

Récupération d'énergie par dispositifs piézoélectriques vibrants

Diaporama I: introduction et modélisation électromécanique

PJT 1e année

C. Giraud-Audine, **O. Thomas**

olivier.thomas@ensam.eu

<https://lispen.artsetmetiers.fr/user/87>



<http://savoir.ensam.eu/moodle/course/view.php?id=5037>

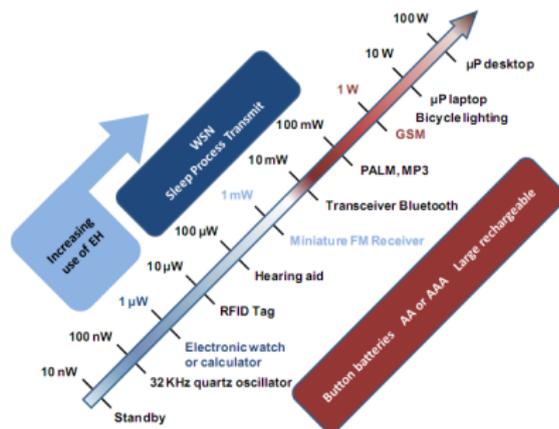
La récupération d'énergie (Energy harvesting, EH)



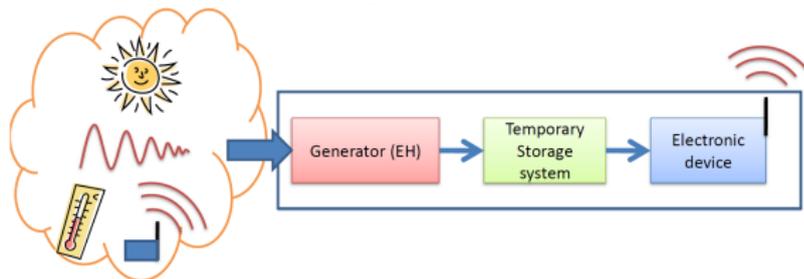
- ▷ **Principe** : capter, convertir et stocker
l'énergie "ambiante"
↪ de multiples manières

Puissance récupérable

- ▷ **Difficulté** : la puissance vibratoire récupérable est **très faible** (de l'ordre du μW)



Source IDTechEx report "Energy Harvesting and Storage for Electronic Devices 2009-2019".

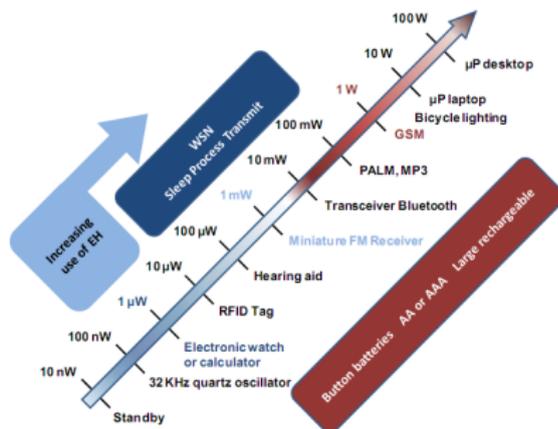


Puissance récupérable

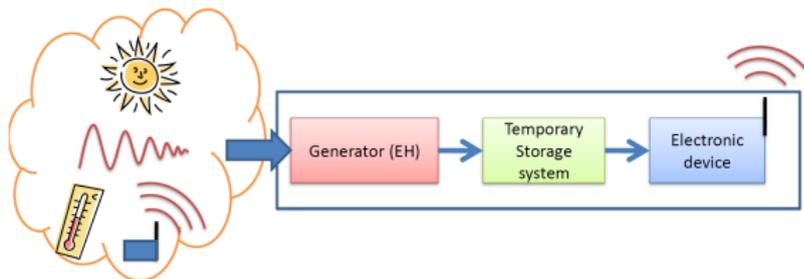
▷ **Difficulté** : la puissance vibratoire récupérable est **très faible** (de l'ordre du μW)

▷ **Application possible** : (dans le futur) alimentation de capteurs embarqués

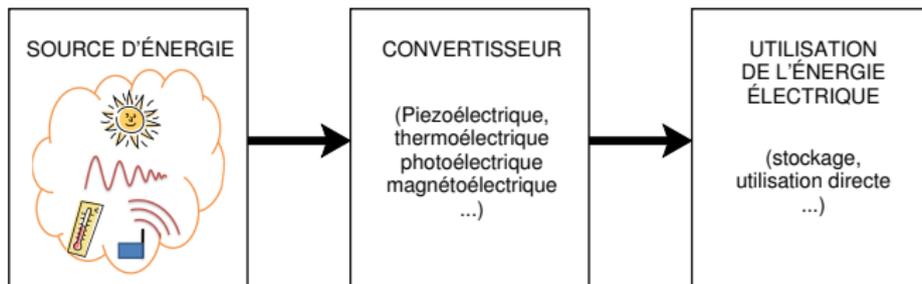
- récupération de l'énergie en continu
- stockage
- utilisation ponctuelle lorsqu'un capteur "se réveille"



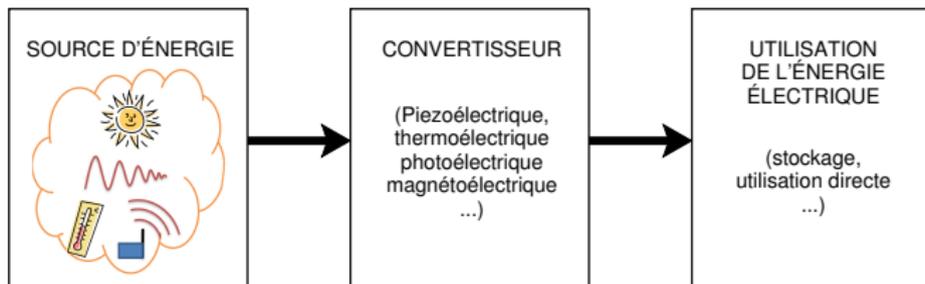
Source IDTechEx report "Energy Harvesting and Storage for Electronic Devices 2009-2019".



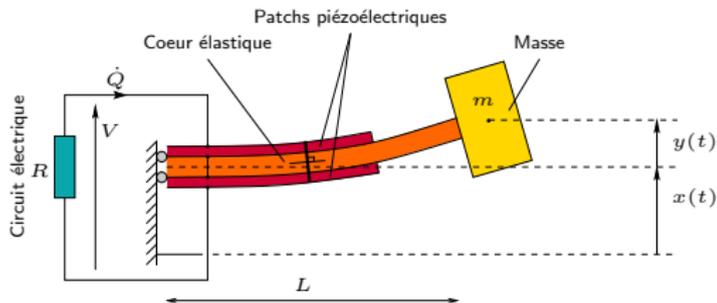
Principe d'un récupérateur d'énergie



Principe d'un récupérateur d'énergie



On s'intéresse dans ce projet principalement au **convertisseur piézoélectrique** :



une poutre élastique en flexion, excités ($x(t)$) à sa base et munie de patches piézoélectriques connectés à un circuit électrique.

Présentation et déroulement du projet

- ▷ **Objectif** : 30h pour comprendre et caractériser la récupération d'énergie vibratoire dans un cas "simple".

Présentation et déroulement du projet

- ▷ **Objectif** : 30h pour comprendre et caractériser la récupération d'énergie vibratoire dans un cas "simple".
- ▷ **Deux intervenants** : C. Giraud-Audine (CGA) et O. Thomas (OT)

Présentation et déroulement du projet

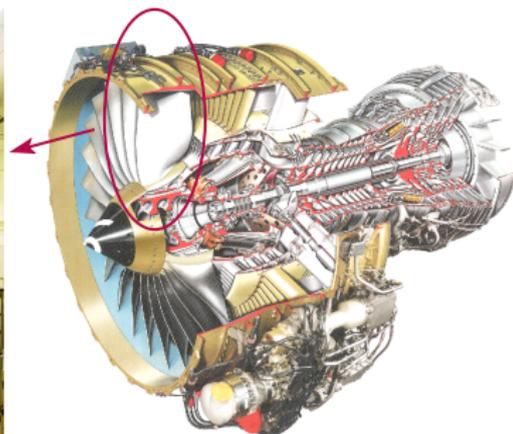
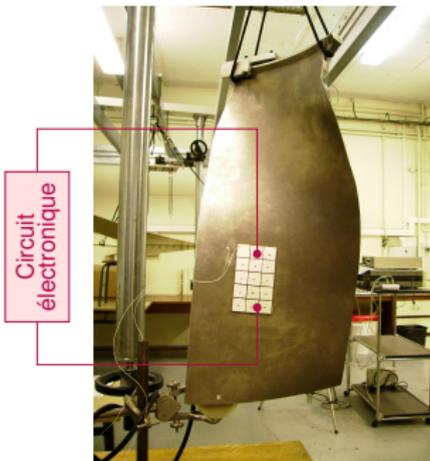
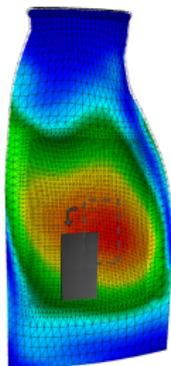
- ▷ **Objectif** : 30h pour comprendre et caractériser la récupération d'énergie vibratoire dans un cas "simple".
- ▷ **Deux intervenants** : C. Giraud-Audine (CGA) et O. Thomas (OT)
- ▷ **Déroulement** : Séances "apport de connaissance + calcul" / séances de mesures sur un dispositif de laboratoire
 - **Séances 1 (4h, OT) : introduction + piézoélectricité + modélisation du système**
 - **Séances 2, 3 (2×4h, CGA) : caractérisation dynamique expérimentale**
 - **Séance 4 (4h, OT) : optimisation dynamique du récupérateur**
 - **Séances 5, 6 (2×4h, CGA) : étude expérimentale de la récupération d'énergie**
 - **Séance 7 (4h, CGA/OT) : bilan, corrélations calcul / essai**
 - **Séance 8 (2h, CGA/OT) : soutenance finale**

Présentation et déroulement du projet

- ▷ **Objectif** : 30h pour comprendre et caractériser la récupération d'énergie vibratoire dans un cas "simple".
- ▷ **Deux intervenants** : C. Giraud-Audine (CGA) et O. Thomas (OT)
- ▷ **Déroulement** : Séances "apport de connaissance + calcul" / séances de mesures sur un dispositif de laboratoire
 - **Séances 1 (4h, OT) : introduction + piézoélectricité + modélisation du système**
 - **Séances 2, 3 (2×4h, CGA) : caractérisation dynamique expérimentale**
 - **Séance 4 (4h, OT) : optimisation dynamique du récupérateur**
 - **Séances 5, 6 (2×4h, CGA) : étude expérimentale de la récupération d'énergie**
 - **Séance 7 (4h, CGA/OT) : bilan, corrélations calcul / essai**
 - **Séance 8 (2h, CGA/OT) : soutenance finale**
- ▷ **Évaluation** : rapports de TP + partie théorique + soutenance orale

Quelques applications...

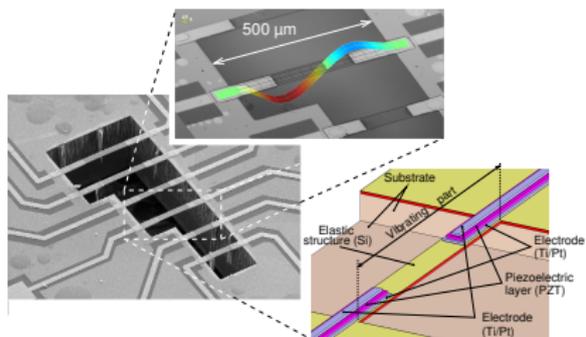
▷ Amortissement de vibrations par shunt piézoélectrique



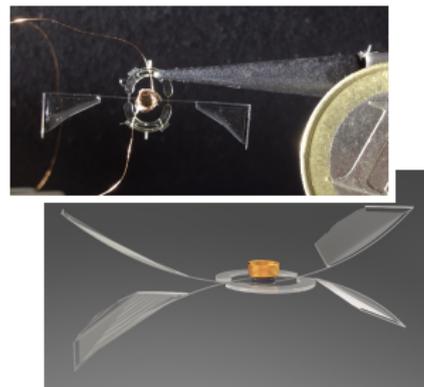
Quelques applications...

▷ Micro / Nano Systèmes ÉlectroMécaniques (M/NEMS)

Capteur de masse moléculaire

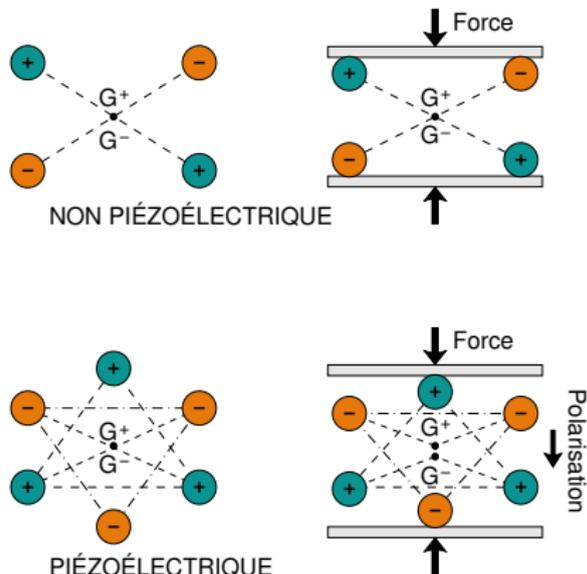


Nano drone à aile vibrantes



Piézoélectricité : principe

- Cristaux à structure cristalline particulière
- Déformation du cristal : barycentres des charges plus confondus, et apparition d'une polarisation (effet direct)
- Application d'un champ électrique extérieur : déplacement des charges entraînant une déformation (effet inverse)
- Phénomènes réversibles : conversion mécanique → électrique et électrique → mécanique



Piézoélectricité : historique

- ▶ **1880** découverte et démonstration de l'**effet direct** par les frères Pierre et Jacques Curie en 1880, sur des cristaux de Quartz, de tourmaline, de topaze de sucre et de sel de la Rochelle.
- ▶ **1881** prédiction théorique (considération thermodynamiques) par G. Lippmann puis vérification par les frères Curie, de l'**effet inverse**
- ▶ **1885** utilisation, pour une balance de précision, par les frères Curie
- ▶ **1910** travaux théoriques sur les structures cristallines piézoélectriques et définition rigoureuse des constantes (formalisme tensoriel) par W. Voigt
- ▶ **1914-18** premier sonars pendant la 1^{re} guerre mondiale (P. Langevin)
- ▶ **1920** premier oscillateur à quartz par W. Cady
- ▶ **1939-45** céramiques de synthèse d'oxydes à structure pérovskite (titano-zirconates de plomb, PZT, $\text{PbZr}_x\text{Ti}_{1-x}\text{O}_3$), matériaux piézoélectriques dans les plus performants encore à l'heure actuelle.
- ▶ **Depuis** diverses applications (transducteurs acoustiques (sonars, échographes, microphones et haut-parleurs), résonateurs (montre "à quartz"), capteurs d'accélération (accéléromètres, air-bags), moteurs piézoélectriques (autofocus d'appareils photographiques), filtres électroniques MEMS. . .



Pierre Curie



Gabriel Lippmann

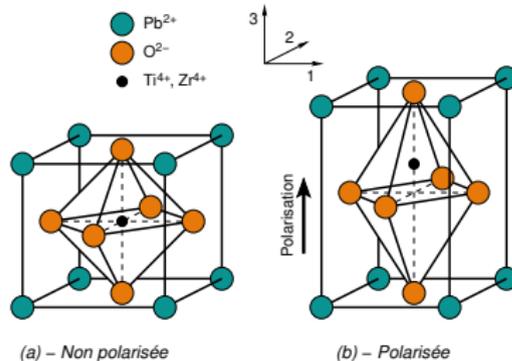


Woldemar Voigt

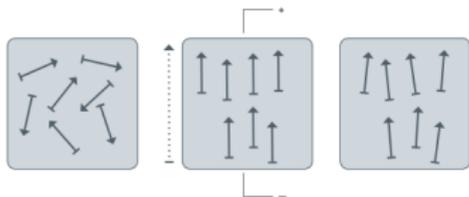
Céramiques piézoélectriques



Poudre pour la fabrication de céramiques



Structure pérovskite d'un cristal piézoélectrique



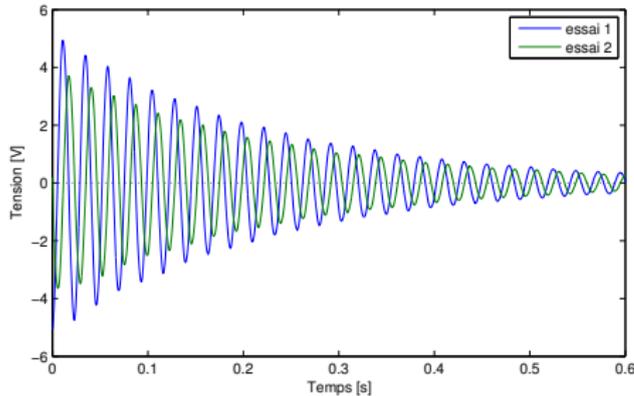
Polarisation d'une céramique

Fabrication : Poudres → frittage → pose des électrodes → polarisation



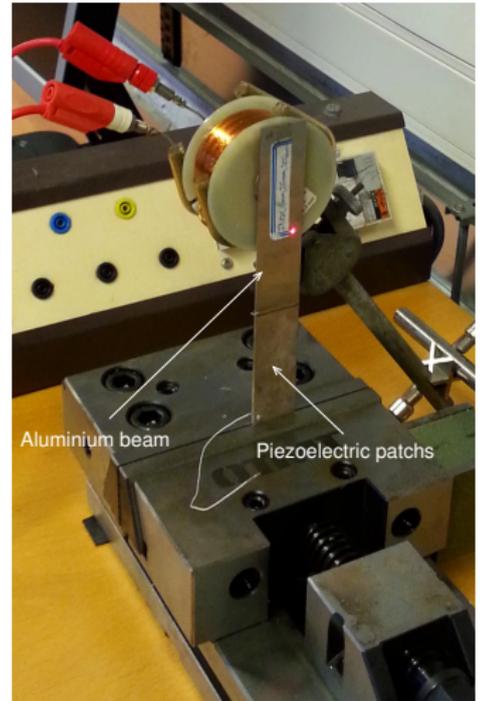
Quelques éléments piézoélectriques en céramique PZT

Expérience 1 sur un bimorphe piézoélectrique

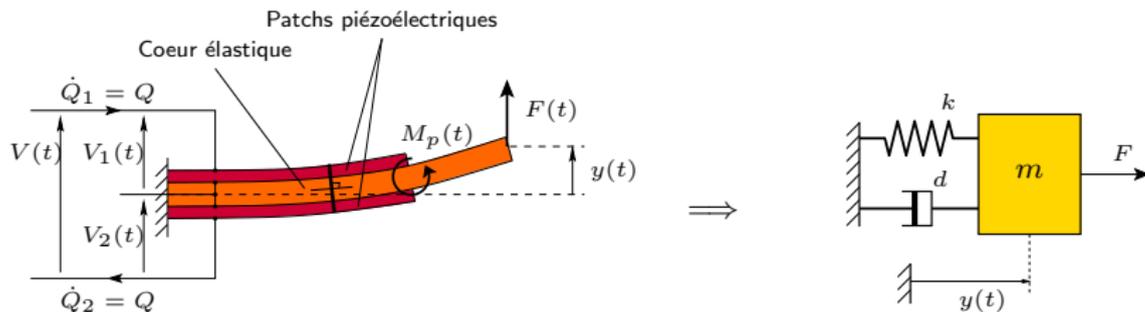


- on impose une déformée initiale à la poutre et on la lâche au temps $t = 0$;
- on mesure la tension aux bornes des patches piézoélectriques

⇒ Question : à quel système simple cela vous fait-il penser ?



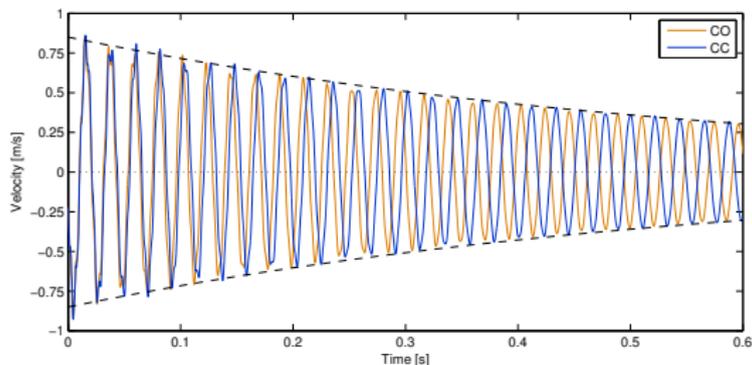
Modèle équivalent



$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = F$$

- Le système “à l’air” équivalent à un système masse / ressort / amortisseur à un degré de liberté
- la tension aux bornes des patchs piézoélectriques est proportionnelle au déplacement $y(t)$.

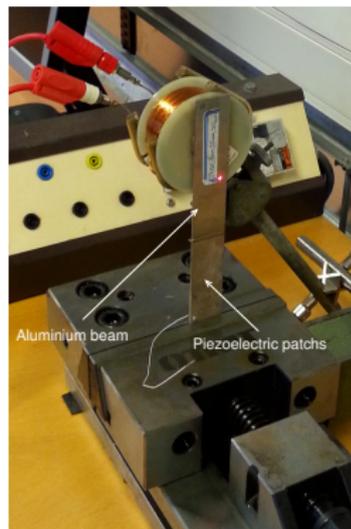
Expérience 2 : circuit ouvert et court-circuit



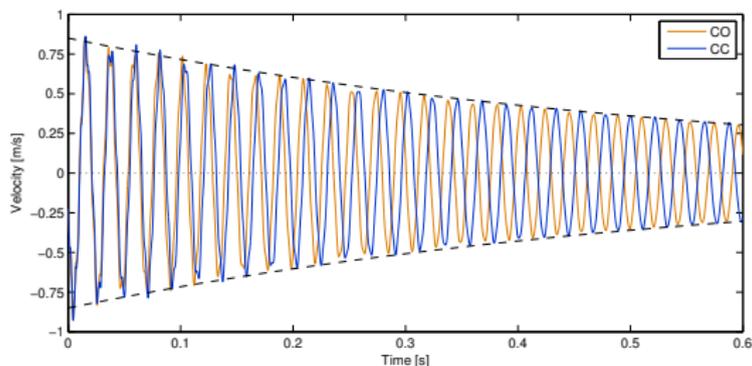
Vibrations libres avec :

- courbe bleue : électrodes en court-circuit (CC)
- courbe orange : électrodes en circuit ouvert (CO)

⇒ Question : que peut-on en conclure ?



Expérience 2 : circuit ouvert et court-circuit

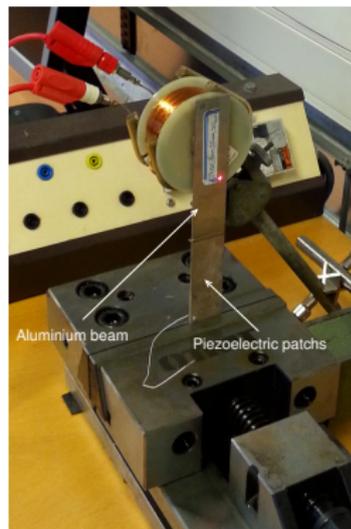


Vibrations libres avec :

- courbe bleue : électrodes en court-circuit (CC)
- courbe orange : électrodes en circuit ouvert (CO)

↪ Question : que peut-on en conclure ?

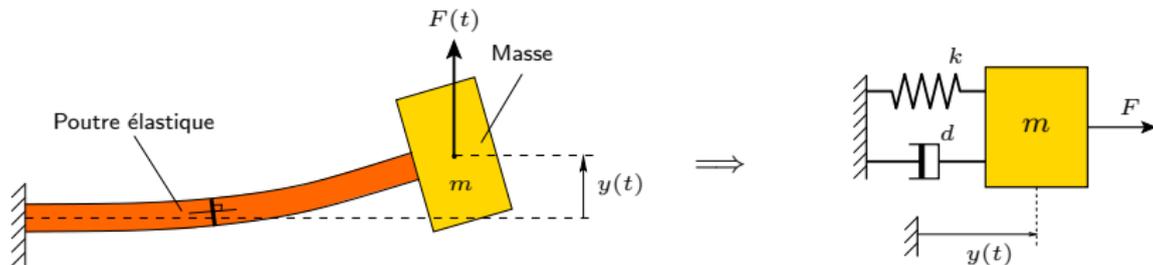
- les fréquences d'oscillations sont légèrement différentes
- l'amortissement est le même



Objectifs de la séance

- Préparer les expériences / calculs à venir
- Modéliser simplement la poutre piézoélectrique pour obtenir :
 - les effets piézoélectriques direct et inverse
 - le sens physique des paramètres (ω_0 , ξ ...)
 - expliquer les expériences précédentes (fréquences en CC \neq CO)
 - introduire un paramètre important : le facteur de couplage électromécanique κ .
- Différents modèles :
 - une poutre élastique en flexion + une masse
 - un barreau piézoélectrique en traction compression (statique)
 - une poutre élastique avec 1 ou 2 patchs piézoélectriques (statique + dynamique)

Modèle dynamique d'une poutre en flexion + masse



On suppose que la masse m est concentrée en bout de poutre, d'épaisseur h , de largeur b et de longueur L , fabriquée dans un matériau élastique et homogène de module d'Young Y .

1. Montrer que la dynamique du système s'écrit :

$$m\ddot{y} + ky = F \quad (1)$$

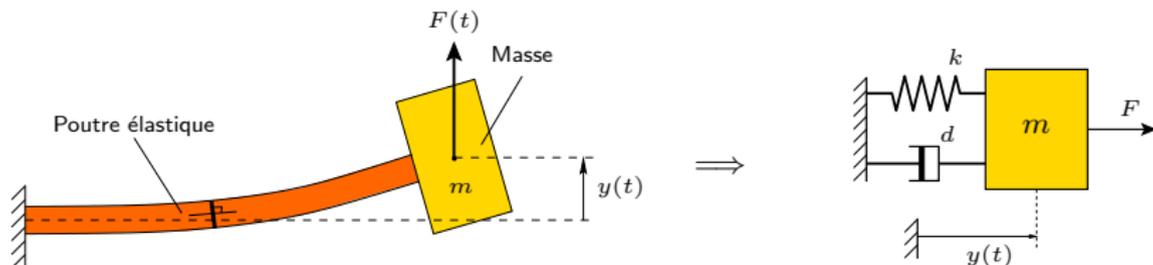
où on calculera k en fonction des données (considérer une poutre encastrée libre soumise à un effort concentré à son extrémité).

2. Est-ce que les oscillations libre de ce système correspondent à celles observées sur l'expérience 1 ? Que faut-il changer ? Tracer y en fonction de t avec Matlab / Python.
3. Montrer qu'on peut écrire la dynamique du système sous la forme :

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = F/m \quad (2)$$

où on donnera ω_0 et ξ en fonction des données et de d .

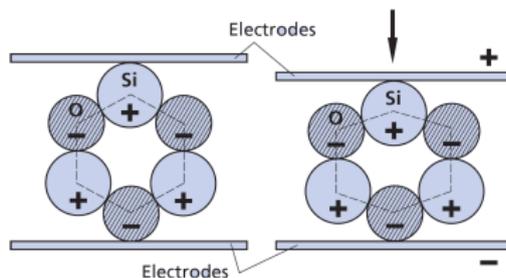
Modèle dynamique d'une poutre en flexion + masse



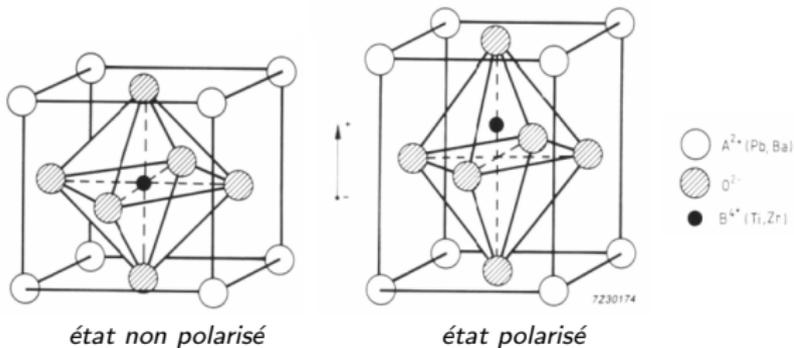
4. Rappeler les réponses libres et forcées du système. En déduire le sens physique de ω_0 et ξ et en déduire deux méthodes de mesure (on rappellera les notions de décrément logarithmique, largeur de bande à -3 dB, facteur de qualité).

Rappels sur la piézoélectricité

▷ Le quartz



▷ Une céramique (type PZT) polarisée



Loi de comportement piézoélectrique

▷ Variables d'état

- mécaniques : contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$
- électriques : champ électrique \vec{E} et déplacement électrique \vec{D}

Loi de comportement piézoélectrique

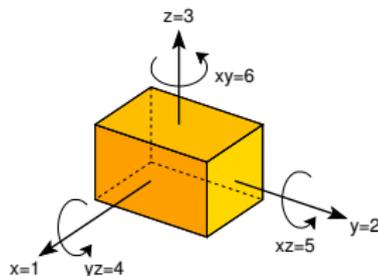
▷ Variables d'état

- mécaniques : contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$
- électriques : champ électrique \vec{E} et déplacement électrique \vec{D}

▷ Loi de comportement

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k \\ D_k = d_{kij} \sigma_{ij} + \epsilon_{kl}^\sigma E_l \end{cases}$$

- s_{ijkl}^E : ctes. de souplesse (à E constant)
- d_{kij} : ctes. piézoélectriques
- ϵ_{kl}^σ : permittivités (à σ constant)



Loi de comportement piézoélectrique

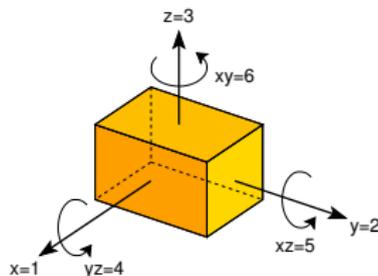
▷ Variables d'état

- mécaniques : contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$
- électriques : champ électrique \vec{E} et déplacement électrique \vec{D}

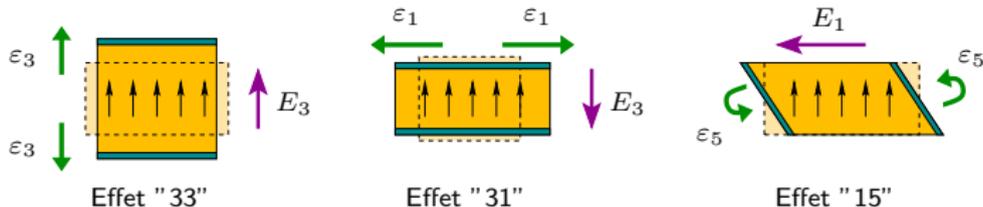
▷ Loi de comportement

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k \\ D_k = d_{kij} \sigma_{ij} + \epsilon_{kl}^\sigma E_l \end{cases}$$

- s_{ijkl}^E : ctes. de souplesse (à E constant)
- d_{kij} : ctes. piézoélectriques
- ϵ_{kl}^σ : permittivités (à σ constant)



▷ Effets piézoélectriques particuliers



Notations contractées (de Voigt)

▷ Correspondance entre 1 et 2 indices

Tensorielles :	11 = xx	22 = yy	33 = zz	23 = yz	13 = xz	12 = xy
Voigt :	1	2	3	4	5	6

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \cdot & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \cdot & \cdot & \sigma_{33} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \cdot & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

▷ Loi de comportement

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{13}^E & s_{23}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{22}^\sigma & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

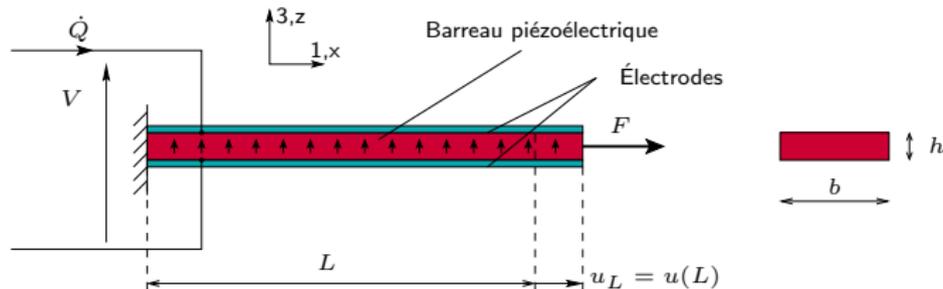
Données du fabricant

		Soft PZT materials					
		Unit	PIC151	PIC255/ PIC252 ¹⁾	PIC155	PIC153	PIC152
Physical and dielectric properties							
Density	ρ	g/cm ³	7.80	7.80	7.80	7.60	7.70
Curie temperature	T_c	°C	250	350	345	185	340
Relative permittivity	in the polarization direction ⊥ to polarity	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$ $\epsilon_{11}^T/\epsilon_0$	2400 1980	1750 1650	1450 1400	4200	1350
Dielectric loss factor	$\tan \delta$	10 ⁻²	20	20	20	30	15
Electromechanical properties							
Coupling factor	k_p k_t k_{31} k_{33} k_{15}		0.62 0.53 0.38 0.69 0.66	0.62 0.47 0.35 0.69 0.66	0.62 0.48 0.35 0.69 0.66	0.62	0.48 0.58
Piezoelectric charge coefficient	d_{31} d_{33} d_{15}	10 ⁻¹² C/N	-210 500 550	-180 400 550	-165 360	600	300
Piezoelectric voltage coefficient	g_{31} g_{33}	10 ⁻³ Vm/N	-11.5 22	-11.3 25	-12.9 27	16	25
Acousto-mechanical properties							
Frequency coefficients	N_p N_f N_3 N_t	Hz · m	1950 1500 1750 1950	2000 1420 1780 2000	1960 1500 1780 1990	1960	2250 1920
Elastic compliance coefficient	S_{11}^E S_{33}^E	10 ⁻¹² m ² /N	15.0 19.0	16.1 20.7	15.6 19.7		
Elastic stiffness coefficient	C_{33}^D	10 ¹⁰ N/m ²	10.0		11.1		
Mechanical quality factor	Q_m		100	80	80	50	100
Temperature stability							
Temperature coefficient of ϵ_{33}^T (in the range -20 °C to +125 °C)	$TK \epsilon_{33}$	10 ⁻³ /K	6	4	6	5	2

<http://piceramic.com/products/piezoelectric-materials.html>

Dans la norme IEEE : $T \rightsquigarrow$ contraintes, $S \rightsquigarrow$ déformations ($\epsilon^T \equiv \epsilon^\sigma$)

Barreau cylindrique en traction compression (1)



On considère un barreau piézoélectrique soumis à une force F de traction et une différence de potentiel V , polarisé suivant $(y, 3)$. Le déplacement terminal est u_L et la charge électrique dans l'électrode supérieure est Q . Par influence, l'électrode inférieure est chargée avec $-Q$. On néglige l'effet mécanique des électrodes, considérées infiniment minces.

1. La poutre étant en traction / compression seuls $\sigma_1 = \sigma_{xx}$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}$ sont non nuls. De plus, les seules composantes non nulles du champ et du déplacement électrique sont $E_3 = E_z$ et $D_3 = D_z$. Montrer avec la relation matricielle de la p. 19 que la relation de comportement s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_1 = Y_p \varepsilon_1 - Y_p d_{31} E_3 \\ D_3 = Y_p d_{31} \varepsilon_1 + \epsilon_{33}^e E_3 \end{cases} \quad (4)$$

On calculera ϵ_{33}^e et Y_p en fonction des s_{ij}^E , d_{ij} et ϵ_{ij}^σ .

Barreau cylindrique en traction compression (2)

On a pour le barreau (hypothèse classiques de poutres) :

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}, \quad F = \iint_{\text{section}} \sigma_1 dS, \quad E_3 = -\frac{V}{h}, \quad Q = - \iint_{\text{electrode}} D_3 dS$$

2. Justifier les trois premières équations ci-dessus et en déduire que :

$$\begin{cases} F = k_u u_L + \Xi V \\ Q = -\Xi u_L + C_0 V \end{cases} \quad (5a)$$

$$(5b)$$

avec :

$$k_u = \frac{bhY_p}{L}, \quad \Xi = bd_{31}Y_p, \quad C_0 = \frac{\epsilon_{33}^\varepsilon bL}{h}$$

- Donner le sens physique de chacun des termes. Donner les unités de toutes les grandeurs rencontrées. Donner l'ordre de grandeur de d_{31} à partir des données du fabricant.
- Sur quelle grandeur et comment intervient la polarisation des couches piézoélectriques ? Donner qualitativement de sens de déformation du barreau pour une différence de potentiel donnée.
- On impose une différence de potentiel de 10 V à un barreau de dimensions $L \times b \times h = 60 \times 10 \times 1\text{mm}$. Calculer la force générée à déplacement bloquée et le déplacement terminal en extrémité libre.
- Montrer que d'un point de vue électrique, le barreau est équivalent à une capacité électrique en série avec une force électromotrice, à déterminer.

Barreau cylindrique en traction compression (3)

7. Que valent Q et V lorsque le barreau est en court-circuit (CC) ou en circuit-ouvert (CO) ?
8. Calculer la raideur du barreau dans les deux cas de CC et CO (qu'on notera k_u^{cc} et k_u^{co}).
9. On ajoute maintenant une masse à l'extrémité du barreau et on observe ses oscillations en fonction du temps. Donner l'équation différentielle vérifiée par le déplacement $u_L(t)$ de la masse m . En déduire que les pulsations propre du système sont différentes en CC et en CO.
10. Calculer le facteur de couplage électromécanique en fonction des données :

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_{CO}^2 - \omega_{CC}^2}{\omega_{CC}^2}} \quad (6)$$

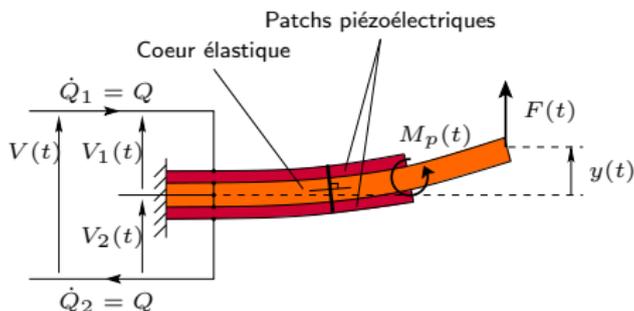
Montrer qu'il s'écrit :

$$\kappa^2 = \frac{\Xi^2}{C_0 k_u} = \frac{Y_p d_{31}^2}{\epsilon_{33}^\epsilon}. \quad (7)$$

Donner ses unités et son sens physique.

11. Expliquer les résultats de l'expérience 2.

Pour aller plus loin : bimorphe en flexion



On suppose l'épaisseur des patches piézoélectriques petite devant celle de la poutre, d'épaisseur h , de largeur b , de longueur L et de module d'Young Y . La longueur des patches est notée L_p . On suppose aussi les hypothèse classique de poutre (toute section normale et droite reste normale et droite) vérifiées.

On connecte les électrodes internes l'une à l'autre, si bien que $Q_1 = Q_2 = Q$. On s'intéresse aussi à la tension totale $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$.

Lorsque V_1 et V_2 sont imposées, la couche supérieure tend à se comprimer et la couche inférieure à s'étirer, si bien qu'elle créent deux forces horizontales décalées d'une distance h . L'effet piézoélectrique inverse est alors *équivalent* à un moment concentré à l'extrémité des patches piézoélectriques, égal à :

$$M_p = \Theta V \quad (8)$$

Bimorphe en flexion (2)

Lorsqu'une déformation de flexion de la poutre est imposée, les deux couches piézoélectriques, décalée de la ligne moyenne d'une distance $h/2$, changent de longueur. L'effet piézoélectrique direct s'écrit alors :

$$Q = \Theta v'(L_p) + C V. \quad (9)$$

En résumé, on a :

$$\boxed{M_p = \Theta V, \quad Q = \Theta v'(L_p) + C V} \quad (10)$$

avec

$$v'(L) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L},$$

et

- le coefficient de couplage piézoélectrique

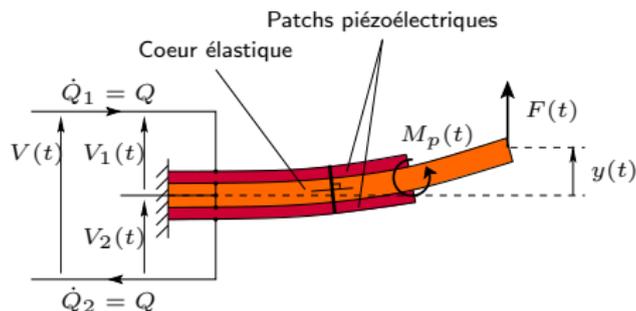
$$\Theta = \frac{bd_{31}Y_p h}{2}$$

- la capacité équivalente des deux lames piézoélectriques

$$C = \frac{\epsilon_{33}^e b L_p}{2h_p}$$

où h_p est l'épaisseur des patches piézoélectriques.

Poutre bimorphe en flexion (3)



Par intégration, on obtient les relations entre la force F appliquée à l'extrémité de la poutre, le déplacement $v(L)$ correspondant, la charge électrique Q dans l'électrode supérieure et la différence de potentiel V aux bornes du circuit :

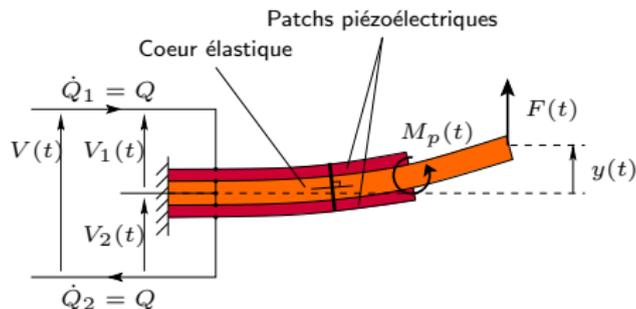
$$\begin{cases} F = k^V v(L) - \chi V \\ Q = \chi v(L) + C^v V \end{cases} \quad (11)$$

(12)

avec :

- k^V : la raideur du système en court-circuit ($V = 0$)
- χ : le coefficient de couplage piézoélectrique
- C^v : la capacité électrique des patches piézoélectriques bloqués ($v = 0$)

Poutre bimorphe en flexion (4)



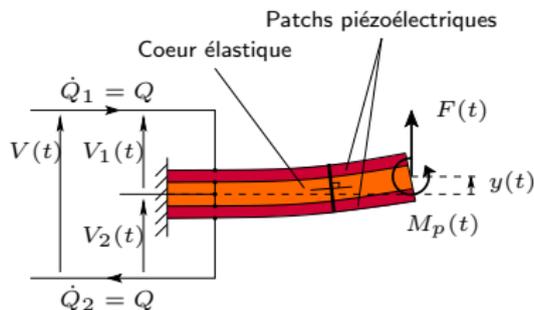
En éliminant V entre (11) et (12), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \underbrace{\left(k^V + \frac{\chi^2}{C^v} \right)}_{k^Q} v(L) - \frac{\chi}{C^v} Q \\ V = -\frac{\chi}{C^v} v(L) + \frac{Q}{C^v} \end{array} \right. \quad (13)$$

(14)

avec k^Q la raideur en circuit ouvert ($Q = 0$) du système. Elle est toujours légèrement supérieure à la raideur k^V en court circuit.

Poutre bimorphe en flexion (5)



Voici les résultats des calculs précédents lorsque la longueur de la poutre est identique à celle des patches piézoélectriques, $L = L_p$:

- flèche et rotation de la poutre en $x = L = L_p$:

$$y = v(L) = \frac{FL^3}{3YI} + \frac{M_p L^2}{2YI}, \quad v'(L) = \frac{FL^2}{2YI} + \frac{M_p L}{YI};$$

- coefficients des équations (11), (12) :

$$k^V = \frac{3YI}{L^3}, \quad \chi = \frac{3\Theta}{2L}, \quad C^v = C + \frac{\Theta^2 L}{4YI}$$

- facteur de couplage :

$$\kappa = \sqrt{\frac{k^Q - k^V}{k^V}} = \frac{\chi}{\sqrt{k^V C^v}}$$

Poutre bimorphe en flexion (6)

1. À partir des résultats du barreau, démontrer l'équation (10). Quel doit être le sens de polarisation des patches pour que le système soit couplé avec les patches en série ($V = V_1 + V_2$ et $Q = Q_1 = Q_2$) ?
2. Donner les valeurs de Θ et C lorsqu'un seul patch piézoélectrique est collé à la structure. Conclusion ?
3. Calculer toutes les grandeurs du bimorphe lorsque la longueur des patches est celle de la poutre ($L = L_p$) : raideurs en CC et CO, couplage piézoélectrique et capacité électrique (voir page précédente).
4. En déduire que les fréquences propres en CC et CO sont différentes. Laquelle est la plus grande ? Est-ce un résultat général ? Le vérifier sur le barreau cylindrique.
5. Lorsqu'on ajoute une masse m à l'extrémité de la poutre, donner l'équation vérifiée par $y = v(L)$.
6. Calculer le facteur de couplage électromécanique en fonction des données :

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_{CO}^2 - \omega_{CC}^2}{\omega_{CC}^2}} \quad (15)$$

Donner ses unités et son sens physique.

7. Expliquer les résultats de l'expérience 2.

À suivre...

