu}{r} - \rho \frac{\omega^2 r^3}{8} \right)$$

Question 13 • En appliquant les conditions aux limites sur les faces interne et externe de l'anneau, déterminer complètement la solution en déplacement.

Question 13 • Éléments de solution

Contrainte :

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (u_{,r} + \nu \frac{u}{r}) = (1+\nu)\lambda - (1-\nu) \frac{\mu}{r^2} - (3+\nu)\rho \frac{\omega^2 r^2}{8}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r=r_1) = 0 \\ \sigma_{rr}(r=r_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\nu)\lambda - (1-\nu) \frac{\mu}{r_1^2} - (3+\nu)\rho \frac{\omega^2 r_1^2}{8} = 0 \\ (1+\nu)\lambda - (1-\nu) \frac{\mu}{r_2^2} - (3+\nu)\rho \frac{\omega^2 r_2^2}{8} = 0 \end{cases}$$

Donne :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \rho \frac{\omega^2}{8} (r_1^2 + r_2^2) \\ \mu = \frac{(3+\nu)}{(1-\nu)} \rho \frac{\omega^2}{8} r_1^2 r_2^2 \end{cases}$$

Donc :

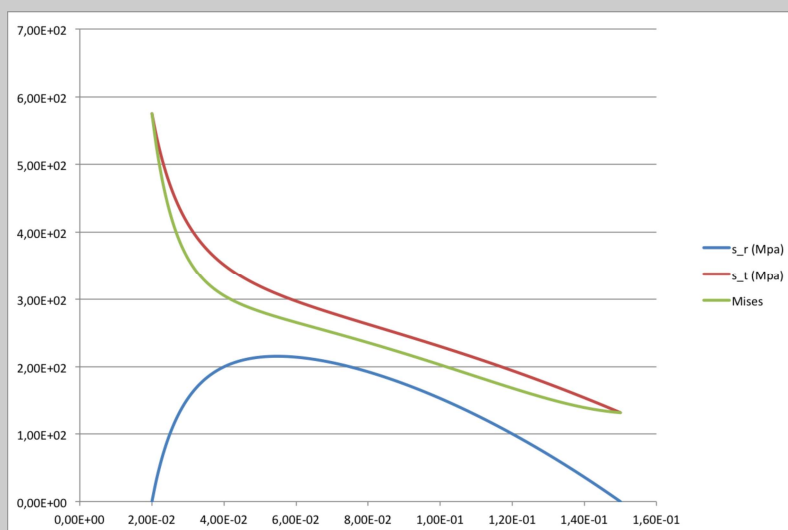
$$u(r) = \frac{E(3+\nu)}{1-\nu^2} \rho \frac{\omega^2}{8} \left[\frac{1}{1+\nu} (r_1^2 + r_2^2) - \frac{1}{1-\nu} \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right]$$

Question 14 • En déduire la solution en contrainte. Tracer cette solution en fonction de r .

Question 14 • Éléments de solution

Contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \rho \frac{(3+\nu)\omega^2}{8} \left[r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right] \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \rho \frac{(3+\nu)\omega^2}{8} \left[r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{3\nu+1}{3+\nu} r^2 \right] \end{cases}$$



Question 15 • Les figures 3 et 4 présentent les résultats d'un calcul par éléments finis axi-symétrique sur un demi volant. Comparer.

Question 15 • Éléments de solution

- Hypothèse Contraintes planes bien vérifiée.
- Répartition et maximum des contraintes correspondent.

Question 16 • Donner l'expression de la contrainte équivalente de von Mises et la tracer.

Question 16 • Éléments de solution

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2)}$$

En contraintes planes :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2)}$$

Question 17 • Quelle est la zone la plus chargée. On propose différents types matériaux utilisables dans le tableau 5. Un disque en acier est-il envisageable ?

Question 17 • Éléments de solution

Acier : OUI – Alu : NON - Autres : OUI

3 Dimensionnement en Dynamique

On cherche maintenant une approximation de la fréquence fondamentale du système à l'aide de différents modèles dynamique.

Question 18 • Expliquer le besoin d'un dimensionnement en dynamique.

Question 18 • Éléments de solution

- dimensionnement en dynamique = éviter d'exciter les modes de résonance.
- recherche de la pulsation du premier mode de résonance et faire en sorte qu'elle soit plus élevée que la pulsation d'excitation.
- ici la pulsation d'excitation est la vitesse de rotation entre 0 et 1960rd/s.

Question 19 • Rappeler pourquoi, en première approximation, l'obtention de la pulsation fondamentale est suffisante pour un dimensionnement en dynamique.

Question 19 • Éléments de solution

- en première approximation : pulsation de résonance \simeq pulsation propre (si peu d'amortissement).

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

- toutes les autres pulsations de résonance sont au dessus de la fondamentale.

L'axe de la liaison pivot entre le volant et le boîtier est assimilé à un cylindre de diamètre égal à deux fois le rayon intérieur du volant $d = 2r_1$ et de longueur égale à l'entraxe entre les deux paliers a . Dans un premier temps, on propose d'utiliser un axe en acier avec $a = 150\text{mm}$.

On fait un premier modèle dynamique afin d'obtenir une approximation de la pulsation fondamentale du système. Dans ce modèle (voir figure 6), l'axe de la liaison pivot est supposé déformable et le volant est assimilé à une masse ponctuelle en son centre. Les paliers sont assimilés à des liaisons rotules.

Question 20 • Proposer une approximation de la pulsation fondamentale par équivalence avec un système à un degré de liberté.

Question 20 • Éléments de solution

Système 1DDL équivalent :

$$m_{eq} = m \quad ; \quad k_{eq} = \frac{48EI}{a^3}$$

avec :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r_1^4}{4}$$

donc :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12\pi E r_1^4}{m a^3}}$$

Question 21 • Déterminer une nouvelle approximation de la pulsation à l'aide du second modèle, dans lequel la partie de l'axe située dans le volant est supposée indéformable.

Question 21 • Éléments de solution

Système 1DDL équivalent :

$$m_{eq} = m \quad ; \quad k_{eq} = 2 * \frac{3EI}{\left(\frac{a-e}{2}\right)^3}$$

avec :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r_1^4}{4}$$

donc :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{12\pi E r_1^4}{m(a-e)^3}}$$

On retrouve le premier modèle quand $e = 0$.

Question 22 • Comparer les deux modèles.

Question 22 • Éléments de solution

Le premier est sans doute trop souple et le second sans doute trop rigide. On a donc un intervalle d'appartenance de la première pulsation propre approximée. En comparant avec la pulsation maxi d'excitation, il convient d'augmenter le diamètre de l'axe. Par exemple, passer à 40mm .

Pulsation (rd/s)	$r_1 = 10\text{mm}$	$r_2 = 20\text{mm}$
modèle 1	654	2632
modèle 2	2402	9672

Question 23 • Que pourrait représenter le troisième modèle ?

Question 23 • Éléments de solution

Palier lisse avec grande longueur d'appui.

Question 24 • Comment améliorer la qualité des approximation ci-dessus. Proposer une amélioration pour le premier modèle.

Question 24 • Éléments de solution

Amélioration par quotient de Rayleigh. On sait que :

$$\omega^2 \leq R(U(x))$$

pour toute forme $U(x)$ cinématiquement admissible. Avec $R(U)$ le quotient de Rayleigh :

$$R(U) = \frac{\int_0^a EI(U'')^2 dx}{\int_0^a \rho S U^2 dx + mU(a/2)^2}$$

Pour U on peut prendre :

- n'importe quelle forme simplifiée vérifiant les CL, par exemple :

$$U(x) = x(x - a)$$

- une déformée statique (par exemple la déformée sous l'action d'une force au centre) :

$$y(x) = \frac{F}{48EI}(3a^2x - 4x^3) \rightarrow U(x) = (3a^2x - 4x^3)$$

(valable sur la moitié gauche la poutre avec origine en A).

- un mode de vibration analytique d'un structure proche. Par exemple celui de la poutre sur deux appuis sans masse :

$$U(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Par exemple, avec la déformée statique :

$$R(U) = \frac{2 \int_0^{a/2} EI(24x)^2 dx}{2 \int_0^{a/2} \rho S (3a^2x - 4x^3)^2 dx + ma^6} = \frac{48EI}{\frac{17}{35} \rho S a^4 + ma^3}$$

Résultats

Pulsation (rd/s)	$r_1 = 10mm$	$r_2 = 20mm$
1DDL modèle 1	654	2632
1DDL modèle 2	2402	9672
Rayleigh modèle 1	654	2632

Cela valide le calcul réalisé avec l'équivalence avec un système 1ddl. Car l'inertie de l'arbre est négligeable devant celle de la masse.

4 Dimensionnement des liaisons

On cherche maintenant à dimensionner la liaison pivot qu'on considère réalisée soit à l'aide de roulements à billes soit à l'aide de paliers lisse.

4.1 Détermination des efforts dans la liaison

Dans un premier temps on cherche à estimer les efforts dans la liaison pivot entre le volant et le boîtier dus aux effets d'inertie. Pour cela, on considère le véhicule dans une courbe de rayon $R = 30m$ roulant à une vitesse $V = 60km/h$. On propose le modèle de la figure 9 pour déterminer ces efforts.

Question 25 • En appliquant le théorème de la résultante dynamique, déterminer les effort dus à l'inertie dans la liaison pivot.

Question 25 • Éléments de solution

$$\underline{F}(S_0 \rightarrow S) = m\underline{\Gamma}_G(S/R_0) = mR\dot{\theta}^2 \underline{x}^1$$

Question 26 • La liaison pivot étant composée de deux paliers de chaque coté du volant, en déduire les efforts dus à l'inertie dans ces paliers.

Question 26 • Éléments de solution

$$F_{iner} = \frac{mR\dot{\theta}^2}{2} = \frac{mV^2}{aR}$$

Question 27 • Déterminer le moment cinétique au centre de gravité du volant en faisant l'*approximation gyroscopique*.

Question 27 • Éléments de solution

– Vitesse de Rotation :

$$\underline{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta} \underline{z}_0 + \omega \underline{y}_1$$

– Moment Cinétique :

$$\underline{\sigma}_G(S/R_0) = [I(G, S)] \underline{\Omega}(S/R_0)$$

– Approximation Gyroscopique (car $\omega \gg \dot{\theta}$) :

$$\underline{\sigma}_G(S/R_0) \simeq J\omega \underline{y}_1$$

Question 28 • En appliquant le théorème du moment dynamique, déterminer le moment dans la liaison pivot induit par la rotation du volant sur son axe (*couple gyroscopique*).

Question 28 • Éléments de solution

Théorème du moment dynamique :

$$\underline{M}_G(S_0 \rightarrow S) = \underline{\delta}_G(S/R_0)$$

Moment dynamique

$$\underline{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d}{dt} \underline{\sigma}_G(S/R_0) = -J\omega \dot{\theta} x_1$$

Question 29 • La liaison pivot étant réalisée par deux paliers distants d'un entraxe a . Déterminer les efforts correspondants dans les paliers.

Question 29 • Éléments de solution

$$F_{gyro} = \frac{2J\omega \dot{\theta}}{a} = \frac{2J\omega V}{aR}$$

Question 30 • Comparer les niveaux de ces efforts.

Question 30 • Éléments de solution

F_{gyro} dix fois plus élevé.

Dans la suite, on ne prend en compte que les efforts dus au couple gyroscopique.

4.2 Solution par éléments roulants

Pour un diamètre d'arbre fixé à la partie précédente, on souhaite étudier la possibilité d'utiliser un système de guidage par éléments roulants. On s'appuiera pour sur le tableau donné sur la figure 10.

Question 31 • Pour la solution retenue. Estimer le critère $N.D.$

Question 31 • Éléments de solution

$N.D$ trop grand lorsque le diamètre intérieur dépasse $25mm$.

Question 32 • Est-il envisageable de retenir la solution avec éléments roulants ?

Question 32 • Éléments de solution

Sans doute pas, sauf avec roulements très spéciaux.

4.3 Solution par paliers lisses

On applique la démarche de dimensionnement de paliers lisses proposée sur la figure 11.

Question 33 • Calculer la pression de contact due aux efforts gyroscopiques. Pour cela, on utilise la surface projetée égale au produit de la longueur du palier par le diamètre. Le critère en pression est-il respecté ?

Question 33 • Éléments de solution

Pour un palier de diamètre 40mm et de longueur 50mm , la pression est de 1.43MPa . Critère ($< 10\text{MPa}$) respecté.

Question 34 • Calculer la vitesse de glissement au contact. Le critère en vitesse maximale est-il respecté ?

Question 34 • Éléments de solution

Pour un palier de diamètre 40mm et une vitesse de rotation de près de $19000\text{tr}/\text{mn}$ on a une vitesse de glissement de $39\text{m}/\text{s}$ trop élevée par rapport à la limite de $20\text{m}/\text{s}$.

Question 35 • Le critère $P.V$ est-il respecté ?

Question 35 • Éléments de solution

Dans notre situation k_D et k_T proches de 1. En étant optimiste et en prenant $f = 0.03$, le $p_{v_{max}}$ vaut 17. Dans notre situation, on trouve un p_v de 56... La solution par palier lisse n'est pas envisageable.

5 Autres solution

Question 36 • Proposer d'autres solutions de guidage pour satisfaire au cahier des charges.

Question 36 • Éléments de solution

Palier magnétiques mais sans doute problème de surpoids et besoin d'une alimentation électrique compte tenu des efforts mis en jeux.

Question 37 • Proposer des solutions pour limiter les pertes dans le système.

Question 37 • Éléments de solution

- paliers magnétiques pour limiter frottement de contacts pour limiter frottement de contact,
- vide d'air pour limiter frottement autour du volant (force de viscosité en ω^2).

Opérateurs Différentiels en Coordonnées Cylindriques

$$\underline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\text{grad}}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{div}} U = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\underline{\text{rot}} U = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_z$$

$$\underline{\Delta} U = \left(\Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) \underline{e}_r + \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \underline{e}_\theta + \Delta u_z \underline{e}_z$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) \underline{e}_\theta + \left(\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \right) \underline{e}_z$$

Dimensionnement par éléments finis

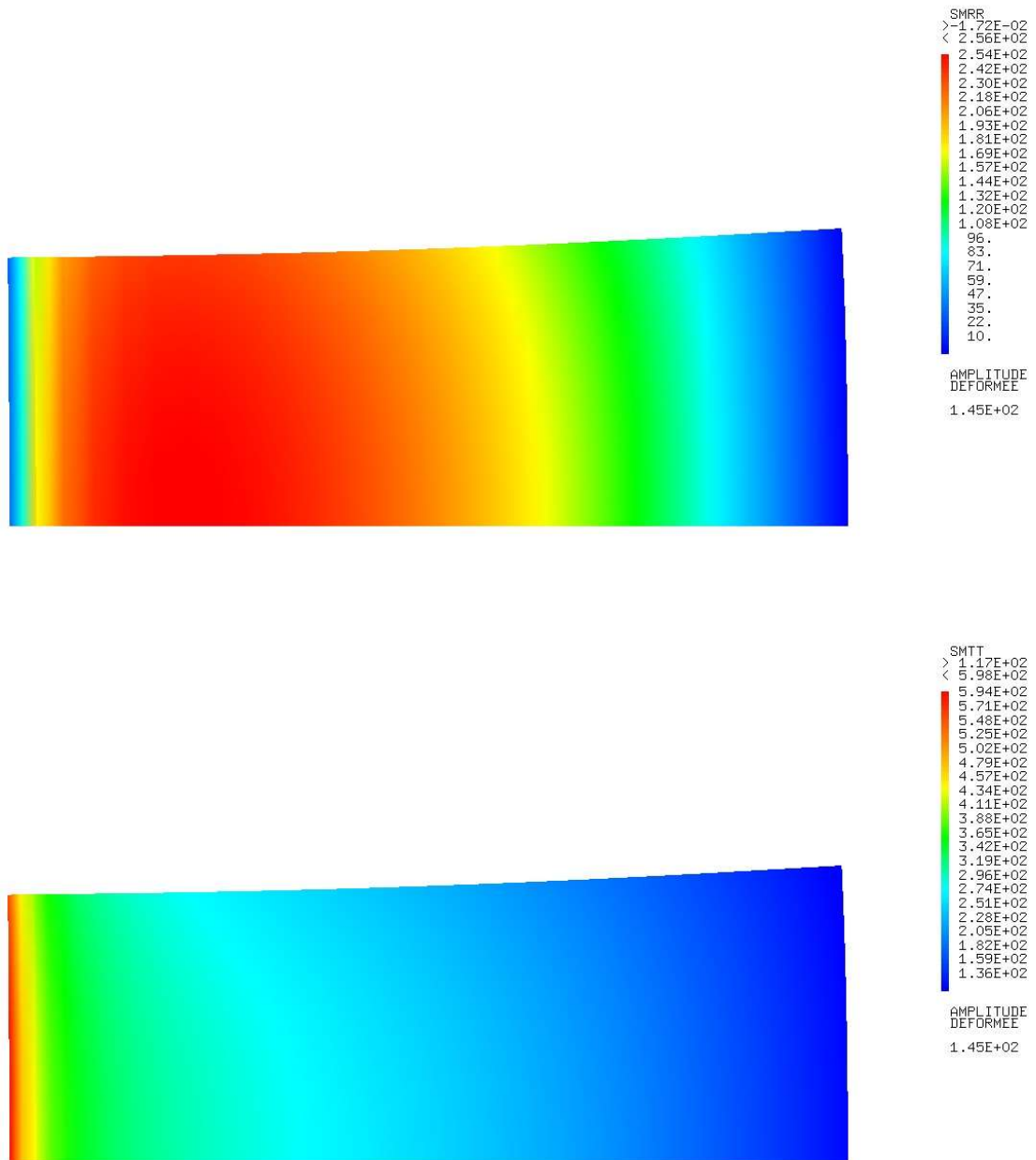


Figure 3 – Résultats éléments finis axi-symétrique : $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$
 $r_1 = 10mm, r_2 = 150mm, e = 100mm, \text{acier}, \omega = 19000tr/mn$

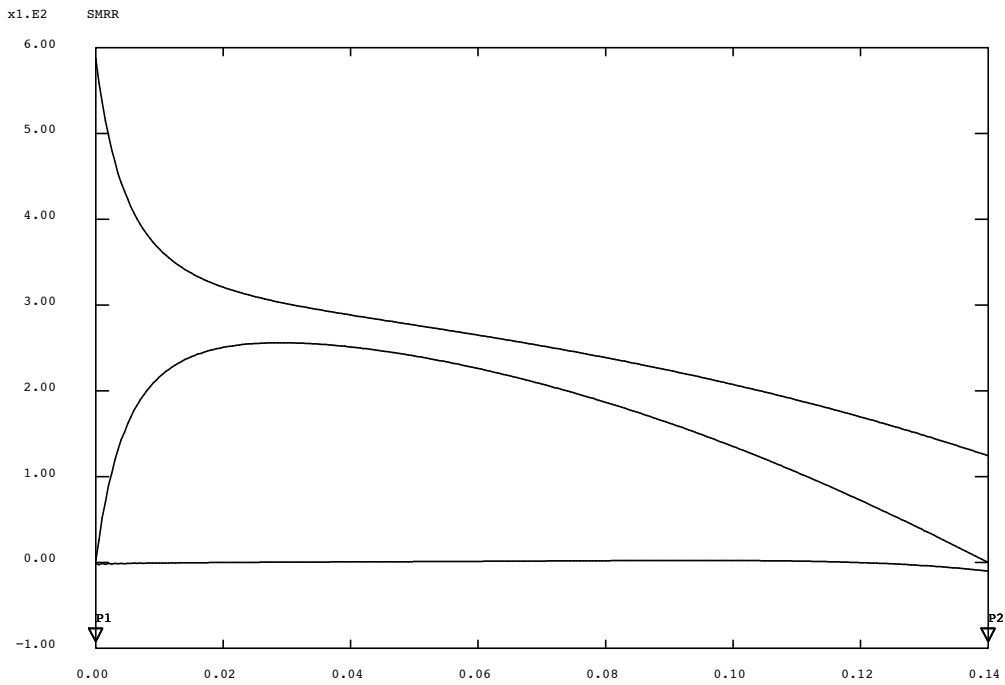
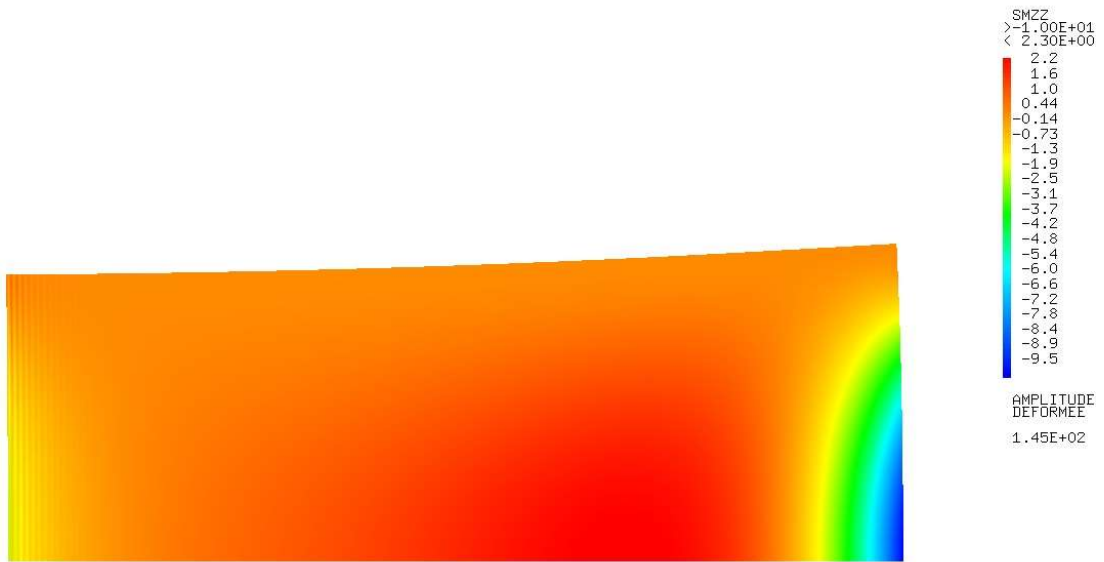


Figure 4 – Résultats éléments finis axi-symétrique : σ_{zz} et variations le long du rayon
 $r_1 = 10mm, r_2 = 150mm, e = 100mm, \text{acier}, \omega = 19000tr/mn$

Matériaux

Voir Techniques de l'ingénieur "Stockage inertiel de l'énergie" D4030 V2 - Tableau 3 - page 4 - <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/energies-th4/stockage-de-l-energie-42638210/stockage-inertiel-de-l-energie-d4030/>

Figure 5 – Matériaux isotropes utilisables pour un SREC (d'après T.I.)

Modèles dynamiques

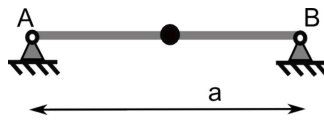


Figure 6 – Premier modèle dynamique

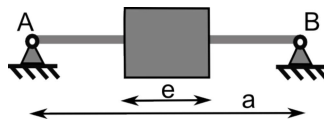


Figure 7 – Second modèle dynamique

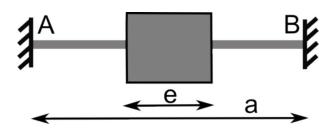


Figure 8 – Troisième modèle dynamique

Modélisation du véhicule en courbe

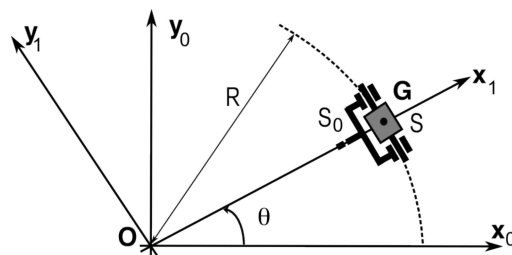


Figure 9 – Modèle de calcul des efforts d'inertie

Roulements à billes

Voir Techniques de l'ingénieur "Roulements et butées à billes et à rouleaux" Ref B5370 v1 - Tableau 1 - page 5 - <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/archives-th12/archives-fonctions-et-composants-mecaniques-tiaba/archive-1/roulements-et-butees-a-billes-et-a-rouleaux-b5370/>

Figure 10 – Choix de roulements à billes

Paliers lisses

Voir Techniques de l'ingénieur "Roulements et butées à billes et à rouleaux" Ref B5310 - Paragraphe capacités page 3 et Figure 1 page 4 - <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mecanique-th7/guidage-mecanique-42183210/criteres-de-choix-d-un-palier-validation-b5310/>

Figure 11 – Dimensionnement de paliers lisses (d'après T.I.)